

УДК 532.584+538.22

**О СТАЦИОНАРНОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ
МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ**

ЛЮБИМОВ Д. В., ЛЮБИМОВА Т. П.

В гидродинамике ньютоновской жидкости нелинейные эффекты связаны лишь с наличием конвективных производных в уравнениях и потому исчезают при рассмотрении плоскопараллельных течений. Неньютоновские эффекты учитываются обычно либо феноменологически при записи тензора напряжений, либо с помощью явного рассмотрения дополнительных степеней свободы. В работе [1] на основе представлений о магнитной жидкости как о среде с внутренним вращением построена теория эффективной вязкости магнитной суспензии. Показано, что течение жидкости в магнитном поле имеет неньютоновский характер. В дальнейшем многими авторами (см., например, [2-3]) исследовались одномерные и плоские течения под действием перепада давления. Однако рассмотрение обычно ограничивалось непрерывными и гладкими решениями. В настоящей работе исследовано плоскопараллельное течение магнитной жидкости в однородном магнитном поле под действием продольного градиента давления; в рассмотрение включены разрывные решения. Показано, что при больших продольных градиентах давления и достаточно больших напряженностях магнитного поля задача имеет бесконечно много стационарных решений, отличающихся друг от друга числом и положением скачков намагниченности и связанных с ними изломов на профиле скорости. Численно изучены стационарные режимы и их устойчивость при учете слабой диффузии намагниченности и внутреннего момента импульса. Показано, что при этом вырождение снимается, однако в некоторой области параметров все же существуют несколько устойчивых стационарных режимов.

1. Рассмотрим течение магнитной суспензии в слое между двумя параллельными плоскостями под действием продольного градиента давления. Систему уравнений, описывающих поведение суспензии в магнитном поле, запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, & \frac{dS_i}{dt} &= e_{ikl} \sigma_{lk} \\ \frac{dM_i}{dt} &= \frac{1}{I} e_{ikl} S_k M_l - \frac{1}{\tau} (M_i - M_0 h_i), & \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial B_k}{\partial x_k} &= 0, & e_{ikl} \frac{\partial H_l}{\partial x_k} &= 0 \\ \sigma_{ik} &= -p_* \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2\tau_s} e_{ikl} (S_l - I \Omega_l) + \frac{1}{4\pi} H_i B_k, \\ p_* &= p + \frac{S}{I} (S - I \Omega) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, \mathbf{M} — намагниченность, \mathbf{S} — объемная плотность внутреннего момента импульса, \mathbf{h} — единичный вектор вдоль направления магнитного поля, I — момент инерции частиц в единице объема, ρ — плотность суспензии, τ — время релаксации намагниченности, M_0 — равновесная намагниченность, σ_{ik} — тензор напряжений, p — давление, $\mathbf{\Omega} = = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ — завихренность, \mathbf{H} и \mathbf{B} — напряженность и индукция магнитно-

го поля, η — динамическая вязкость суспензии, τ_s — время релаксации внутреннего момента импульса.

На границах слоя предполагаются выполненными условия прилипания в непрерывности V_n и H_τ .

Уравнения (1.1) предполагают непрерывность и дифференцируемость функций v , S , M и p . В тех областях, где эти условия выполняются, уравнения (1.1) эквивалентны уравнениям в интегральной форме. Из этих уравнений стандартной методикой [4] могут быть получены условия, которые должны выполняться на поверхностях слабых или сильных разрывов.

Поскольку в дальнейшем не предполагается ограничиваться рассмотрением лишь непрерывных и гладких решений, выпишем условия на поверхностях разрыва M , S и производных от скорости; при этом саму скорость будем считать непрерывной.

Первое уравнение системы (1.1) приводит к следующему соотношению на поверхности разрыва:

$$\{\sigma_{in}n_k e_i\} = 0 \quad (1.3)$$

где скобками обозначена величина скачка на поверхности разрыва, n — единичный вектор нормали к поверхности разрыва, e_i — орт i -той оси. Используя выражение (1.2), получаем из (1.3) для касательных к поверхности разрыва составляющих векторов Ω и S с учетом непрерывности скорости и несжимаемости жидкости следующее условие:

$$\left\{ 2\eta\Omega_\tau + \frac{1}{2\tau_s}(I\Omega_\tau - S_\tau) \right\} = 0 \quad (1.4)$$

Проекция (1.3) на направление нормали определяет скачок давления на поверхности разрыва.

С помощью уравнения для намагниченности, записанного в интегральной форме, получаем с учетом непрерывности скорости обычное кинематическое условие для скорости u движения поверхности разрыва M : $u = v_n$, где v_n — нормальная составляющая скорости жидкости, u определяется смещением поверхности разрыва по направлению нормали.

Предположим малость индукционных полей (т. е. $B \approx H$). Тогда из уравнений Максвелла и граничных условий непрерывности следует, что магнитное поле внутри слоя равно внешнему полю. Кроме того, будем считать τ_s малым, что позволяет не учитывать производную по времени в уравнении для внутреннего момента импульса.

Перепишем теперь уравнения (1.1) и условие (1.4) в безразмерной форме, выбрав в качестве единиц измерения длины полутолщину слоя l , времени τ , скорости l/τ , намагниченности M_0 , внутреннего момента I/τ , давления η'/τ ($\eta' = \eta + I/4\tau_s$)

$$\beta \frac{dv}{dt} = -\nabla p_* + \Delta v + \alpha \operatorname{rot} S, \quad S = \Omega + AM \times h$$

$$\frac{dM}{dt} = S \times M - M + h, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad (1.5)$$

$$\{2\Omega_\tau - \alpha S_\tau\} = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha = \frac{I}{2\eta'\tau_s}, \quad \beta = \frac{\rho l^2}{\tau\eta'}, \quad A = \frac{M_0 H \tau \tau_s}{I}$$

Используя выражения

$$I = \frac{2}{5} a^2 \rho' \varphi, \quad \tau = \frac{3\varphi\eta}{nkT}, \quad \tau_s = \frac{a^2 \rho'}{15\eta}, \quad M_0 = nmL(\xi), \quad \xi = \frac{mH}{kT}$$

где a — радиус твердой частицы, ρ' — плотность частиц взвеси, φ — объ-

емная концентрация твердой фазы, n — число частиц в единице объема, L — функция Ланжевена, можно представить параметры α и A в виде

$$\alpha = \frac{3\varphi}{1+3/2\varphi}, \quad A = \frac{1}{2} \xi L(\xi)$$

2. Будем искать стационарное решение уравнений (1.5), в котором скорость имеет одну компоненту. Выберем систему координат так, что ось x направлена вдоль скорости, ось z — поперек слоя, тогда $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Предположим, что магнитное поле лежит в плоскости xz , все величины, кроме давления, зависят лишь от поперечной координаты z .

Из предположения об одномерности течения следует направление $\Omega = (0, 1/2(\partial v/\partial z), 0)$. С учетом этого получаем из уравнения для \mathbf{S} требование ортогональности вектора \mathbf{S} к единичному вектору в направлении магнитного поля \mathbf{h} . Тогда для \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{S} \times \mathbf{h}}{1 + S^2}$$

Наконец, исключая \mathbf{M} из (1.5), находим связь между завихренностью Ω и моментом \mathbf{S} в виде

$$\Omega = \mathbf{S} \left(1 + \frac{A}{1 + S^2} \right) \quad (2.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{S} \parallel \Omega$, т. е. $\mathbf{S} = (0, S, 0)$.

Проектируя первое уравнение системы (1.5) на ось y , получим $\partial p/\partial y = 0$. Проекция на ось z определяет поперечный перепад давления. В проекции на ось x имеем

$$v'' - \alpha S' = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{Re} \quad (2.2)$$

где постоянная Re определяет продольный градиент давления и, таким образом, является параметром, аналогичным числу Рейнольдса. Будучи выраженным через размерные величины, Re имеет вид $\text{Re} = (\tau l/\eta') (\partial p/\partial x)$.

Условие на поверхности разрыва (1.6) приобретает вид

$$\{v' - \alpha S\} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) можно проинтегрировать один раз по z , в результате получим

$$v' - \alpha S = \text{Re } z + C \quad (2.4)$$

Из условия (2.3) на поверхности разрыва следует непрерывность левой части (2.4). Это означает, что постоянная C является одинаковой во всех областях непрерывности полей S и v' .

Ограничиваясь пока рассмотрением четных относительно середины слоя распределений скорости (и, следовательно, нечетных S и Ω), положим константу интегрирования в полученном соотношении равной нулю. Исключая $v' = 2\Omega$ с помощью (2.1), получим для S алгебраическое уравнение, в которое координата z входит как параметр

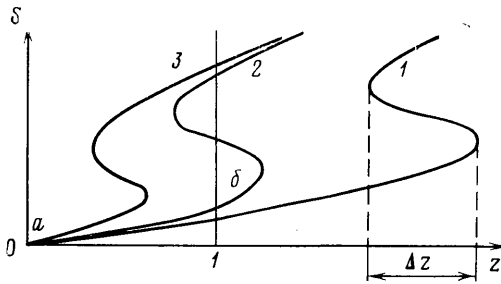
$$S \left(2 - \alpha + \frac{2A}{1 + S^2} \right) = \text{Re } z \quad (2.5)$$

Каждое решение $S = S(z)$ этого уравнения в силу (2.4) определяет v' и, значит, профиль скорости.

Если уравнение (2.5) при всех z имеет единственное решение, т. е. однозначно определяет функцию $S(z)$, то распределение скорости, удовлетворяющее граничным условиям, также будет единственным.

Совершенно иная ситуация получается, если зависимость $z(S)$, определяемая соотношением (2.5), немонотонна, т. е. обратная функция $S(z)$ неоднозначна в некотором интервале значений z . Легко видеть, что зави-

симось $z(S)$ при любых значениях параметров имеет не более двух экстремумов (при положительных z и S , т. е. в половине слоя). Расстояние между экстремумами функции $z(S)$ определяет интервал Δz , в котором функция $S(z)$ неоднозначна. В рассматриваемой задаче координата z в половине слоя меняется в пределах от 0 до 1; если интервал неоднозначности Δz не лежит в этих пределах (фиг. 1, кривая 1), то имеется



Фиг. 1

единственное — непрерывное и гладкое — распределение $S(z)$, удовлетворяющее (2.5).

Если же интервал Δz хотя бы частично перекрывается со слоем (фиг. 1, кривые 2, 3), то можно построить неединственное однозначное кусочно-непрерывное распределение $S(z)$ в слое, которое в каждой точке участков непрерывности удовлетворяет уравнению (2.5), а на поверхностях разрыва — соотношению (2.3). На этих поверхностях разрыва, лежащих внутри интервала неоднозначности, как раз и осуществляется переход с одной ветви зависимости $S(z)$ на другую. Поскольку положение поверхности разрыва произвольно внутри интервала Δz , то даже при наличии одного разрыва имеется бесконечно много возможных кусочно-непрерывных распределений $S(z)$. В том случае, когда интервал Δz только частично перекрывается со слоем (фиг. 1, кривая 2), среди бесконечного множества возможных распределений $S(z)$ имеется одно непрерывное и гладкое (участок $a-b$ кривой 2). Если же интервал Δz целиком лежит внутри слоя (фиг. 1, кривая 3), то гладкие решения вообще отсутствуют, так как в этом случае невозможно пройти слой от $z=0$ до $z=1$, оставаясь на одной ветви $S(z)$; любое возможное распределение $S(z)$ обязательно имеет нечетное число разрывов. Заметим еще, что если бы интервал Δz перекрывал весь слой, то можно было бы построить целых три гладких решения. Однако этот случай не реализуется при физически допустимых значениях параметров A и α , поскольку, как явствует из их определения, $A > 0$, а $\alpha < \delta/5$ и, следовательно, уравнение (2.5) имеет при $z=0$ (и по непрерывности в некоторой окрестности нуля) единственное решение.

Явление неоднозначности стационарного решения не специфично для магнитных жидкостей. Оно тесно связано с неньютоновскими реологическими свойствами и возникает всякий раз, когда реологическая кривая $\sigma(v')$ немонотонна (σ — касательное напряжение). В сделанных предположениях

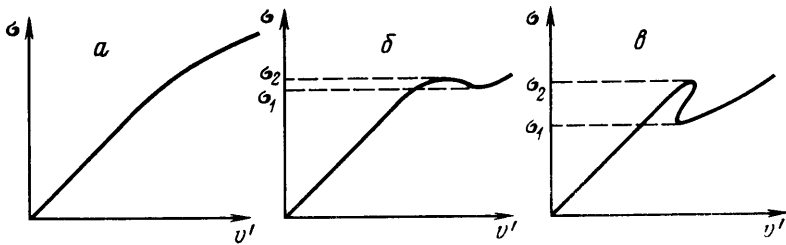
$$\sigma = v' - \alpha S \quad (2.6)$$

где связь $v' = f(S)$ задается (2.1). Соотношения (2.6), (2.1) определяют в параметрической форме (параметром служит S) зависимость $\sigma(v')$.

При малых и больших скоростях сдвига из (2.6), (2.1) соответственно находим

$$\sigma \simeq \left(1 - \frac{\alpha}{2(1+A)}\right) v', \quad \sigma \simeq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v'$$

т. е. «начальная» вязкость несколько больше «конечной». Иными словами,



Фиг. 2

в целом поведение является псевдопластическим. Однако, если обычно в моделях псевдопластиков напряжение монотонно растет со скоростью сдвига, в рассматриваемом случае монотонность имеет место не для всех значений параметров.

Из (2.6), (2.1) следует, что реологическая кривая немонотонна при $A > 8 - 4\alpha$, а при $A > 8$ зависимость $\sigma(v')$ становится неоднозначной. Отметим, однако, что σ всегда является однозначной функцией координаты z : из (2.4) следует, что $\sigma = \text{Re } z$. Обсуждавшееся выше существование бесконечного числа решений стационарной задачи связано с неоднозначностью обратной функции $v'(\sigma)$, для чего достаточна уже немонотонность $\sigma(v')$.

На фиг. 2 качественно изображены реологические кривые для случаев $A < 8 - 4\alpha$, $8 - 4\alpha < A < 8$ и $A > 8$ соответственно. Обозначим через σ_1 , σ_2 величину локальных минимума и максимума $\sigma(v')$. Обсуждавшийся выше интервал неоднозначности Δz в силу связи $\sigma = \text{Re } z$ соответствует интервалу (σ_1, σ_2) . Поскольку слой ограничен поверхностью $z=1$, то интервал Δz не попадает внутрь слоя, если $\text{Re} < \text{Re}_1 = \sigma_1$. При этом, как говорилось выше, решение задачи единственное и гладкое. При числах Рейнольдса $\text{Re}_1 < \text{Re} < \text{Re}_2$, где $\text{Re}_2 = \sigma_2$, интервал Δz частично перекрывается со слоем; в этом случае существует бесконечно много стационарных решений, из них одно — гладкое. Наконец, при $\text{Re} > \text{Re}_2$ интервал Δz целиком лежит внутри слоя и гладкие решения отсутствуют. Зависимости Re_1 и Re_2 от параметров α и A задаются формулой

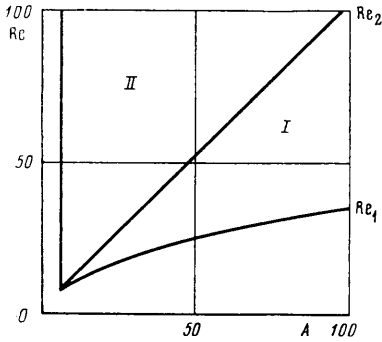
$$\text{Re}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} A^2 (1 + 20h - 8h^2 \mp (1 - 8h)^{1/2}), \quad h = (2 - \alpha) / 2A$$

На фиг. 3 приведены зависимости Re_1 и Re_2 от A при $\alpha \approx 0,46$, т. е. при концентрации $\varphi = 0,2$. Внутри областей I и II решение неоднозначно, причем в области II среди бесконечного множества решений нет ни одного гладкого.

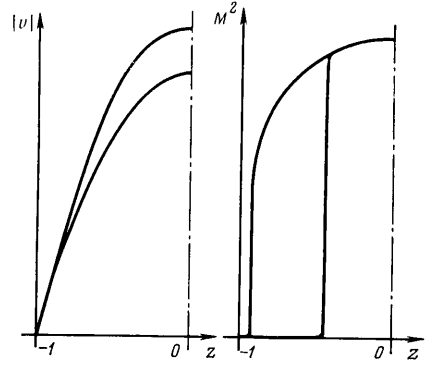
Конкретные вычисления распределений скорости и намагниченности проводились для $\varphi = 0,1$ и $0,2$. Функция $S(z)$, найденная из (2.5), подставлялась в уравнение (2.4) для v' . Интегрирование этого уравнения позволяло построить распределение скорости на участках непрерывности S и v' . Используя условие непрерывности скорости на поверхностях разрыва, удается построить (вообще говоря, негладкое) распределение скорости в слое.

Обсудим результаты, относящиеся к случаю $\varphi = 0,2$ ($\alpha \approx 0,46$) и $A = 50$; при таких значениях параметров $\text{Re}_1 \approx 24,6$; $\text{Re}_2 \approx 51,6$. В случае $\text{Re} < \text{Re}_1$ профиль скорости близок к параболическому, распределение намагниченности непрерывно и монотонно на интервале от середины слоя до границы. В средней части канала, где скорости сдвига малы, направление намагниченности определяется магнитным полем. С удалением от оси канала плотность внутреннего момента импульса монотонно растет, а составляющая намагниченности вдоль магнитного поля, как и полная намагниченность, уменьшается ($M^2 = Mh = 1 / (1 + S^2)$). При $\text{Re} > \text{Re}_1$ решение неоднозначно.

На фиг. 4, а для $Re=55$ приведены два профиля скорости, являющиеся в некотором смысле предельными: при их построении из трех возможных значений v' в каждой точке интервала неоднозначности выбиралось все время максимальное (или соответственно минимальное). Очевидно, что все остальные возможные профили скорости лежат между этими предельными. На фиг. 4, б представлены предельные распределения намагниченности M^2 в слое при тех же значениях параметров. Выбранное число



Фиг. 3



Фиг. 4

Рейнольдса превышает Re_2 , поэтому оба предельных решения разрывны. В точках разрыва намагниченность скачком меняется более чем на порядок.

При увеличении числа Рейнольдса интервал неоднозначности сужается и приближается к оси канала; в большей части слоя профиль скорости однозначен, намагниченность близка к нулю (при большой скорости сдвига магнитный момент частиц не успевает следить за полем, а увлекается быстровращающейся частицей).

Сложное реологическое поведение обуславливает нелинейный характер зависимости расхода жидкости через сечение канала Q от продольного градиента давления.

Введем величины $q=Q/\varphi$, $r=Re/\alpha$. В новых терминах как в случае $\alpha=0$, так и в случае $A=0$ зависимость потока от числа Рейнольдса дается выражением $q=2r$. Легко видеть, что такая же асимптотика получается при $r \rightarrow \infty$, когда α и A конечны. В противоположном предельном случае $r \rightarrow 0$ несложные вычисления приводят к асимптотике

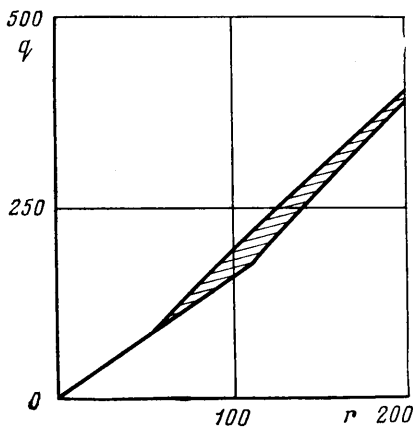
$$q=2r \sqrt{1 + \frac{3}{2} \varphi \frac{A}{1+A}}$$

В обоих предельных случаях связь потока и напора однозначна. Это связано с тем, что при малых r скорости сдвига всюду в слое малы и интервал неоднозначности Δz не попадает в слой, при больших же значениях r интервал Δz расположен вблизи оси и его ширина стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

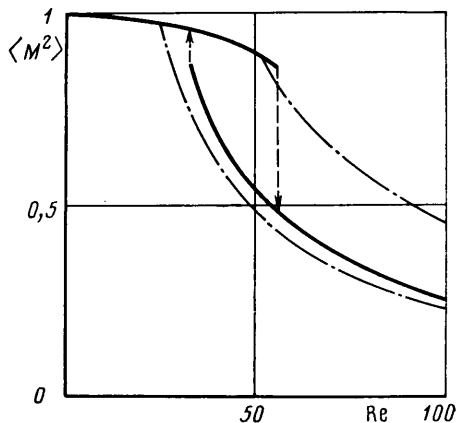
На фиг. 5 приведена зависимость расхода жидкости q от градиента давления при $\alpha \approx 0,46$; $A=50$. При $r > Re_1/\alpha \approx 54$ поток является неоднозначной функцией r . Интервал возможных значений q при данном r выделен штриховкой.

До сих пор предполагалось, что решение обладает определенной симметрией относительно середины слоя, что позволяет отбрасывать произвольную константу при интегрировании уравнения движения. Можно показать, однако, что в тех случаях, когда имеет место неоднозначность в классе симметричных решений, существуют и несимметричные решения. При этом «предельные» решения всегда симметричны.

3. Перейдем к рассмотрению нестационарных эффектов при сохранении предположения об одномерном характере течения. В предельном случае $\alpha=0$ (объемная концентрация магнитных частиц $\varphi=0$) влияние магнитных свойств на течение исчезает, возмущения скорости, не нарушающие плоскопараллельности, затухают. Динамика намагниченности в каждой точке z определяется при этом системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой Ω играет роль параметра. Анализ соответствующего фазового портрета показывает, что в тех случаях, когда решение стационарной задачи единственно, к нему релак-



Фиг. 5



Фиг. 6

сируют и все решения нестационарной задачи. В тех случаях, когда имеются три стационарных решения (при данном Ω), одно из них неустойчиво, а два других устойчивы относительно малых возмущений. Эта устойчивость по непрерывности сохраняется и при малых α . Заметим, что возмущения, смещающие поверхность скачка намагниченности, в рассматриваемом случае одномерного течения отсутствуют, так как скорость смещения поверхности разрыва намагниченности должна совпадать с нормальной к этой поверхности компонентой скорости жидкости. Таким образом, соображения устойчивости не позволяют выбрать предпочтительный режим, и установившееся состояние в классе одномерных течений определяется начальными условиями.

4. Задачи, имеющие бесконечное непрерывное множество стационарных решений, являются, как известно, структурно-неустойчивыми. Иными словами, сколь угодно малое изменение задачи может привести в качественным изменениям, в частности к сохранению лишь конечного числа стационарных решений. В качестве такого малого возмущения учтем слабую диффузию намагниченности и внутреннего момента импульса. Уравнения для S и M примут вид

$$D_1 \Delta S - S + \Omega + AM \times h = 0$$

$$\frac{dM}{dt} = S \times M - M + h + D_2 \Delta M \quad (4.1)$$

где D_1, D_2 — безразмерные коэффициенты диффузии. В связи с появлением производных от S и M необходимо сформулировать соответствующие граничные условия. В качестве таковых можно принять «мягкие» граничные условия

$$\left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_r = 0, \quad \left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_r = 0$$

Задача решалась численно методом конечных разностей. Стационарные решения получались по методу установления. Использовалась явная конечно-разностная схема второго порядка точности по пространственной переменной. Вычисления производились на равномерной сетке с шагом $h=1/50, 1/100$. Основные расчеты были выполнены для $\alpha \approx 0,46$; $A=50$; $D_1=0,10^{-3}$; $D_2=0,10^{-3}$.

Расчеты показали, что при малых числах Рейнольдса $Re < 30$, для которых при $D_1=D_2=0$ имеется единственное решение, в численном счете в результате переходного процесса независимо от начальных условий устанавливается единственный устойчивый стационарный режим, близкий к решению соответствующей задачи без учета диффузии. В интервале чисел Рейнольдса $30 < Re < 55$ в зависимости от начальных условий устанавливается одно из двух устойчивых стационарных решений. Если начальное состояние близко к гладкому решению задачи без учета диффузии (скачок отсутствует, либо имеется небольшой по величине скачок), то и в результате переходного процесса устанавливается стационарное решение, близкое к гладкому решению бездиффузионной задачи. Если же в начальном распределении имеется достаточно большой по величине скачок, то процесс установления приводит к стационарному решению, близкому к разрывному предельному решению задачи с $D_1=D_2=0$. При этом, разумеется, скачок «размывается», т. е. резкое изменение M^2 и v' происходит в узком переходном слое. Таким образом, в области чисел Рейнольдса $30 < Re < 55$ имеется два устойчивых стационарных режима. При числах Рейнольдса, больших 55, независимо от начального состояния устанавливается единственный устойчивый стационарный режим, близкий к предельному решению бездиффузионной задачи.

На фиг. 6 приведена зависимость среднего квадрата намагниченности в слое от числа Рейнольдса при $\alpha \approx 0,46$; $A=50$; $D_1=D_2=10^{-3}$. Штрихпунктирной линией изображено решение задачи, полученное при тех же α и A , но $D_1=D_2=0$. Видно, что числа Рейнольдса Re_1 и Re_2 , при которых соответственно появляются разрывные решения и исчезает гладкое решение в задаче без диффузии, близки к соответствующим числам Рейнольдса задачи с $D_1, 2 \neq 0$.

Таким образом, учет диффузии снимает вырождение; из бесконечного числа решений, получающихся при $D_1=D_2=0$, в области неоднозначности остаются лишь два устойчивых стационарных решения, соответствующие «предельным» решениям задачи без диффузии. Однако остальные решения невозмущенной задачи не исчезают бесследно, а проявляются как квазистационарные режимы; типичное поведение нестационарных решений (при произвольных начальных условиях) состоит в быстрой релаксации к одному из квазистационарных режимов и медленной эволюции вдоль этого семейства к предельному режиму.

Авторы выражают благодарность М. И. Шлиомису за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлиомис М. И. Эффективная вязкость магнитных суспензий.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 6, с. 2411—2418.
2. Висловиц А. Н., Синицын А. К. О течении ферромагнитного коллоида под действием перепада давления в однородном магнитном поле.— В кн.: Некоторые проблемы тепло- и массообмена. Минск, 1978, с. 39—43.
3. Кашевский Б. Э. Особенности гидродинамики магнитных жидкостей, обусловленные нелинейным МГД-взаимодействием.— В кн.: 8-я Междунар. конф. по МГД-преобразованию энергии. Москва, 1983, т. 5, с. 164—167.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.

Пермь

Поступила в редакцию
18.VII.1983