

УДК 532.525.2:533.6.011.55

О ГИПЕРЗВУКОВОЙ МНОГОЦИКЛОВОЙ СТРУЕ ГАЗА С СИЛЬНЫМ НЕДОРАСШИРЕНИЕМ ПОТОКА НА СРЕДЕ СОПЛА

ИВАНОВ А. В., СТАНКУС Н. В., ЧЕКМАРЕВ С. Ф.

Экспериментальные исследования сильно недорасширенных струй газа, истекающих в затопленное пространство из сверхзвуковых сопел, показали, что при достаточно больших числах Маха и Рейнольдса на срезе сопла струя состоит из нескольких циклов в виде «бочек» [1–3]. В данной работе предпринято теоретическое исследование таких струй. Используется метод нестационарной аналогии (закон плоских сечений). Построена приближенная модель течения и получено аналитическое решение для положения границы многоциклового струи. Проведено численное решение соответствующей эквивалентной нестационарной задачи о разлете цилиндрического сгустка газа.

Результаты работы находятся в согласии с экспериментальными данными и позволяют объяснить ряд фактов. Показано, например, что наблюдавшееся в экспериментах уменьшение амплитуды циклов (максимального радиуса «бочек») по мере их следования вниз по потоку обусловлено диссипацией энергии в скачках уплотнения. При этом оказывается, что длина циклов практически не зависит от диссипации и близка к постоянной. Рассмотрено влияние на геометрию струи отвода (подвода) тепла, например, за счет излучения, релаксации внутренних степеней свободы и т. д. Показано, что отвод тепла приводит к уменьшению амплитуды циклов, а подвод — к увеличению, но ни то ни другое, так же как и диссипация, не влияет на длину циклов. Решена задача о струе в слабо неоднородной атмосфере. Показано, что геометрия струи обладает адиабатическим инвариантом, связывающим длину и амплитуду циклов.

1. Постановка задачи. Пусть струя совершенного газа истекает из осесимметричного сверхзвукового сопла с радиусом r_c в затопленное пространство. Пусть сопло профилированное, так что поток газа на срезе сопла однородный, тогда радиальная составляющая скорости газа на срезе сопла $v_c = 0$, а модуль скорости V_c равен величине продольной составляющей скорости u_c , направленной вдоль оси струи. Струя определяется, кроме того, значениями давления p_c и плотности ρ_c газа на срезе сопла. Одновременно с этими величинами будем использовать для характеристики струи и число Маха $M_c = u_c/a_c$, где $a_c = \sqrt{\kappa p_c/\rho_c}$ — скорость звука, κ — отношение теплоемкостей. В затопленном пространстве зададим величину давления p_∞ . Ниже рассмотрим истечение газа с гиперзвуковой скоростью ($M_c^2 \gg 1$) при сильном недорасширении потока ($n = p_c/p_\infty \gg 1$).

Предположим, что вязкость и теплопроводность газа проявляются только в скачках уплотнения. В этом случае для описания течения газа можно использовать уравнения для идеальной жидкости, а скачки уплотнения и границу струи рассматривать как поверхности разрыва.

При истечении газа с гиперзвуковой скоростью для решения задачи можно воспользоваться законом плоских сечений и перейти к рассмотрению эквивалентного нестационарного течения. Это течение представляет собой разлет цилиндрического сгустка газа с начальным радиусом r_c и параметрами состояния газа на срезе сопла p_c и ρ_c в некоторую фиктивную среду, обеспечивающую постоянное давление p_∞ на границе сгустка [4, 5]. Формально переход к нестационарной задаче производится путем замены текущей продольной составляющей скорости газа u на u_c и расстояния вдоль оси струи x на $u_c t$, где t — время. Начало разлета сгустка

$t=0$ отвечает движению газа от среза сопла ($x=0$). Для сильно недорасширенных струй газа ($n \gg 1$) этот переход возможен при условии $\theta_*^2 \ll 1$, где θ_* — характерный угол, определяемый как отношение характерной скорости газа в поперечном направлении $\sqrt{p_c/(\kappa-1)\rho_c}$ к u_c , т. е. при

$$\theta_*^2 = \frac{1}{\kappa(\kappa-1)M_c^2} \ll 1 \quad (1.1)$$

При этом, поскольку скорость потока $V \leq V_m = u_c \sqrt{1+2/(\kappa-1)M_c^2}$, во всем поле течения для продольной скорости $u = V \cos \theta$ имеет место $u = u_c \{1 + O[\theta_*^2]\}$.

При условии (1.1) это дает возможность с точностью до членов в квадратной скобке положить $u = u_c$ и произвести замену $x = u_c t$ и тем самым перейти к рассмотрению эквивалентного нестационарного течения.

2. Приближенная модель течения. Воспользуемся интегральными законами сохранения. Чтобы определить, а также проследить связь рассматриваемого нестационарного течения со струей, будем исходить из уравнений двумерного стационарного течения. Запишем интегральные уравнения сохранения потоков массы, импульса и энергии для течения газа в струе

$$2\pi \int_0^{r_i} \rho u \, dr = \pi \rho_c u_c r_c^2 = G \quad (2.1)$$

$$2\pi \int_0^{r_i} (\rho u^2 + p) r \, dr = \pi (\rho_c u_c^2 + p_c) r_c^2 + 2\pi \int_{r_c}^{r_i} p_\infty r_i \, dr_i \quad (2.2)$$

$$2\pi \frac{d}{dx} \int_0^{r_i} \rho u v r \, dr + 2\pi p_\infty r_i - 2\pi \int_0^{r_i} p \, dr = 0 \quad (2.3)$$

$$2\pi \int_0^{r_i} \rho u \left(e + \frac{v^2}{2} \right) r \, dr = \pi \rho_c u_c e_c r_c^2 - u_c 2\pi \int_{r_c}^{r_i} p_\infty r_i \, dr_i + \Delta \quad (2.4)$$

$$\Delta = 2\pi \int_0^{r_i} \rho u \left[\frac{p}{\rho} \left(\frac{u_c}{u} - 1 \right) - \frac{(u - u_c)^2}{2} \right] r \, dr \quad (2.5)$$

Здесь x — расстояние от среза сопла вдоль струи, r — радиус, ρ — плотность газа, G — расход газа, p — давление, e — внутренняя энергия, u и v — составляющие скорости газа в направлении x и r , $r_i(t)$ — радиус границы струи. Уравнение для r — проекции потока импульса (2.3) — записано в дифференциальном виде по x , а уравнение энергии — в форме, удобной для перехода к плоским сечениям (аналогично тому, как это было сделано в [6] при исследовании обтекания тонкого тела).

Преобразуем уравнение (2.2)–(2.4), принимая во внимание особенности течения в сверхзвуковых сильно недорасширенных струях. Вводя средние по сечению струи величины, которые обозначим угловыми скобками, уравнение (2.2) перепишем в виде

$$G(\langle u \rangle - u_c) = 2\pi \int_{r_c}^{r_i} p_\infty r_i \, dr_i + G \left(\frac{u_c}{\kappa M_c^2} - \frac{\langle u \rangle}{\kappa \langle M \rangle^2} \right) \quad (2.6)$$

Считаем, что сжатый слой газа между границей струи и «висячим» скачком тонкий. Тогда, имея в виду, что в сильно недорасширенных струях практически весь газ сосредоточен в сжатом слое [7], в первом члене

уравнения (2.3) приближенно положим

$$2\pi \int_0^{r_i} \rho u v r dr \approx G \alpha v_i = G \alpha u_i \frac{dr_i}{dx} \quad (2.7)$$

где индекс i отмечает значения параметров на границе струи, а постоянная α введена, чтобы учесть отличие v от v_i в среднем по сечению струи. Последним членом (2.3) можно пренебречь, так как в ядре струи давление $p \ll p_\infty$, а сжатый слой, где $p=0$ (p_∞), предполагается тонким. Таким образом, уравнение (2.3) принимает вид

$$\alpha G \frac{d}{dx} \left(u_i \frac{dr_i}{dx} \right) + 2\pi p_\infty r_i = 0 \quad (2.8)$$

Из тех же соображений, что и для (2.7) в уравнении (2.4) приближенно

$$2\pi \int_0^{r_i} \rho u \frac{v^2}{2} r dr \approx G \beta \frac{v_i^2}{2} = G \beta u_i^2 \frac{1}{2} \left(\frac{dr_i}{dx} \right)^2$$

где постоянная β играет ту же роль, что и α в (2.7). Тогда (2.4) запишется в виде

$$G \beta u_i^2 \frac{1}{2} \left(\frac{dr_i}{dx} \right)^2 + 2\pi u_c \int_{r_c}^{r_i} p_\infty r_i dr_i = G(e_c - \langle e \rangle) + \Delta \quad (2.9)$$

Оценим изменение $\langle u \rangle$. Разделим уравнение (2.6) на $G u_c$ и с учетом $p_\infty = \text{const} = p_{\infty 0}$ получим

$$\frac{\langle u \rangle - u_c}{u_c} = \frac{\pi r_i^2 p_{\infty 0}}{G u_c} + \frac{1}{\kappa M_c^2} - \frac{1}{\kappa \langle M \rangle^2} \frac{\langle u \rangle}{u_c} \quad (2.10)$$

Используя приведенное ниже выражение (2.15) для максимальной величины $r_i|_{\text{max}} = R_0$, находим, что первый член в правой части не превышает θ . При этом остальные члены имеют меньшую величину.

Считая, что $\langle u \rangle \approx u_c$, произведем в уравнениях (2.8)–(2.9) замену $x = u_c t$ и перейдем к рассмотрению эквивалентной нестационарной задачи о разлете сгустка.

Уравнение (2.8) с учетом $p_\infty = p_{\infty 0}$ приобретает вид

$$\alpha \pi \rho_c r_c^2 \frac{d^2 r_i}{dt^2} + 2\pi p_{\infty 0} r_i = 0 \quad (2.11)$$

Это уравнение движения гармонического осциллятора. Общее решение уравнения дается выражением

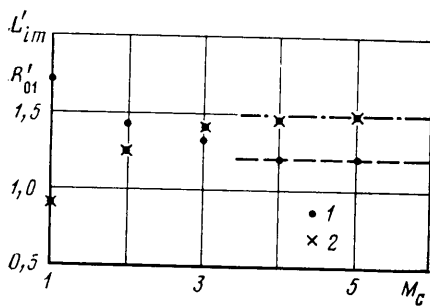
$$r_i = R_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2p_{\infty 0}}{\alpha \rho_c r_c^2}} \quad (2.12)$$

где R_0 , φ_0 , ω_0 — амплитуда, фаза, частота колебаний соответственно.

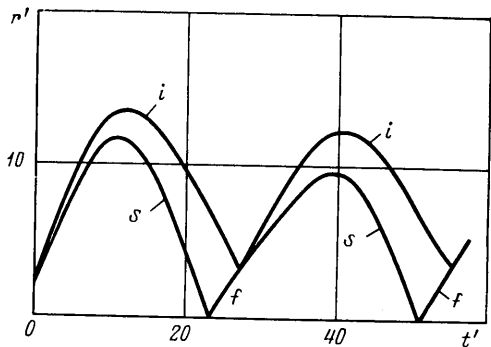
По физическому смыслу задачи $r_i \geq 0$. Рассмотрим начальный промежуток времени, на котором это условие выполнено.

Амплитуда колебания определяется энергией сгустка газа (ее вычисление будет дано ниже), а фаза φ_0 находится из начального условия $r_i(0) = r_c$. Для сильно недорасширенных струй максимальный радиус бочки во много раз больше радиуса среза сопла. Применительно к (2.12) это означает, что $R_0 \gg r_c$. В пределе при $r_c/R_0 \rightarrow 0$ $\varphi_0 \rightarrow 0$.

В этом случае в промежутке времени $0 \leq t \leq T_0$, где $T_0 = \pi/\omega_0$, сгусток проходит цикл состояний: «сжатое» (начальное) — перерасширенное — «сжатое» (конечное). В конечном состоянии $r_i = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотренный цикл соответствует одной (первой) бочке стационарной струи. Период цикла $T_0 = \pi/\omega_0$ и длина бочки $L_0 = u_c T_0$. С учетом выражения для ω_0 (2.12) и равенства $a_c^2 = \kappa p_c / \rho_c$ эти величины приобретают следующий вид:

$$T_0 = \pi \sqrt{\alpha \frac{\kappa}{2} n_0 \frac{r_c}{a_c}}, \quad L_0 = \pi \sqrt{\alpha \frac{\kappa}{2} n_0 M_c r_c} \quad (2.13)$$

Для определения неизвестной величины α , входящей в (2.13), можно воспользоваться результатами численных расчетов [7]. На фиг. 1 для $\kappa = 1,4$; $n_0 = p_c / p_{\infty 0} = 10^2$ точками 1 представлена зависимость $L'_{im} = L_{im} / (r_c M_c \sqrt{n_0})$, где L_{im} — расстояние от среза сопла до максимального сечения бочки, от M_c . Наилучшее согласие величины $L_0/2$, отвечающей по решению (2.12) расстоянию до максимального сечения бочки, с L_{im} по численным расчетам (для $M_c \geq 4$) получается при $\alpha = 0,7$. Само значение $L_0/2$ при $\alpha = 0,7$ дано штриховыми линиями.

При $t > T_0$ сгусток снова начинает расширяться, в результате чего при $T_0 \leq t \leq 2T_0$ повторяется цикл, аналогичный первому, и т. д. Для произвольного $t > 0$ и в пренебрежении ϕ_0 решение можно записать в виде

$$r_i = R_{0j} \sin [\omega_0 t + \pi(j-1)] \quad (2.14)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ — номер цикла. Длина циклов постоянна, поэтому ω_0 не имеет индекса номера цикла. Переход к стационарному течению осуществляется заменой $t = x/u_c$.

Определим амплитуду R_{0j} . Для этого воспользуемся уравнением энергии (2.9), которое с учетом $\langle u \rangle = u_c$ (что дает $\Delta = 0$) и постоянства давления ($p_{\infty} = p_{\infty 0}$) принимает вид

$$\beta \pi \rho_c r_c^2 \frac{1}{2} \left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 + 2\pi p_{\infty 0} \frac{r_i^2}{2} = \pi \rho_c r_c^2 (e_c - \langle e \rangle)$$

Запишем это уравнение для максимального сечения. Учитывая, что при этом $dr_i/dt = 0$ и $r_i = R_{0j}$, получаем

$$p_{\infty 0} R_{0j}^2 = \rho_c r_c^2 (e_c - \langle e_{mj} \rangle) \quad (2.15)$$

где $\langle e_{mj} \rangle$ — средняя внутренняя энергия газа в максимальном сечении j -го цикла. Таким образом, для вычисления R_{0j} надо определить $\langle e_{mj} \rangle$.

В максимальном сечении бочки практически вся масса газа переходит в сжатый слой [7]. «Вишняя» ударная волна на первой половине бочки довольно слабая, так что сжатие газа можно считать изоэнтропическим. Примем, кроме того, что давление в сжатом слое близко к $p_{\infty 0}$. Тогда, учитывая, что рассматривается совершенный газ, напишем

$$\langle e_{mj} \rangle \simeq e_c n_0^{(1-\kappa)/\kappa} \exp(\Delta s_{j-1}/c_p)$$

Здесь Δs_{j-1} — повышение средней величины удельной энтропии на входе в рассматриваемый цикл по отношению к энтропии на срезе сопла (при $t=0$). Оно происходит в предыдущих $j-1$ циклах, главным образом в отраженных скачках уплотнения в конце циклов (фиг. 2). Подставляя выражение для $\langle e_{mj} \rangle$ в (2.15) и учитывая, что $\rho_c e_c = p_c / (\kappa - 1)$, получим

$$R_{0j} = r_c \sqrt{\frac{n_0}{\kappa - 1} \left[1 - \exp \left(- \frac{\Delta s_{j-1}}{c_p} \right) n_0^{(1-\kappa)/\kappa} \right]} \quad (2.16)$$

Приращение энтропии положительно ($\Delta s < 0$) и его величина растет от цикла к циклу. Поэтому с ростом номера циклов амплитуда циклов R_{0j} уменьшается.

На фиг. 1 представлено сравнение нормированного максимального радиуса первой бочки $R_{01}' = R_{01} / r_c \sqrt{n_0}$ по результатам численных расчетов [7] (точки 2) и формуле (2.16), ($\Delta s = 0$) (штрихпунктирная линия).

Таким образом, из приведенного приближенного рассмотрения следует, что сильно недорасширенная гиперзвуковая струя газа при истечении в затопленное пространство имеет многоцикловую структуру в виде последовательности бочек (2.4). При этом длина циклов L_{0j} постоянна, $L_{0j} = L_0$ (2.13), а амплитуда R_{0j} уменьшается с ростом номера цикла (2.16). Такие многоцикловые струи экспериментально наблюдались в работах [1–3].

3. Численное решение. Сравнение результатов численного решения, приближенного решения и экспериментов. Одновременно с построением приближенной модели течения проводилось численное решение нестационарной задачи о разлете цилиндрического ступка.

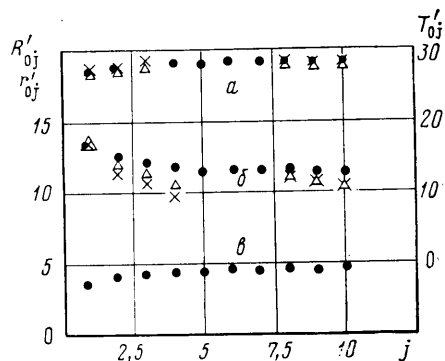
Система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение вязкого газа с цилиндрической симметрией, была описана в лагранжевых переменных и решалась методом сквозного счета с искусственной вязкостью [8].

На фиг. 2 показано положение границ ступка i висячей s и отраженной f ударных волн для первых циклов. Здесь $\kappa = 7/5$, $n_0 = 10^2$. Масштабом времени служит величина $t_c = r_c / a_c$; $t = t / t_c$. Переход к безразмерному расстоянию по оси струи осуществляется по формуле $x / r_c = u_c t / r_c = M_c t / t_c$, $r' = r / r_c$.

На фиг. 3 точками 1 показано полученное из проведенных численных расчетов поведение периода циклов $T_{0j}' = T_{0j} / t_c$ максимального $\bar{R}_{0j} = R_{0j} / r_c$ и минимального $\bar{r}_{0j} = r_{0j} / r_c$ радиусов ступков (зависимости a , b и ϵ) в функции от номера цикла. Периоды T_{0j} находились как интервалы между двумя соседними минимальными сечениями. Видно, что после двух-трех циклов движение выходит на режим, близкий к периодическому.

Эволюция течения и установление периодического режима проходят под влиянием диссипации механической энергии в ударных волнах, главным образом в отраженной волне f . На первом цикле величина $\exp(\Delta s / c_p)$ возрастает на 17%, на втором — на 4,5% и далее осуществлено слабее — после четвертого цикла изменение составляет не более 2%. С учетом данного изменения энтропии по формуле (2.16) получаем: $R_{01} = 13,5 r_c$, $R_{02} = 11,5 r_c$ и $R_{03} = 11,3 r_c$, что удовлетворительно согласуется с поведением R_{0j} на фиг. 3.

Длина циклов практически постоянна. Это соответствует результатам приближенного рассмотрения. Для согласия формулы (2.13) с расчетным



Фиг. 3

значением $T_0 \approx 28t_c$ следует положить $\alpha = 0,7$, что совпадает с полученным выше значением α из сравнений формулы (2.13) с результатами двумерных расчетов (фиг. 1).

Результаты экспериментов по многоцикловым струям [1–3] подтверждают эти две основные особенности течения: длина циклов практически постоянна, а их амплитуда уменьшается с ростом номера циклов. Для примера приведем экспериментальные данные для истечения CO_2 в режиме¹: $T_0 \approx 700$ К, $n_0 = 860$, $M_c = 4,35$, $\kappa_c = 1,4$, $\text{Re}_L = 140$. В экспериментах измерялась не длина и амплитуда бочек, а расстояние до точки отражения висячей волны L_m и максимальный радиус висячей волны r_{sm} . Они получились равными: $(L_m')_{1,2} = 1,92, 1,95$ и $(r_{sm}')_{1,2} = 1,16, 1,05$; здесь $L_m' = L_m / (r_c M_c \sqrt{n})$, $r_{sm}' = r_{sm}$, а индексы 1, 2 отвечают первому и второму циклам.

По результатам численных расчетов (фиг. 2) имеем $L_m = 0,85L_0$, $(r_{sm})_1 = 0,88R_{01}$, $(r_{sm})_2 = 80$, где L_0 и R_0 даются формулами (2.13) и (2.16). Отсюда с учетом уменьшения R_{02} за счет диссипации в ударных волнах первого цикла получаем: $(L_m')_{1,2} = 2,35$ и $(r_{sm}')_{1,2} = 1,28, 0,98$. Величины r_{sm} согласуются с результатами экспериментов достаточно хорошо. Величина L_m в экспериментах оказывается примерно на 20% меньше, чем теоретическая. Этот эффект в рамках построенной модели может быть объяснен следующим образом: за счет торможения струи окружающим газом средняя скорость газа уменьшается, что приводит к уменьшению длины циклов (хотя период T_0 при этом не меняется). В ту же сторону направлено воздействие диссипации механической энергии в слое смешения на границе струи. Диссипация вызывает нагрев газа в ударном слое, вследствие чего ударный слой расширяется [9] и висячая ударная волна падает на ось струи ближе к соплу. Поэтому расстояние L_m до точки отражения висячей волны уменьшается. Заметим, что для больших Re_L (~ 350) наблюдается значительно лучшее согласие, однако данные при этих Re_L имеются только для первых циклов [3].

Подводя итоги обсуждения, можно сказать, что развитая в п. 2 приближенная модель гиперзвуковой сильно недорасширенной струи газа удовлетворительно отражает основные свойства геометрии течения. Теперь, пользуясь этой моделью и привлекая численное решение, рассмотрим две задачи, имеющие теоретический и практический интерес.

4. Влияние отвода (подвода) тепла. Рассмотрим, как влияют на геометрию струи процессы, воздействие которых можно уподобить отводу или подводу тепла. Такими процессами могут быть излучение, релаксация внутренних степеней свободы, конденсация газа и т. д. Для определенности будем считать, что рассматривается излучение. Пусть интенсивность излучения единицы массы газа равна J ($J < 0$). Тогда в правой части (2.4) (и в последующих, вытекающих из него уравнениях) появляется член, отвечающий отводу энергии в единицу времени из струи на участке между срезом сопла и произвольным сечением x . Его удобно записать в виде GQ , где Q — среднее изменение энергии единицы массы струи за счет излучения на данном участке

$$GQ = 2\pi \int_0^x \int_0^{r_1} \rho J r dr dx$$

В общем случае отвод тепла приводит к изменению кинетической и внутренней энергии газа. При гиперзвуковом течении в первую очередь изменится внутренняя энергия. Поэтому для $Q \ll u_c^2/2$ можно считать, как и раньше, что $\langle u \rangle = u_c$. Тогда уравнение (2.11) сохранит свой вид и его решение по-прежнему будет определяться формулой (2.14) с постоянной

¹ Эти данные были любезно предоставлены авторами [3].

длиной циклов L_0 (2.13). Таким образом, длина циклов не зависит от наличия и характера излучения.

Амплитуда циклов имеет вид

$$R_j = r_c \left\{ \frac{n_0}{\kappa - 1} \left[1 - \exp \left(\frac{\Delta s_{j-1/2}}{c_p} \right) n_0^{(1-\kappa)\kappa} + \frac{Q_{j-1/2}}{e_c} \right] \right\} \quad (4.1)$$

где $Q_{j-1/2}$ — изменение энергии единицы массы газа за счет излучения к середине j -го цикла. Изменение энтропии состоит в данном случае из двух слагаемых: $\Delta s_{j-1/2} = (\Delta s_u)_{j-1} - (\Delta s_r)_{j-1/2}$. Первое слагаемое — это повышение энтропии за счет диссипации энергии в ударных волнах в предыдущих $j-1$ циклах, а второе — изменение энтропии к середине j -го цикла за счет излучения

$$(\Delta s_r)_{j-1/2} = \frac{2}{\rho_c \nu_c r_c^2} \int_0^{x_{j-1/2}} \int_0^{r_j} \frac{\rho J}{T} r dr dx$$

где T — местная температура. При излучении $J < 0$, $\Delta s_r < 0$. За счет этого повышение энтропии, обусловленное диссипацией энергии в ударных волнах, частично или полностью компенсируется и вклад второго члена в круглой скобке (4.1) становится меньше. В целом же амплитуда циклов при излучении уменьшается, так как $Q < 0$.

В случае накачки энергии в струю ($J > 0$) зависимость амплитуды циклов от интенсивности накачки неоднозначна, так как $\Delta s_r > 0$ и $Q > 0$, что может привести как к уменьшению, так и к увеличению R_j .

На фиг. 3 представлены данные по длине и амплитуде циклов для конкретного случая $J = -\gamma \kappa e / T_0$, где e — местная внутренняя энергия, $T_0 = 28t_c$, $\gamma = 0,1$. Остальные условия те же, что и на фиг. 2. Здесь показаны результаты численного решения и значения по формулам (2.13) и (4.1). При расчете по формуле (4.1) учитывалось, что для данного теплового потока $\Delta s_r = -c_p \gamma t / T_0$. Значения Δs и Q брались из численного решения.

5. Струя в неоднородной атмосфере. Адиабатический инвариант. Рассмотрим, как влияет на геометрию струи медленное изменение внешнего давления вдоль границы струи. Зададим $p_\infty = p_\infty(t)$, причем для определенности будем считать, что $p_\infty(0) = p_{\infty 0}$. Условие медленного, адиабатического [10, 11] изменения давления запишем в виде $dp_\infty / dt \ll \omega p_\infty$, здесь ω частота колебаний (2.14). Кроме того, положим, что $d^2 p_\infty / dt^2 \ll \omega dp_\infty / dt$.

Переменность p_∞ приведем к тому, что частота колебания ω и их амплитуда R будут, во-первых, отличаться от соответствующих значений ω_0 и R_0 для $p_\infty = p_{\infty 0}$ (2.12) и (2.16), и, во-вторых, меняться со временем. Поэтому решение уравнения (2.11) в пределах j -го цикла (одной j -й бочки) ищем в виде [11]

$$r_i = R_j(p_\infty) \sin \left[\int \omega(p_\infty) dt + \varphi \right]$$

Здесь наличие индекса j у амплитуды означает пока лишь, что она зависит от диссипации энергии в ударных волнах. Подставляя это выражение в уравнение (2.11), где в данном случае вместо $p_{\infty 0}$ должно быть $p_\infty(t)$, и опуская члены второго порядка малости по изменению p_∞ , получаем, что $d(R_j^2 \omega) / dp_\infty = 0$. Следовательно, величина $I = R_j^2 \omega$ для данного цикла j не зависит от $p_\infty(t)$. Она представляет собой известный адиабатический инвариант для гармонического осциллятора [10, 11]. Определяя величину I при $p_\infty = p_{\infty 0}$, получаем

$$R_j^2 \omega_j = R_0^2 \omega_0 \quad (5.1)$$

Частота ω_j дается выражением (2.12), где в данном случае под внешним давлением следует понимать среднее по циклу давление (обозначим его $p_{\infty j}$). Поэтому в равенстве (5.1) частота снабжена индексом j . Нали-

чие индекса j у амплитуды в этом равенстве означает уже не только ее зависимость от диссипации энергии, но и зависимость от частоты ω_j , обусловленную самим равенством (5.1), т. е. тем, что величина $R_j^2 \omega_j$ для данного цикла j одна и та же при различных значениях $p_{\infty j}$.

С учетом равенства $\omega_j T_j = \pi$ по аналогии с (2.13) можно определить период T_j j -го цикла, а с использованием (5.1) — его амплитуду. Имеем

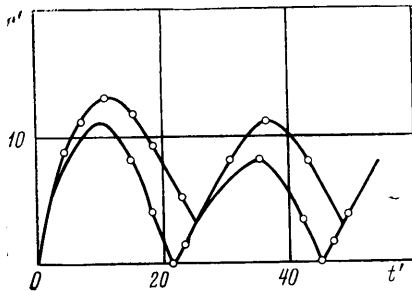
$$T_j = \frac{\pi r_c}{a_c} \sqrt{\frac{\alpha \kappa n_j}{2}}; \quad n = \frac{p_c}{p_{\infty j}}; \quad \alpha = 0,7 \quad (5.2)$$

$$\frac{R_j}{R_{0j}} = \left(\frac{T_j}{T_{0j}} \right)^{1/2} = \left(\frac{L_j}{L_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{p_{\infty,0}}{p_{\infty j}} \right)^{1/4} \quad (5.3)$$

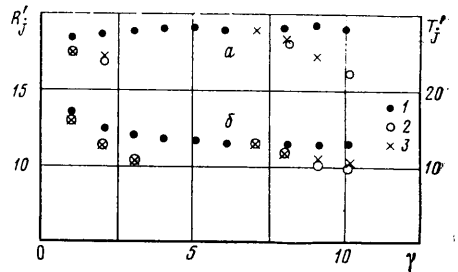
где T_0, L_0, R_{0j} даются формулами (2.13) и (2.16).

Подчеркнем, что, согласно (5.3), амплитуда R_j при изменении внешнего давления меняется медленнее, чем при подстановке в формулу (2.16) величины $p_{\infty j}$, соответствующей данному циклу.

На фиг. 4 сплошными линиями представлены положения границы сгустка и ударных волн для первых двух циклов, полученных по резуль-



Фиг. 4



Фиг. 5

татам численного расчета. Давление изменялось по линейному закону $p_{\infty} = p_{\infty 0} (1 + 0,3t/T)$. Здесь, как и на фиг. 2, $n = p_c/p_{\infty 0} = 10^2$ и $\kappa = 1,4$.

Зависимости $T_j(j)$ (а) и $R_j(j)$ (б), приведенные на фиг. 5 для первых двух циклов, а также для случая, когда изменение давления включается, начиная с 8-го цикла, построены по результатам численных расчетов (точки 2) и по приближенной модели (точки 3) с использованием формул (5.2) и (5.3). Кроме того, здесь для сравнения представлены также данные численных расчетов (точки 1) из фиг. 3, соответствующие случаю адиабатического движения при $p_{\infty} = p_{\infty 0}$.

На фиг. 4 точками показаны также положения границы сгустка и ударных волн, полученные путем сжатия изображения фиг. 2 в продольном и поперечном направлениях в T_0/T_j и R_0/R_j раз соответственно. Отметим, что аналогичное построение может быть проведено и для рассмотренного в п. 4 случая отвода (подвода) тепла, причем сжатие производится только в поперечном направлении, поскольку длина циклов в данном случае не меняется. Оно приводит к такому же хорошему согласию, как фиг. 4 для случая неоднородной атмосферы.

Пользуясь формулой (2.6), можно показать, что изменение внешнего давления при наложенных выше условиях

$$(d^2 p_{\infty} / dt^2) / \omega^2 \ll (dp_{\infty} / dt) / \omega \ll p_{\infty}$$

вызывает изменение скорости $\langle u \rangle$ порядка величины $[(dp_{\infty} / dt) / \omega p_{\infty}]^2 \ll 1$. Поэтому, как и прежде, можно считать, что $\langle u \rangle = \bar{u}_c$ и полученные в данном пункте результаты справедливы для гиперзвуковой струи. Длина цик-

ла бочки струи будет равна

$$L_j = u_c T_j = \pi M_c r_c \sqrt{\frac{\alpha \lambda n_j}{2}}$$

где $\alpha=0,7$, а амплитуда определяется выражением (5.3) и (2.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немченко В. И. Исследование замыкающего скачка в сверхзвуковой затопленной недорасширенной струе газа.— Инж.-физ. журн., 1971, № 5, с. 909—917.
2. Немченко В. И., Ющенко Н. И. Структура сверхзвуковой струи низкой плотности.— ПМТФ, 1969, № 6, с. 110—115.
3. Кисляков Н. И., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г. О структуре высоконапорных струй низкой плотности за сверхзвуковым соплом.— ПМТФ, 1975, № 2, с. 42—52.
4. Зак Л. И. Гиперзвуковая струя, истекающая в покоящуюся среду или в спутный сверхзвуковой поток.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5, с. 72—76.
5. Мурзинов И. Н. Параметры подобия при истечении сильно недорасширенных струй в затопленное пространство.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 4, с. 143—149.
6. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
7. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. М.: Изд-во МГУ, 1970, Ч. 1, 279 с; Ч. 2, 170 с.
8. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 351 с.
9. Чекумарев С. Ф. О движении ударного слоя газа со свободной границей в неадиабатических условиях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3, с. 152—154.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
11. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972. 592 с.

Поступила в редакцию
9.X.1981