

УДК 532.517.4:519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

**АНДРОНОВ В. А., БАХРАХ С. М., НИКИФОРОВ В. В.,
ЯНИЛКИН Ю. В.**

В последнее время довольно широко применяется моделирование турбулентных течений с помощью непосредственного численного решения двумерных уравнений Навье – Стокса и Эйлера (см., например, [1, 2]). Однако получающаяся в таких расчетах двумерная турбулентность в ряде аспектов может принципиально отличаться от реальной – трехмерной. Так, в изотропной двумерной турбулентности каскадный поток энергии по спектру направлен не от крупных вихрей к мелким, как в трехмерном случае, а, наоборот, от мелких к крупным [3]. Следствием этого является вырождение мелкомасштабной части спектра вихрей, что приводит в двумерной турбулентности при больших числах Рейнольдса в отличие от трехмерной к отсутствию процессов молекулярной диссипации пульсирующих величин (скорости, плотности и др.).

В настоящей работе на основе двумерных расчетов течения невязкой сжимаемой жидкости делается попытка выяснить, насколько существенными могут быть указанные обстоятельства при описании таких характеристик некоторых турбулентных течений, как скорость роста зоны смешения, профиль средней плотности и др.

Расчеты проводились по методике [4], в которой двумерное течение невязкой сжимаемой жидкости описывается в переменных Эйлера. Для локализации контактных границ в этой методике используются массовые концентрации и специальный алгоритм счета потоков из ячеек сетки, содержащих несколько веществ.

Методика [4] позволяет проводить расчеты газодинамических течений с большими деформациями контактных границ. С помощью расчетов по методике [4] исследовалась эволюция детерминированных синусоидальных возмущений границы раздела двух газов после прохождения через нее ударной волны [6], неустойчивость тангенциального разрыва скоростей для детерминированных синусоидальных [7] и случайных [8] возмущений.

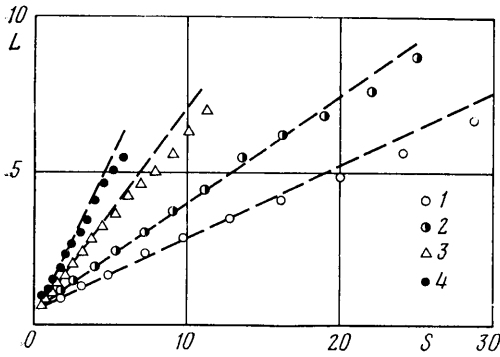
В данной работе рассматриваются три задачи: перемешивание разноплотных газов в поле тяжести, прохождение ударной волны через зону смешения, перемешивание разноплотных газов в существенно неавтономных течениях. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными и с результатами расчетов по одномерной методике [5], в которой для описания турбулентных течений используется полуэмпирическая система уравнений. Эта методика откалибрована по результатам ряда модельных экспериментов.

1. Для моделирования автомодельной задачи о перемешивании двух разноплотных жидкостей в постоянном поле тяжести была проведена серия расчетов, в которых использовалась счетная область в виде квадрата 20×20 см.

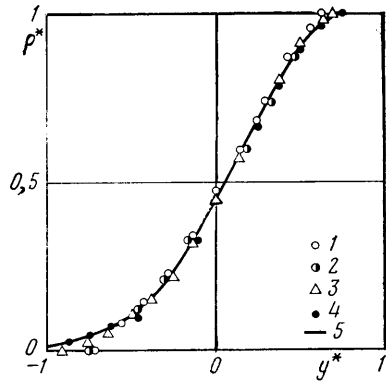
Ускорение силы тяжести было направлено по оси y . При $0 \leq y \leq 10$ плотность газа $\rho_1 = 1$, при $10 < y \leq 20$ $\rho_2 > \rho_1$. Во всех приведенных в работе расчетах газ совершенный, сжимаемый, однако скорость звука достаточно велика, так что эффекты сжимаемости практически исключаются. Размер ячеек в большинстве расчетов $0,2 \times 0,2$ см.

На границе разноплотных жидкостей при $t=0$ задавались случайно распределенные возмущения плотности. В некоторых расчетах для проверки влияния способа задания начальных возмущений вместо возмущений плотности задавались случайно распределенные возмущения скорости.

Была проведена серия расчетов для значений $\delta = \rho_2 / \rho_1 = 3; 7; 20; 70$. В расчетах варьировались значения g ($g=0,1; 1; 10; 100$) для проверки



Фиг. 1



Фиг. 2

того, что реализуется автомодельный режим развития зоны, и способ задания начальных возмущений.

На фиг. 1 приведены зависимости полной ширины зоны смещения от пути торможения $S=0,5gt^2$, полученные в расчетах со значением $g=10$ для $\delta=3,7$ (кривые 1 и 2 соответственно). Там же приведены результаты расчета для $\delta=20,70$ с $g=1$ (кривые 3 и 4).

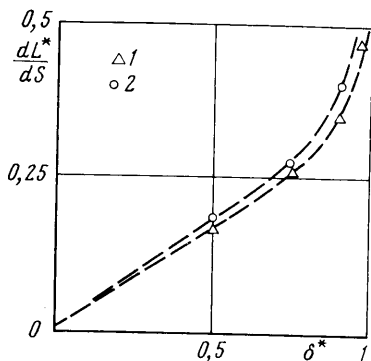
Из фиг. 1 видно, что в полученных расчетных зависимостях можно выделить три основные стадии: начальный этап выхода решения на автомодельный режим; участок автомодельного развития зоны смещения, характеризующийся линейной зависимостью L от S , который продолжается до тех пор, пока ширина зоны не превышает 3–4 см, и, наконец, участок, на котором зависимость $L(S)$ перестает быть автомодельной ($L \gtrsim 3-4$ см), а величина dL/dS уменьшается из-за влияния жестких стенок, вследствие которого обрезается спектр вихрей со стороны больших длин волны. Сравнение расчетов с разными g показывает, что скорость роста зоны dL/dS на линейном участке от g не зависит.

Проводились расчеты, в которых варьировались способы задания начальных возмущений: возмущения плотности в 1-, 2-, 4-х граничных точках и возмущение скорости в граничной точке. Оказалось, что способ задания возмущения в пределах точности расчетов не влияет на величину dL/dS на линейном участке. В совокупности эти данные позволяют считать, что при $L \lesssim 3-4$ см (за исключением начального участка) в расчетах действительно реализуется автомодельный режим развития зоны смещения. Интересным и несколько неожиданным оказалось то, что влияние стенок на скорость развития зоны при $\delta=3; 7$ проявляется уже при сравнительно малой ширине зоны — 20–30% от поперечного размера в задаче. Для проверки этого дополнительно был проведен расчет для $\delta=3$, в котором все размеры и счетные ячейки были уменьшены в 2 раза. В этом расчете отклонения от автомодельного режима начались также при вдвое меньшей ширине зоны $L \sim 1,5-2$ см.

На фиг. 2 приведены полученные в расчетах для $\delta=3; 7; 20; 70$ безразмерные автомодельные профили плотности в зоне смещения $\rho^*(y^*)$ (1–4 соответственно), где $\rho^*=(\rho-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$, $y^*=y/(y_{0,9}-y_{0,1})$. Значение y отсчитывается от положения первоначальной контактной границы, а $y_{0,9}$, $y_{0,1}$ — значения y , в которых ρ^* равно 0,9 и 0,1 соответственно. Для построения этих профилей вначале проводилось усреднение плотности по x , а затем усреднение полученных таким образом на различные моменты времени зависимостей $\rho^*(y)$, приведенных к одинаковой полной ширине зоны смещения. Там же приведен аналогичный профиль, полученный по методике [5], который одинаков для всех δ (кривая 5). Зависимости $\rho^*(y^*)$ в диапазоне $0,07 \leq \rho^* \leq 0,95$ практически одинаковы для $\delta=3; 7; 20; 70$ и близки к приведенному на той же фиг. 2 автомодельному

профилю $\rho^*(y^*)$, получаемому в расчетах по полуэмпирической методике [5] (кривая 5). Некоторые различия между двумерными расчетами и расчетами [5] наблюдаются лишь на обоих краях зоны смешения, причем по мере увеличения δ это различие уменьшается вплоть до практически полного совпадения зависимостей $\rho^*(y^*)$ для $\delta=70$.

Данное обстоятельство связано с тем, что вследствие ограниченных возможностей ЭВМ и из-за наличия в счетной методике аппроксимационной вязкости (коэффициент которой $\mu=0,25\text{при}$) не удалось в расчетах



Фиг. 3

достичь достаточно больших значений числа Рейнольдса. В первом приближении число Рейнольдса равно по порядку величины числу точек в зоне смешения по направлению осредненного течения. Вследствие этого края зоны, которые обусловлены далекими одиночными выбросами струй из зоны смешения, в части расчетов описывались неточно. Причем то, что число Рейнольдса невелико, сказывается в большей степени при малых отношениях плотностей, поскольку отношение инерционного члена $\rho'g$ в уравнении движения к члену, описывающему схемную вязкость, растет с увеличением δ и при достаточно больших значениях δ

становится пропорциональным $\rho' \sim \sqrt{\delta}$, где ρ' — величина пульсаций плотности в зоне.

Отметим, что вследствие невысоких значений числа Рейнольдса в расчетах взаимная «счетная» диффузия веществ занижает величину пульсаций плотности в зоне смешения. Так, во всех расчетах величина относительной интенсивности среднего квадрата пульсаций плотности $R^2 = \langle \rho'^2 \rangle / \rho^2$ была в 1,5–1,7 раза меньше значения $R^2 = (\delta-1)^2 c(1-c) / \delta$, которое было бы при гетерогенном смешении.

В автомодельном режиме ширина зоны смешения зависит от пути торможения: $L^* = F^* \delta^* S$; $\delta^* = (\delta-1) / (\delta+1)$, где L^* — расстояние между точками зоны смешения, в которых $\rho = \rho_1 + 0,1(\rho_2 - \rho_1)$ и $\rho = \rho_1 + 0,9(\rho_2 - \rho_1)$. Величина L^* использована вместо полной ширины зоны смешения для того, чтобы исключить влияние упомянутых выше неточностей в расчетах на краях зоны смешения. Зависимость $F^*(\delta^*)$ приведена на фиг. 3 (кривая 2). Там же приведена аналогичная зависимость, полученная по методике [5] (кривая 1). Отметим, что полная ширина зоны L , полученная в расчетах по методике [5], в 2 раза больше L^* .

Из фиг. 3 видно, что по характеру обе зависимости практически совпадают, но скорость роста dL^*/dS в двумерных расчетах при всех δ в 1,1–1,2 раза больше, чем в [5]. Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса турбулентности, если бы это удалось сделать, возможно, несколько увеличит эту разницу.

Таким образом, проведенные расчеты показали наличие некоторой количественной разницы при развитии зоны смешения в случае двумерной и трехмерной турбулентности. С другой стороны, они предоставили дополнительные факты для проверки правильности описания одномерными методиками типа [5] профиля плотности и характера зависимости скорости роста зоны смешения от δ , поскольку и то и другое определяется крупными вихрями и не должно существенно различаться в двумерном и трехмерном случаях.

2. Для практических применений большой интерес представляет задача о прохождении сильной ударной волны по среде, в которой имеются пульсации плотности. Вследствие рассеяния волны на пульсациях плотности за фронтом волны возникает пульсационное движение, причем

изменение на фронте волны половины среднего квадрата компоненты пульсационной скорости, нормальной к фронту волны, равно

$$\Delta e_1 = \Delta \left(\frac{1}{2} \langle u_1'^2 \rangle \right) = \frac{1}{2} b^2 R^2 (f_1 \Delta u)^2$$

$$R^2 = \frac{\langle \rho'^2 \rangle}{\rho}, \quad f_1 = \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\langle \rho'^n \rangle}{\rho^n}$$

Здесь Δu — приращение массовой скорости на фронте ударной волны, в пределе сильной волны $b=0,5$. Эти выражения легко получить при $R^2 \ll 1$, используя условия сохранения потоков массы энергии и импульса на фронте волны.

Поскольку изменение e_1 на фронте волны в основном обусловлено инерционностью, т. е. тем, что более плотные элементы массы ускоряются до скоростей меньших, а более легкие — больших, чем средняя скорость течения, то можно ожидать, что величины Δe_1 в двумерной и трехмерной задачах будут близки. Но, конечно, закон затухания за фронтом волны в двумерном и трехмерном случаях будет различным.

Для моделирования процесса прохождения ударной волны через разнородную область была проведена серия двумерных расчетов. Была взята прямоугольная счетная область, в которой в группах из четырех точек (квадрат 2×2 точки) случайным образом задавались возмущения плотности ρ' . Отметим, что ввиду особенности разностной схемы (плотность определена в середине ячейки, а скорость — в узлах сетки) задание ρ' в каждой счетной точке привело бы к тому, что величина корреляции между ρ' и пульсацией скорости u' передавалась бы в расчете плохо и соответственно плохо описывалось бы изменение e_1 на фронте волны. По счетной области пропусклась ударная волна. В расчетах варьировались величины $R^2 = \langle \rho' \rho' \rangle / \rho^2$, f_1 , а также амплитуда ударной волны. Значение e_1 перед фронтом волны равнялось нулю, а за фронтом определялось усреднением по пространству по нескольким строкам

$$e_1 = \frac{1}{2} \langle u_1'^2 \rangle = \frac{1}{2} \int (u_1 - \langle u_1 \rangle)^2 ds, \quad \langle u_1 \rangle = \frac{1}{s} \int u ds$$

с дополнительным усреднением e_1 по нескольким моментам времени. При определении f в ряде, входящем в f_1 , учитывались первые 10 членов.

Результаты проведенных расчетов представлены в таблице, где $\langle u_1 \rangle$ —

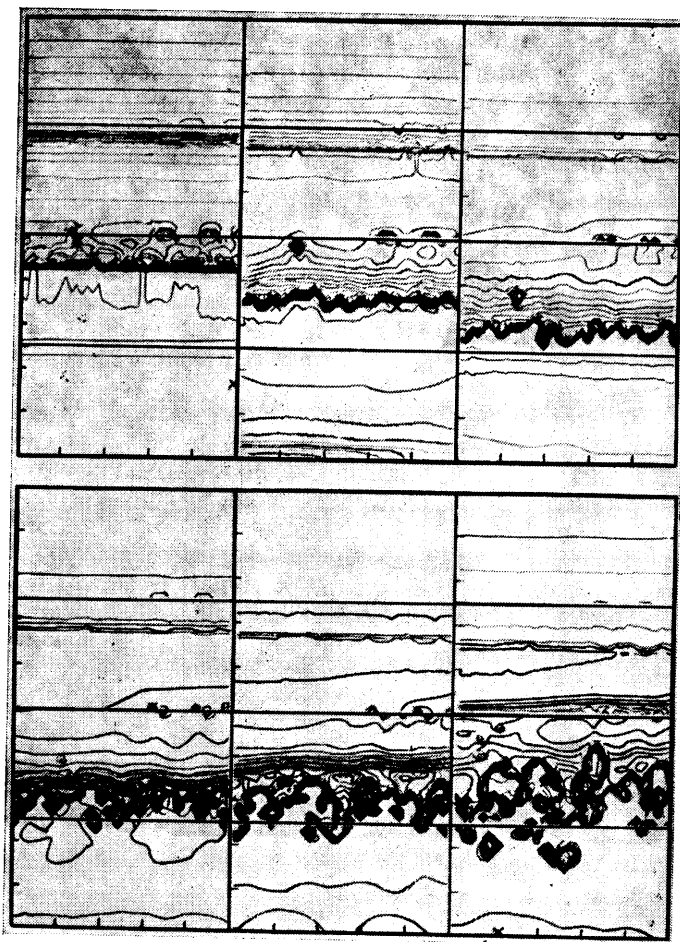
$\langle u_1 \rangle$	R^2	f_1	Δe_1	b
2,43	0,0033	1	0,0028	0,54
2,43	0,03	1,06	0,02	0,45
0,23	0,0033	1	0,000021	0,49
0,446	0,03	1,06	0,0008	0,49

приращение средней массовой скорости на фронте волны, $R^2 = \langle \rho'^2 \rangle / \rho^2$ — относительная интенсивность среднего квадрата пульсации плотности перед фронтом волны. Величина b определялась из соотношения

$$b^2 = \frac{2\Delta e_1}{R^2 (f_1 \langle u_1 \rangle)^2}$$

Полученные в расчетах значения b для различных условий удовлетворительно согласуются с ожидаемым значением $b=0,5$ для сильной ударной волны. Таким образом, в данном случае модель двумерной турбулентности приводит к правильным количественным и качественным результатам.

3. Была сделана попытка применить двумерную методику для расчета реального турбулентного течения, в котором существует и режим, близкий к автомодельному, и прохождение ударной волны через зону смешения. Была проведена серия расчетов, моделирующих течение в одном из экспериментов, описанных в [5]. Расчеты проводились в цилиндрической геометрии, ограниченной радиусами $0 \leq r \leq 10$ см. Граничное



Фиг. 4

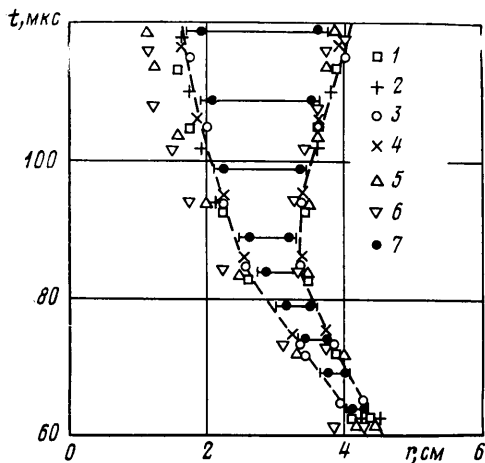
условие на $r=10$ см — жесткая стенка. В области $0 \leq r \leq 6$ см располагался гелий с $\rho_0=0,1663$ г/дм³, а в области $6 < r < 9,5$ см — воздух с $\rho_0=1,205$ г/дм³.

Начальные параметры воздуха и гелия соответствовали их значению при $P=1$ атм и $T=20^\circ$ С. В области $9,5 \leq r \leq 10$ см (газ с $\rho_0=9,6$ г/дм³) задавалось мгновенное энерговыделение, соответствующее экспериментальному. На границе воздуха и гелия задавались случайно распределенные возмущения плотности гелия. Было проведено несколько серий расчетов, в которых варьировалась величина возмущений плотности и размер счетной сетки.

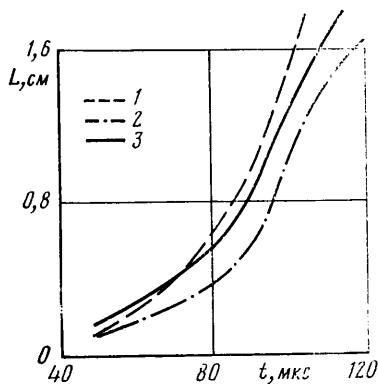
На фиг. 4 проводятся изолинии плотности на несколько моментов времени ($t=62; 73; 84; 94,5; 104,5; 128$ мкс) для одного из расчетов. Из них наглядно видно развитие рассматриваемой турбулентности.

На фиг. 5 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние амплитуды начальных возмущений плотности на величину зоны смешения. В этих расчетах возмущение плотности задавалось в одной гранич-

ной точке гелия размером $h=0,125$ см, а максимальная амплитуда его составляла от средней плотности: 0,5; 2; 5; 10; 20% (точки 1–5). Там же нанесены данные из расчета, в котором возмущение плотности задавалось в двух граничных точках гелия, а его амплитуда составляла 10% от средней плотности (точки 6). Для сравнения приводятся также экспериментальные данные (точки 7). При задании возмущения в одной точке и его амплитудах от 0,5 до 10% ширина зоны смешения практически не зависит от заданного возмущения (штриховыми линиями на фигуре при-



Фиг. 5



Фиг. 6

ведены усредненные по этим расчетам кривые) и согласуется с экспериментом. При больших значениях возмущения (20%) или увеличении ширины начальной зоны смешения (2 точки) скорость роста зоны существенно больше экспериментальной.

Были проведены также расчеты, в которых варьировался размер счетной сетки. Возмущение плотности в этих расчетах также задавалось в одной граничной точке и по максимальной амплитуде равнялось 10% от средней плотности. Тем самым физическая величина возмущения уменьшалась по мере уменьшения размеров счетных точек. Выяснилось, что при таком способе задания начальных возмущений результаты расчетов на различных, но уже достаточно подробных сетках также не отличаются друг от друга.

Таким образом, получаемое в расчетах решение слабо зависит от начальных возмущений в достаточно широком диапазоне их изменения.

Скорость роста полной ширины зоны смешения, полученная в расчетах, оказалась несколько больше, чем в экспериментах. На фиг. 6 приведены зависимости ширины зоны смешения от времени, полученные в расчетах и экспериментах (кривые 1 и 2 соответственно). Наряду с зависимостью $L(t)$, полученной в эксперименте, приведена также полученная из нее зависимость $L(t)$ с введенными поправками на наличие «выступов» и «впадин» на краю зоны (кривая 3), которые при обработке экспериментальных данных усреднялись, что несколько занижало полную ширину зоны. Разница в скорости роста зоны между расчетами и экспериментом наиболее заметна при торможении границы и развитии зоны по инерции ($t \leq 90$ и ≥ 100 соответственно), а приращение же в ширине зоны непосредственно после прихода отраженной волны ($90 \leq t \leq 100$) в расчете и эксперименте близки друг к другу. Это качественно соответствует результатам п. 1 и 2.

4. Приведенные результаты расчетов показывают возможность использования двумерных газодинамических методик для моделирования

турбулентных течений. Однако необходимо иметь в виду, что при использовании двумерных программ, во-первых, моделируется не полностью тот процесс, который имеет место в реальных течениях, а во-вторых, всегда присутствующая в расчетах схемная вязкость может заметно сказываться на получаемых результатах. Поэтому всегда надо проверять, достаточно ли подробна использованная в расчете счетная сетка для того, чтобы реализовались не слишком малые числа Рейнольдса турбулентности по отношению к схемной вязкости.

Из проведенных же на достаточно подробной сетке модельных двумерных расчетов можно, по всей видимости, использовать, в приложении к реальной трехмерной задаче те результаты, которые обусловлены движением в основном крупных вихрей. К таким результатам относятся, например, профиль средней плотности в зоне смешения или характер зависимости скорости развития зоны смешения от отношения плотностей тяжелого и легкого при гравитационном перемешивании. Но скорость роста зоны смешения при гравитационном перемешивании или при развитии ее по инерции после выключения ускорения, а также структура зоны смешения (величина, например, пульсаций плотности или, другими словами, степень гетерогенности в зоне смешения) в двумерном случае будут, вообще говоря, отличаться от имеющих место в трехмерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А., Неуважаев В. Е., Огибина В. Н., Шибаршов Л. И., Яковлев В. Г. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разнородных жидкостей. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 157–160
2. Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Приймак В. Г., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Методы численного моделирования турбулентного течения жидкости в канале. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1981, т. 21, № 3, с. 737–747.
3. Batchelor G. K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, Pt 2, p. 233–239.
4. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Янилкин Ю. В. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 3, с. 566–569.
5. Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И. Экспериментальное исследование и численное моделирование турбулентного перемешивания в одномерных течениях. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 76–82.
6. Бахрах С. М., Гришина Г. А., Ковалев Н. П., Мешков Е. Е., Толшмяков А. И., Янилкин Ю. В. Некоторые вопросы экспериментального и численного исследования тейлоровской неустойчивости. — Числ. методы мех. сплошной среды. Новосибирск, 1979, т. 10, № 1, с. 17–30.
7. Бахрах С. М., Жидов И. Г., Гогачев В. Г., Янилкин Ю. В. Численное исследование неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сжимаемых газах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 2, с. 146–149.
8. Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях. — Числ. методы мех. сплошной среды. Новосибирск, 1983, т. 14, № 2, с. 11–27.

Москва

Поступила в редакцию

17.VIII. 1983