

газов.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1971, с. 86—180.

3. Орленко Л. Р. Структура планетарного пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 270 с.
4. Фирсов П. П., Токарев П. И., Лемзиков В. К. Киносъемка выбросов и схема эксплозивного процесса вулкана Карымского.— Бюл. вулканологических станций, 1978, № 55, с. 152—157.

Москва

Поступила в редакцию  
24.XI.1983

УДК 533.6.011.72

## К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

ШИНДЯПИН Г. П.

Рассматривается численное решение универсальной нелинейной краевой задачи дифракции, возникающей при асимптотическом анализе течения в области больших градиентов параметров вблизи точки пересечения падающей, дифрагированной и отраженной волн в различных задачах взаимодействия слабых ударных волн [1, 2]. Аналитические решения задач такого типа обычно удовлетворяют приближенно условиям на дифрагированном фронте, положение которого заранее не известно и находится вместе с решением задачи. В настоящей работе решение задачи строится численным методом [3], сводящим исходную краевую задачу для системы уравнений коротких волн с неизвестной границей к решению серии краевых задач с фиксированной границей. В качестве приложения решения задачи рассматривается задача дифракции слабой ударной волны на клине с конечным углом раствора. Данные расчета по рассматриваемой асимптотической теории в отличие от теоретических данных [4] значительно лучше согласуются с экспериментальными данными [5].

1. При асимптотическом исследовании различных задач взаимодействия (дифракции, отражения, взаимного проникновения и др.) ударных волн малой интенсивности  $\varepsilon$  [1, 2], где

$$\varepsilon = P_{10} = (p_1 - p_0) / \kappa p_0 = m^{-1} (M_0^2 - 1), \quad m = (\kappa + 1) / 2$$

при конечных углах взаимодействия  $\alpha$  для областей больших градиентов параметров течения в окрестности точек пересечения падающей, дифрагированной и отраженной волн возникает универсальная краевая задача дифракции, характеризующаяся обособленным положением области II (см., например, фиг. 1, а, б). Удобно в общем случае перейти к подвижной полярной системе с центром  $O'$  (фиг. 1, б), движущимся со скоростью однородного потока перед фронтом дифрагированной волны  $AN$ , и осью, направленной на точку  $A$  пересечения фронтов (с углом  $\theta_A^0$  в линейном приближении), и ввести внутренние переменные (индекс соответствует однородному потоку)

$$\frac{u}{a_k} = \varepsilon \mu + \dots, \quad \frac{v}{a_k} = \varepsilon^{1/2} m^{1/2} \nu + \dots, \quad P = \frac{p - p_k}{\kappa p_k} = \varepsilon P^{(1)} + \dots$$

$$R = a_k t r = a_k t (1 + \varepsilon m \delta), \quad \theta = \theta_A^0 + \varepsilon^{1/2} m^{1/2} Y$$

$$\delta = X + Y^2 / 2 \tag{1.1}$$

Анализ общих постановок задач взаимодействия [1, 2] приводит для области II (фиг. 1, в) в переменных (1.1) к постановке краевой задачи для системы нелинейных уравнений коротких волн. Эта задача методом, описанным в [3], может быть преобразована к краевой задаче для давления  $P^{(1)}$  или скорости  $\mu$  для уравнения

$$2(\mu - \delta)\mu_{\delta\delta} + 2\mu_{\delta}^2 - \mu_{\delta} + \mu_{XY} = 0, \quad P^{(1)} = \mu \tag{1.2}$$

с условиями на фронте  $\delta = \delta^*(Y)$  дифрагированной волны  $AN$

$$\mu = 2\delta - \delta'^2$$

$$(5\delta'^2 - 2\delta)\delta'' - (5 + \mu_{\delta})\delta'^2 + 2\delta(1 + \mu_{\delta}) = 0 \tag{1.3}$$

на фронте отраженной волны  $AB$

$$\delta = 1, \quad \mu = 1 \tag{1.4}$$

с асимптотическими условиями сращивания на границе  $CE$  с областью I линейного

решения

$$\mu = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{\gamma - 2\delta}}{Y}$$

$$\delta \rightarrow -\infty, \quad -\infty < Y < \infty, \quad 0 \leq \operatorname{Arctg} [\dots] \leq \pi \quad (1.5)$$

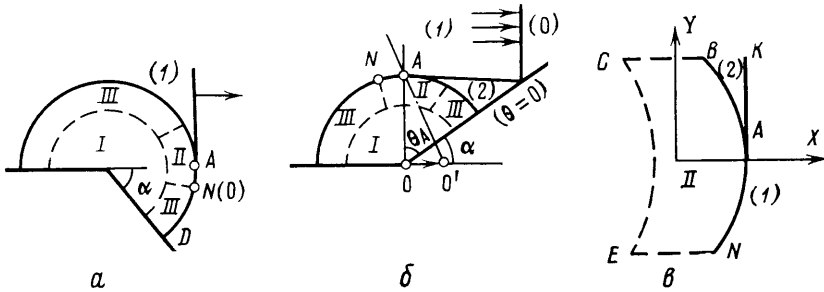
и с асимптотическими условиями сращивания на границах  $CB$ ,  $EN$  с областями III квазиодномерного решения [2] за фронтом отражения и дифрагированной волн

$$\mu = q + K^2(Y) \{1 \mp [1 - (\delta - q)K^{-2}(Y)]^{1/2}\}$$

$$K(Y) = 2^{1/2} (\pi Y)^{-1}, \quad Y \rightarrow \pm \infty, \quad -\infty < \delta \leq \delta^* \quad (1.6)$$

где верхний знак и  $q=1$  берутся на  $CB$ , нижний знак и  $q=0$  — на  $EN$ .

Сформулированная задача универсальна, не зависит от параметров (углов наклона, отношений интенсивностей и т. д.) взаимодействующих волн. В области II уравнение (1.2) является уравнением эллиптического типа, так как для точек области выполняется условие  $\mu > \delta$ .



Фиг. 1

Краевая задача (1.2)–(1.6) решается с помощью численного метода [3], позволяющего свести исходную краевую задачу с неизвестной границей  $AN$  к серии краевых задач с фиксированной границей. Каждая краевая задача серии решается методом конечных разностей с использованием для частных производных аппроксимаций центральными разностями второго порядка точности. Полученная в результате разностной аппроксимации система алгебраических уравнений решается итерационным методом секущих. Аналогично при уточнении положения фронта  $AN$  при численном решении уравнения (1.3) используется метод секущих. В качестве начального приближения для фронта волны  $AN$  выбиралось выражение, содержащее произвольный параметр  $c$

$$\delta = \delta^*(Y) = [2 + c - (1 + 2c)Y + cY^2]^{-1}$$

и удовлетворяющее условиям в точке  $A$  ( $\delta=1$ ,  $\delta'=0$ ,  $Y=1$ ) и приближенным условиям в точке  $B$  ( $\delta=0$ ,  $\delta'=0$ ,  $Y=-H$ ,  $H \gg 1$ ).

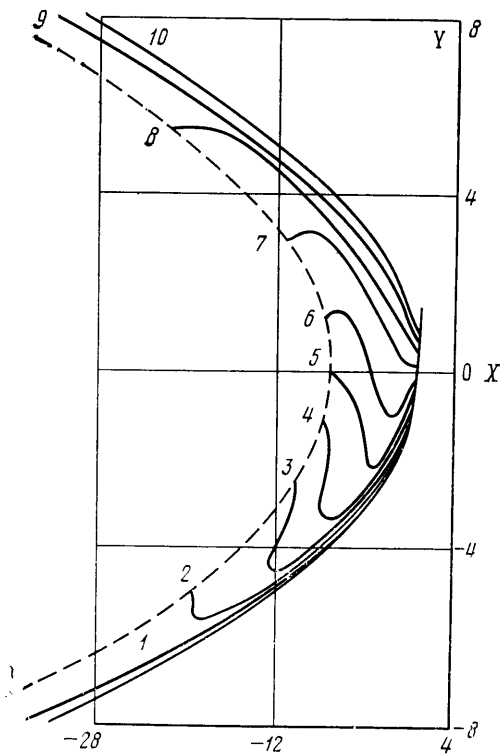
Для нахождения начального приближения решения краевой задачи использовался аналогично [3] метод прямых. На фиг. 2 приведено поле давлений  $P^{(1)} = P^{(1)}(X, Y)$ , полученное в результате численного решения краевой задачи дифракции, кривые  $I-10$  соответствуют значениям  $P^{(1)} = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$ .

Для получения результатов, соответствующих отклонению граничных условий двух последующих краевых задач не более  $3 \cdot 10^{-3}$  на сетке с числом узлов  $115 \times 65$  (при  $c=0,7$ ), потребовалась серия из двух задач.

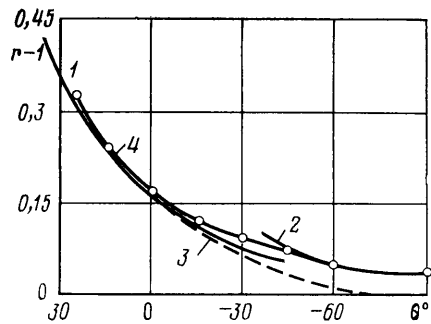
2. В качестве приложения полученное решение использовалось в задаче дифракции слабой ударной волны на клине с конечным углом раствора  $\alpha$  (фиг. 1, а, в). На фиг. 3, 4 (кривые 1) приведены результаты расчета положения фронта дифрагированной волны и давления на этом фронте в исходных переменных (1.1) задача в случае  $\alpha = \pi/2$ ,  $M_0 = 1,2$ . На фиг. 3, 4 (кривые 2) приведены также результаты расчета положения дифрагированного фронта  $ND$  и давления на фронте для области III (фиг. 1, а) квазиодномерного решения [2]

$$r = \frac{R}{a_0 t} = 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 m^2 \Omega^2(\theta), \quad \frac{P}{P_{10}} = P^{(1)} = 3 \varepsilon m \Omega^2(\theta)$$

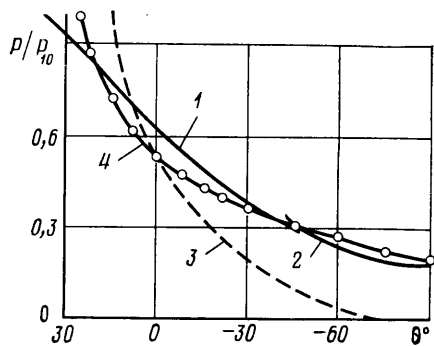
$$\Omega(\theta) = \frac{1}{2(\pi + \alpha)} \frac{\sin \lambda \alpha}{\sin(-1/2 \lambda \theta) \sin 1/2 \lambda (\theta + 2\alpha)}, \quad \lambda = \frac{\pi}{\pi + \alpha}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Сравнение результатов расчета по асимптотической теории (кривые 1, 2) с данными расчета по теории Уингема [4, 5] (пунктирные кривые 3) и экспериментальными данными [5] (кривые 4) показывает, что для слабых ударных волн данные асимптотической теории лучше согласуются с экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Могилевич Л. И., Шиндяпин Г. П. О нелинейной дифракции слабых ударных волн.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3, с. 492—498.
2. Вельмисов П. А., Шиндяпин Г. П. Асимптотические исследования нелинейных взаимодействий слабых ударных волн.— В кн.: Аэродинамика. Вып. 1(4). Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1972, с. 78—93.
3. Шиндяпин Г. П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе.— Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1980, т. 20, № 1, с. 249—254.
4. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Pt 1. Two-dimensional problems.— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, № 2, p. 145—171.
5. Skews B. W. The shape of a shock in regular reflection from a wedge.— CASI Trans., 1972, v. 5, № 1, p. 28—32.

Саратов

Поступила в редакцию  
10.VIII.1983

УДК 536.252

### К ВОПРОСУ О ВИБРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ В НЕВЕСОМОСТИ

БРАВЕРМАН Л. М.

Высокочастотная вибрация полости, содержащей неоднородно нагретую жидкость, приводит в условиях невесомости к появлению в жидкости «медленных» течений с характерным временем, много большим  $1/\Omega$ , где  $\Omega$  — частота вибрации [1, 2]. При определенных условиях возможно механическое «квазиравновесие», т. е.