

УДК 532.526.013.4

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА
В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ
ВОЗДЕЙСТВИЕМ, ЛОКАЛИЗОВАННЫМ НА ОБТЕКАЕМОЙ
ПОВЕРХНОСТИ**

ФЕДОРОВ А. В.

Экспериментально установлено, что локальные источники внешних возмущений эффективно возбуждают собственные колебания пограничного слоя (волны Толлмина — Шлихтинга) [1]. Теоретическая модель, связанная с таким типом возбуждения, впервые была представлена в [2]. Асимптотический анализ генерации волн Толлмина — Шлихтинга вибратором, локализованным на дне пограничного слоя, выполнен в [3, 4]. В настоящей работе теоретически рассматривается произвольный тип периодического внешнего воздействия малой интенсивности, локализованного на обтекаемой поверхности. Задача о генерации волн Толлмина — Шлихтинга решается с помощью разложения решения по биортогональной системе собственных функций линеаризованных уравнений Навье — Стокса [5–7].

В проблеме восприимчивости пограничного слоя к внешним возмущениям основное внимание до сих пор уделялось вопросам возникновения волн неустойчивости. Однако искусственно создаваемые внешние воздействия можно использовать не только для порождения волн Толлмина — Шлихтинга, но и для подавления уже существующих в потоке неустойчивых возмущений. Экспериментально установлено [8, 9], что с помощью периодического нагрева узкой полоски поверхности профиля, обтекаемого водой, можно заметно уменьшить амплитуду волн Толлмина — Шлихтинга, зародившихся в естественных условиях, и, как следствие, увеличить критическое число Рейнольдса перехода. В данной работе рассматривается вопрос об использовании локальных периодических воздействий для управления переходом в пограничном слое сжимаемого газа.

1. Рассмотрим двумерное течение в пограничном слое сжимаемого газа. Пусть на расстоянии L от передней кромки обтекаемого профиля производится периодическое по времени внешнее воздействие, сосредоточенное на узком участке поверхности с характерным масштабом l^* . Предполагается, что масштаб источника внешних возмущений соизмерим с толщиной пограничного слоя. Число Рейнольдса $R = \sqrt{U_e L / \nu_e} \gg 1$ (ν_e , U_e — кинематический коэффициент вязкости и продольная компонента скорости на границе пограничного слоя), так что в окрестности источника пограничный слой в первом приближении можно считать плоскопараллельным. Считается, что возмущения, вносимые в пограничный слой внешним воздействием, малы и описываются линейной теорией.

Введем систему координат, как показано на фиг. 1. За масштаб длины возьмем $\delta = \sqrt{\nu_e L / U_e}$. Ограничимся рассмотрением плоских возмущений и введем вектор-функцию

$$\psi(x, y, t) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial y}, v, p, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

где u , v — возмущения x - и y -компоненты скорости, отнесенные к U_e , p — возмущение давления, обезразмеренное по $\rho_e U_e^2$ (ρ_e — плотность), θ — возмущение температуры, отнесенной к температуре на границе пограничного слоя T_e ; t — время в единицах $\sqrt{\nu_e L / U_e^3}$.

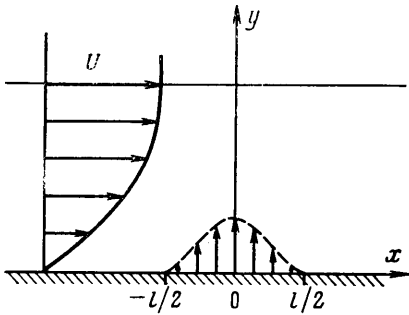
Рассмотрим возмущения фиксированной частоты ω , соответствующей

частоте внешнего воздействия. Тогда $\psi = \text{Re} [A(x, y) \exp(-i\omega t)]$, где A — комплексная амплитуда, удовлетворяющая линеаризованным уравнениям Навье — Стокса, в которых выполнено преобразование Фурье по времени

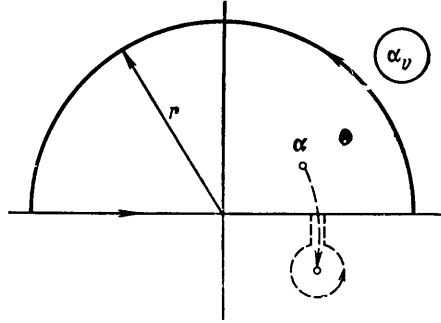
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial A}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial A}{\partial y} = H_1 A + H_2 \frac{\partial A}{\partial x} \quad (1.4)$$

Матрицы L_0, L_1, H_1, H_2 имеют размерность 9×9 , их элементы зависят от характеристик стационарного течения, частоты и числа Рейнольдса. Явный вид матриц дан в [7].

Внешнее воздействие может вызывать возмущения скорости и тем-



Фиг. 1



Фиг. 2

пературы на обтекаемой поверхности, что приводит к неоднородным граничным условиям

$$(A_1, A_3, A_5) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (y=0) \quad (1.2)$$

где φ_i — компоненты вектор-функции $\varphi(x)$, описывающей форму воздействия. Вне области локализации источника ($x < -l/2, x > l/2, l = l^*/\delta$) $\varphi(x) = 0$.

Потребуем, чтобы

$$|A| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad x = \text{const}; \quad |A| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad y = \text{const} \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.1) — (1.3) будем искать с помощью разложения по биортогональной системе собственных функций задачи с однородными при $y=0$ граничными условиями $\{A_\alpha, B_\alpha\}$ [7]. Собственная функция A_α является решением прямой задачи и соответствует собственному значению α , B_α — решение сопряженной задачи. Выполняются соотношения ортогональности

$$\langle H_2 A_\alpha, B_\beta \rangle = \Delta_{\alpha\beta}$$

$$\langle H_2 A, B \rangle = \int_0^\infty (H_2 A, B) dy, \quad (H_2 A, B) = \sum_{i,j=1}^9 H_2^{ij} A_j \bar{B}_i$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, если хотя бы одно из собственных значений α, β принадлежит дискретному спектру; $\Delta_{\alpha\beta} = \delta(\alpha - \beta)$ — дельта-функция, если α, β относятся к непрерывному спектру. Черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Спектр и основные свойства системы собственных функций проанализированы в [7].

В некотором сечении $x = x_1$, расположенном вниз по потоку от участка внешнего воздействия, амплитуда возмущения $A_1(y) = A(x_1, y)$ удовлетворяет однородным граничным условиям на стенке $A_{11}(0) = A_{13}(0) = A_{15}(0) = 0$ и условию ограниченности $|A_1| < \infty, y \rightarrow \infty$. Тогда в области $x > x_1 > l/2$ амплитуду $A(x, y)$ можно разложить по системе собственных функций $\{A_\alpha, B_\alpha\}$ [7]:

$$\begin{aligned}
 A(x, y) = & \sum_{\nu} \langle H_2 A_1, \mathbf{B}_{\alpha_{\nu}} \rangle \exp[i\alpha_{\nu}(x-x_1)] A_{\alpha_{\nu}}(y) + \\
 & + \sum_j \int_0^{\infty} \langle H_2 A_1, \mathbf{B}_{\alpha_j} \rangle \exp[i\alpha_j(x-x_1)] A_{\alpha_j}(y) dk
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где \sum_{ν} — суммирование по дискретному спектру, \sum_j — сумма интегралов по ветвям сплошного спектра $\alpha_j = \alpha_j(k)$, $0 < k < \infty$.

Представляя $A(x, y)$ и вектор $\Phi(x)$, входящий в граничные условия (1.2), в виде интегралов Фурье по волновым числам, имеем

$$\begin{aligned}
 A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\nu}(y) \exp[i\alpha_{\nu}x] d\alpha_{\nu}, \quad \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\alpha_{\nu}) \exp[i\alpha_{\nu}x] d\alpha_{\nu} \quad (1.5) \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} = H_1 A_{\nu} + i\alpha_{\nu} H_2 A_{\nu} \\
 A_{\nu 1}(0) = f_1(\alpha_{\nu}), \quad A_{\nu 2}(0) = f_2(\alpha_{\nu}), \quad A_{\nu 3}(0) = f_3(\alpha_{\nu}) \\
 |A_{\nu}| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Фурье-компонента A_{ν} описывает возмущение, вносимое в пограничный слой гармоникой внешнего воздействия с волновым числом α_{ν} . Выполняется соотношение

$$\langle H_2 A_{\nu}, \mathbf{B}_{\alpha} \rangle i(\alpha_{\nu} - \alpha) + (A_{\nu}, \mathbf{B}_{\alpha})_{y=0} = 0 \quad (1.6)$$

Из (1.5), (1.6) для коэффициентов в разложении (1.4) имеем

$$\langle H_2 A_1, \mathbf{B}_{\alpha} \rangle = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A_{\nu}, \mathbf{B}_{\alpha})_{\nu=0}}{i(\alpha_{\nu} - \alpha)} \exp(i\alpha_{\nu}x_1) d\alpha_{\nu} \quad (1.7)$$

Ограничимся рассмотрением возбуждения волны Толлмина — Шлихтинга, которая, как известно, принадлежит дискретному спектру. В случае докритических частот колебаний, когда волна Толлмина — Шлихтинга затухает вниз по потоку, для вычисления интеграла в (1.7) выберем контур интегрирования в комплексной плоскости α_{ν} , как показано на фиг. 2. Устремляя радиус окружности r к бесконечности и учитывая, что $x_1 > 0$, находим

$$\langle H_2 A_1, \mathbf{B}_{\alpha} \rangle = - (A_{\nu}, \mathbf{B}_{\alpha})_{\nu=0} \exp(i\alpha x_1) \quad (1.8)$$

Здесь и далее α — собственное значение волны Толлмина — Шлихтинга.

При переходе от докритических к закритическим частотам собственное значение волны неустойчивости пересекает действительную ось в направлении пунктирной стрелки на фиг. 2. В этом случае правило обхода полюса $\alpha_{\nu} = \alpha$ устанавливается из рассмотрения задачи о внешнем воздействии, начинающемся в момент времени $t=0$, как это сделано на примере модельной задачи [2]. Так как групповая скорость для волны Толлмина — Шлихтинга больше нуля, вклад от полюса $\alpha_{\nu} = \alpha$ необходимо включать в решение для $x > 0$, деформируя контур интегрирования, как показано пунктирной линией на фиг. 2. Данное правило выбора контура согласуется с постулатом, предложенным в [4], и с асимптотическим анализом [10] задачи о вибраторе, начинающем колебания при $t=0$.

Учитывая свойства собственных функций [7], нетрудно показать,

что

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_\alpha)_{y=0} &= (A_{v1}B_{\alpha1} + A_{v3}B_{\alpha3} + A_{v5}B_{\alpha5})_{y=0} = \\ &= f_1(\alpha)B_{\alpha1}(0) + f_2(\alpha)B_{\alpha3}(0) + f_3(\alpha)B_{\alpha5}(0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(-i\alpha x) dx$$

где $f(\alpha)$ — резонансная (с волной Толлмина — Шлихтинга) фурье-гармоника внешнего воздействия.

Из (1.8), (1.9) следует, что амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга, распространяющейся вниз по потоку от источника внешних возмущений,

$$A_{T_s}(x, y) = \frac{f_1(\alpha)B_{\alpha1}(0) + f_2(\alpha)B_{\alpha3}(0) + f_3(\alpha)B_{\alpha5}(0)}{\langle H_2 \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle} \exp(i\alpha x) A_\alpha(y) \quad (1.10)$$

Введение множителя $\langle H_2 \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle^{-1}$ делает соотношение (1.10) инвариантным относительно выбора нормировки собственных функций.

2. Пусть внешнее воздействие представляет собой периодический нагрев узкой полоски поверхности обтекаемого профиля (аналог экспериментов [8, 9]). Тогда граничные условия (1.2) примут вид

$$A_1(x, 0) = A_3(x, 0) = 0, \quad A_5(x, 0) = \theta_0 \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = O(1), \quad -l/2 < x < l/2; \quad \varphi(x) = 0, \quad x > l/2, \quad x < -l/2$$

где θ_0 — характерная амплитуда колебаний температуры стенки.

Для экспериментально определяемой величины максимума модуля x -компоненты массового расхода в возбуждаемой волне Толлмина — Шлихтинга имеем

$$q(x) = \theta_0 P_\theta |f(\alpha)| \exp[-\text{Im}(\alpha)x], \quad P_\theta = \left| \frac{B_{\alpha5}(0)}{\langle H_2 \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle} \right| q_{\alpha, m}$$

где P_θ — коэффициент порождения, равный начальной амплитуде волны Толлмина — Шлихтинга, возбуждаемой внешним воздействием с амплитудой резонансной гармоники $\theta_0 |f(\alpha)| = 1$; $q_{\alpha, m}$ — максимальное по y значение модуля x -компоненты массового расхода, рассчитанного по вектору \mathbf{A}_α .

Если внешнее воздействие представляет собой периодический отсос через узкую щель, то

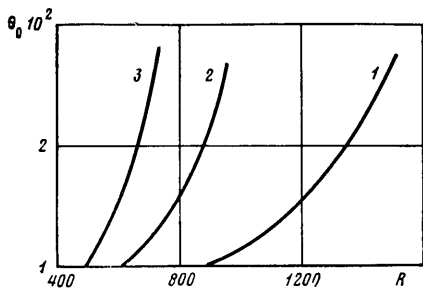
$$A_1(x, 0) = 0, \quad A_3(x, 0) = v_0 \varphi(x), \quad A_5(x, 0) = 0$$

$$q(x) = v_0 P_v |f(\alpha)| \exp[-\text{Im}(\alpha)x], \quad P_v = \left| \frac{B_{\alpha3}(0)}{\langle H_2 \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle} \right| q_{\alpha, m}$$

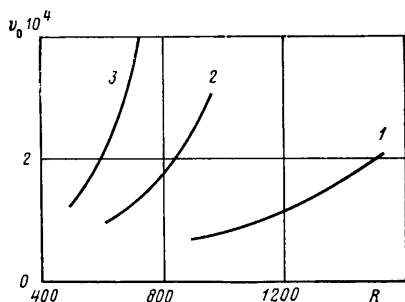
где v_0 — характерная амплитуда колебаний y -компоненты скорости.

Численные значения коэффициентов порождения P_θ , P_v , рассчитанных для пограничного слоя на плоской пластине, представлены в таблице для различных чисел Маха M и частотных параметров $F = \omega v_e / U_e^2$, соответствующих диапазону наиболее «опасных» с точки зрения перехода частот. Расчеты выполнены на основе системы Дана — Линя [11] для числа Прандтля 0,72, показателя адиабаты 1,41, температуры торможения 310 К. Числа Рейнольдса R , принятые в расчетах, соответствуют нижней ветви нейтральной кривой.

На фиг. 3, 4 представлены амплитуды внешних воздействий θ_0 , v_0 , необходимые для возбуждения волн Толлмина — Шлихтинга с начальными амплитудами $q(0) = 0,1\%$. Форма внешних воздействий $\varphi(x) = 1$ при $-l/2 < x < l/2$, $\varphi(x) = 0$ при $x > l/2$, $x < -l/2$. Масштаб источника $l^*/\delta = 40 \approx \pi/|\alpha|$ и соответствует режиму наиболее сильной генерации волны пе-



Фиг. 3



Фиг. 4

устойчивости. Кривые 1–3 соответствуют частотным параметрам $F \cdot 10^6 = 20, 40, 60$. Для генерации волн Толлмина – Шлихтинга равной интенсивности необходимы безразмерные пульсации скорости много меньше соответствующих пульсаций температуры. Данный вывод согласуется с оценками [8].

3. Рассматриваемые внешние воздействия могут возникать в условиях «естественного» перехода и служить источником порождения неустойчивых колебаний в пограничном слое. С другой стороны, их можно создать искусственно и использовать для подавления волн Толлмина – Шлихтин-

$F \cdot 10^6$	M	R	$Re(\alpha) \cdot 10^2$	$P_{\Theta} \cdot 10^3$	$P_p \cdot 10$	M	R	$Re(\alpha) \cdot 10^2$	$P_{\Theta} \cdot 10^3$	$P_p \cdot 10$
20	0,2	1020	7,27	2,4	6,2	0,6	960	6,44	3,4	5,3
40	—	685	8,84	3,6	5,1	—	645	7,85	4,3	4,3
60	—	550	10,04	4,1	4,4	—	520	8,97	4,8	3,8
20	0,4	1010	7,02	3,5	5,8	0,8	900	5,73	3,0	4,7
40	—	665	8,40	4,4	4,8	—	615	7,12	3,6	3,8
60	—	540	9,64	4,8	4,1	—	490	8,06	4,1	3,4

га, зародившихся ранее. Для этого необходимо установить активные элементы, имеющие характерный масштаб порядка длины волны собственных колебаний пограничного слоя и возбуждающие волны Толлмина – Шлихтинга в противофазе к существующим волнам. Таким способом представляется возможным подавлять волны неустойчивости на ранней стадии их развития и тем самым увеличивать число Рейнольдса перехода с малыми энергетическими затратами. В эксперименте [9] установлено, что применение одного такого элемента (периодический нагреватель) на поверхности профиля, обтекаемого водой, приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода приблизительно на 30%.

Основная трудность при разработке активных элементов для управления переходом в пограничном слое сжимаемого газа – высокие частоты требуемых воздействий. Для числа Маха 0,8 характерные частоты волн Толлмина – Шлихтинга ~ 10 кГц. Большая инерционность процессов теплообмена и низкий коэффициент преобразования возмущений температуры поверхности в волны неустойчивости исключают возможность эффективного использования периодических нагревателей на таких режимах. В этом случае более подходящим источником управляемых внешних воздействий является периодический отсос.

Автор выражает признательность А. М. Тумину за полезные обсуждения публикуемых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
2. Gaster M. On the generation of spatially growing waves in a boundary layer.— *J. Fluid Mech.*, 1965, v. 22, № 3, p. 433—441.
3. Геренгьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое.— *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1049—1055.
4. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах.— *ПМТФ*, 1982, № 4, с. 65—72.
5. Жигулев В. Н., Сидоренко Н. В., Тумин А. М. О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью.— *ПМТФ*, 1980, № 6, с. 43—49.
6. Сидоренко Н. В., Тумин А. М. Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа.— В кн.: *Механика неоднородных сред. Обзорн. докл. к 6-й Всесоюз. школе по моделям мех. сплош. среды*, Алма-Ата, 1981. Новосибирск, 1981, с. 29—45.
7. Тумин А. М., Федоров А. В. Пространственное развитие возмущения в пограничном слое сжимаемого газа.— *ПМТФ*, 1983, № 4, с. 110—118.
8. Liermann H. W., Brown G. L., Nosenchuck D. M. Control of laminar-instability waves using a new technique.— *J. Fluid Mech.*, 1982, v. 118, p. 187—200.
9. Liermann H. W., Nosenchuck D. M. Active control of laminar-turbulent transition.— *J. Fluid Mech.*, 1982, v. 118, p. 201—204.
10. Геренгьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое.— *ПММ*, 1984, № 2, с. 264—272.
11. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.X.1983