

Подставляя $\omega = \omega_0 + v^{1/2} \omega_1$ в (5), получим уравнения для определения ω_0 и ω_1 , из которых следует

$$\omega_0^\pm = -\Omega \gamma \pm \sqrt{\Omega^2 \gamma^2 + k g_1 b^{-1} \gamma} \quad (6)$$

$$\omega_1^\pm = \delta(\omega_0^\pm) \left(\mp \Omega \gamma + \frac{k g_1 b^{-1} \gamma + 2 \Omega^2 \gamma^2}{2 \sqrt{k g_1 b^{-1} \gamma + \Omega^2 \gamma^2}} \right)$$

Такое же выражение для ω_0^\pm ранее получено в [2].

Система устойчива при $\Omega^2 b < g$, при этом также выполняется условие $\omega_0^\pm \neq 0 \forall k=1, 2, \dots$, необходимое для самой возможности разложения решения в ряды по степеням параметра $v^{1/2}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $g - \Omega^2 b > 0$. Рассмотрим поведение системы при $\delta \neq 0$. Из (6) видно, что на поверхности жидкости могут существовать две затухающие волны с разными частотами, бегущие по направлению и против вращения цилиндра. Как и во всякой колебательной системе, малая вязкость приводит к затуханию собственных колебаний и к небольшому сдвигу собственных частот. При $\Omega = 0$ поверхностные волны, бегущие по направлению и против часовой стрелки, имеют одинаковые частоты и декременты затухания. По мере роста угловой скорости вращения Ω частоты волн и декременты затухания различаются все больше, причем волна, бегущая по направлению вращения, затухает медленнее, чем волна, бегущая против направления вращения. Формулы (6) теряют справедливость при $\Omega^2 \approx g b^{-1}$, однако при этом система неустойчива и, следовательно, физически не реализуема.

Вид ω_1 также показывает, что наибольшее влияние вязкость оказывает на длинные волны (в коротких волнах движение сосредоточено вблизи свободной поверхности и вязкость влияет на движение за счет условия $\sigma_{r\varphi}(b+\eta) = 0$ в приближении Re^{-1} , а не $\text{Re}^{-1/2}$).

Аналогичное явление — разница в затухании волн, бегущих по направлению и против вращения, — должно иметь место и на сфере.

Расчет, проведенный для системы, близкой по геометрии к экваториальному сечению Земли, покрытой океаном толщиной 10 км, для $k \sim 10$ показывает, что эффекты, связанные с различным затуханием длинных волн, бегущих на запад и на восток, пренебрежимо малы. Однако на быстро вращающихся планетах эти эффекты могут привести к заметной разнице в поведении возмущений, распространяющихся по направлению и против вращения. Так, для параметров $b = 71 \cdot 10^3$ км, $a = 0,5$ в, $\Omega = 1,7 \cdot 10^{-4}$ с $^{-1}$, $g = 25$ м·с $^{-2}$ (очень грубая модель экваториального сечения Юпитера) при $k = 10$ имеем $\omega_1^\pm = \delta(\omega_0^\pm) (9 \mp 1,7) \cdot 10^{-4}$ с $^{-1}$, т. е. разница в затухании заметна. Если скорость вращения близка к критической ($\Omega^2 b \sim g$), то эффект будет максимален.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2. Л.— М.: Гостехиздат, 1948.
2. Габов С. А., Секерж-Зенькович С. Я. Установившиеся волны на поверхности вращающегося цилиндрического слоя жидкости. — Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1976, № 3, с. 65—75.
3. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
24.XI.1983

УДК 533.6.011+536.25

ДРЕЙФ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ГОРЯЧИХ ТЕРМИКОВ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКАХ

АНДРУЩЕНКО В. А., ЧУДОВ Л. А.

С помощью разностной методики, разработанной для расчета трехмерных нестационарных течений вязкого теплопроводного газа, изучено влияние горизонтального стратифицированного по высоте ветра на движение облаков выброса вулканов. Обнаружено, что с увеличением интенсивности воздушного потока и с усилением его стратификации скорость подъема термика уменьшается. Получены данные об особенностях движения образующихся вихревых колец.

1. Опишем кратко постановку задачи и метод решения. Исходная система полных уравнений Навье — Стокса для идеального однокомпонентного газа в декартовых координатах (см. [1]) интегрировалась численно в пространственной области, имею-

щей форму прямоугольного параллелепипеда. Параллелепипед ограничен поверхностью Земли ($z=0$) и пятью подвижными плоскостями: $z=\psi_+(t)$, $x=f_+(t)$, $x=f_-(t)$, $y=\varphi_+(t)$, $y=\varphi_-(t)$, которые перемещались по мере расширения и подъема термика. На поверхности Земли ставились условия непротекания и прилипания $u=v=w=0$ и условие $\partial T/\partial z=0$; на подвижных границах скорость задавалась по формулам, приведенным ниже, а температура равна температуре в невозмущенной экспоненциальной изотермической атмосфере. Начальные условия таковы: во всей счетной области газ или неподвижен, или задан некоторый стационарный воздушный поток, а температура экспоненциально убывает от центра термика (совпадающего в начальный момент с центром счетной области).

Исходная система дифференциальных уравнений аппроксимировалась разностными соотношениями с помощью неявной схемы с расщеплением по функциям и координатам. При этом производные по времени записывались разностями вперед, а пространственные — центральными разностями. На первом этапе на верхний слой $n+1/3$ выносились инерционные и вязкостные члены, содержащие производные по направлению x , а все другие записывались на нижнем слое n . Аналогично при переходе на слой $n+2/3$ наверху брались соответствующие члены по направлению y , а при переходе на слой $n+1$ — по z . Переход на верхний уровень осуществлялся поочередно для каждой искомой функции, а каждая последующая функция находилась с использованием результатов, полученных на предыдущем этапе, что позволяло держать в оперативной памяти ЭВМ только один массив для каждой газодинамической функции. Это дало возможность решать трехмерные задачи на достаточно подробных сетках. В итоге реализация схемы сводилась к последовательному решению скалярных систем алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. (Более подробно механизм расщепления для двумерного случая описан в [2].)

Исходная система приводилась к безразмерному виду и расписывалась с помощью выбранной разностной схемы. Исследования показали, что достаточное условие устойчивости этой схемы имеет вид

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{6\rho \operatorname{Re} h^2}{4 + (|V| \rho \operatorname{Re} h)^2}, \frac{6\gamma \rho \operatorname{Re} \operatorname{Pr} h^2}{4\gamma^2 + (|V| \rho \operatorname{Re} \operatorname{Pr} h)^2} \right\}$$

(обозначения традиционные, h — пространственный шаг сетки).

Расчеты проведены на равномерной сетке ($21 \times 21 \times 21$) на ЭВМ ЕС 1055М.

2. Перейдем к обсуждению результатов расчетов. Пусть на высоте 250 м над поверхностью Земли находится облако горячего газа с температурой, изменяющейся в зависимости от радиуса R по закону

$$T = (T_0 - T_a) \exp(-16R^2) + T_a$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты центра термика.

Были проведены три расчета со значениями определяющих параметров $\operatorname{Re}=100$, $\operatorname{Pr}=1$, $M=0,2$, $\gamma=1,4$ и $T_0=2000$ К, $T_a=288$ К. В первом случае (вариант 1) ветер отсутствует. Во втором случае ветровой поток направлен вдоль оси x , не зависит от x, y , а меняется только по z . При этом профиль скорости аппроксимируется логарифмической (вариант 2) или линейной (вариант 3) зависимостью от z

$$u_b(z) = u_{10} (0,7353 \lg z + 0,2647)$$

$$u_b(z) = u_{10} + (z-10) (60 - u_{10}) / 990$$

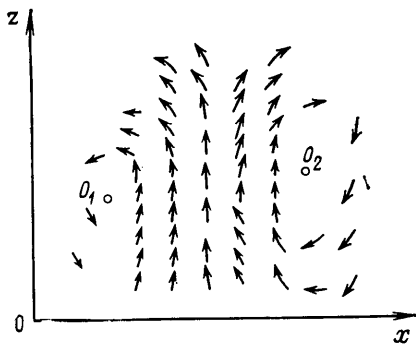
здесь u_{10} — скорость ветра на уровне 10 м от поверхности Земли (u_{10} равно 10 м/с). Такая стратификация выбрана по данным работы [3]. Во втором варианте сдвиг ветра по высоте ≤ 2 м/с на 100 м высоты (так называемый слабый сдвиг).

В варианте 3 сдвиг ветра по вертикали ≈ 6 м/с на 100 м высоты (сильный сдвиг).

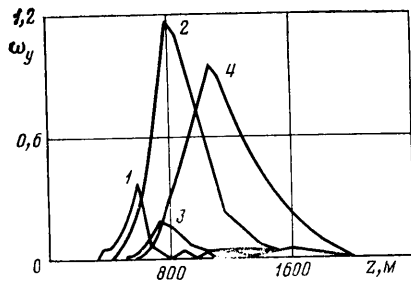
Цель расчетов состояла в определении влияния горизонтальных ветровых потоков с различной стратификацией по высоте на интегральные характеристики подъема и внутреннюю структуру эруптивных облаков, трансформирующихся в процессе движения в вихревые кольца.

Расчеты показали, что под действием сильных горизонтальных воздушных потоков происходит постепенный «перекос» образующегося из термика вихревого тора: его сечение с подветренной стороны отстает в подъеме от противоположного. Как видно из фиг. 1, на которой изображено поле скоростей $(u-u_b, w)$ для варианта 3 в плоскости x, z , проходящей через центр вихревого тора, в момент времени $t=17,25$ с, центры сечений тора O_1 и O_2 смещены относительно друг друга по высоте. На фиг. 2 представлены графики проекции вектора вихря $\operatorname{rot} V$ на направление y (перпендикулярное плоскости x, z) в зависимости от высоты z (для того же варианта). Максимум вихря показывает местоположение ядра вихревого тора, и по нему можно следить за перемещением вихревого тора в пространстве.

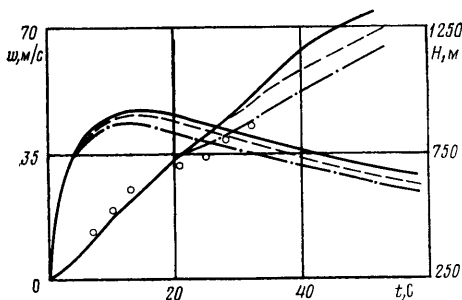
По кривым 1, 2 на фиг. 2 определяется положение центров тора по z соответственно с подветренной и противоположной стороны для момента времени $t=37,6$ с;



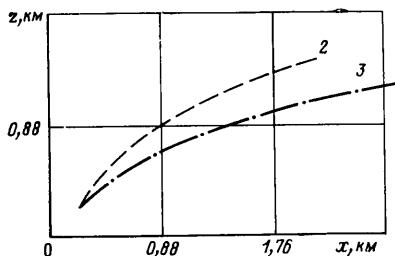
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

разница в высотах составляет 240 м. Максимумы кривых 3, 4 дают положение этих центров для момента времени $t=57,9$ с, здесь разница составляет 350 м. Таким образом, с течением времени «перекос» вихревого кольца увеличивается.

Этот интересный эффект можно объяснить следующим образом. У вихревого тора с подветренной стороны суммарная скорость обтекающего потока и собственная скорость вращения газа, совпадающие по направлению в нижней части тора, больше суммарной скорости обтекания и скорости вращения сверху тора, где они направлены в противоположные стороны. В результате этого возникает вертикальная сила, аналогичная силе Магнуса при обтекании цилиндра, направленная вниз. У противоположного же сечения тора суммарная скорость вниз меньше суммы скоростей сверху, в результате возникает подъемная сила. Суммарное действие этих сил и создает момент, «перекашивающий» вихревой тор. Заметим, что этот эффект проявляется не сразу, а начиная примерно с 17–20 с — времени, когда скорость вращения газа в торе достигла максимальных значений. Эффект «перекоса» наблюдается как для варианта 2 (слабый сдвиг ветрового потока по высоте), так и для варианта 3 (сильный сдвиг). Следует также отметить, что воздействие ветра, как видно из результатов расчетов, приводит к торможению подъема горячего облака как целого.

На фиг. 3 представлены зависимости высоты подъема горячего облака, которая определяется как расстояние точки с максимальной температурой до поверхности Земли, от времени (варианту 1 соответствует сплошная кривая, 2 — штриховая, 3 — штрихпунктирная). Примерно до 20 с эти высоты практически совпадают для всех рассмотренных вариантов, а затем расходятся. При этом (что уже отмечалось выше) высота подъема в отсутствие ветра (вариант 1) наибольшая, а высота в случае ветра большей интенсивности (вариант 3) — наименьшая. Точками на этой же фигуре нанесены высоты подъема эруптивного облака во время извержения вулкана Карым-нанского в 1975 г. (по данным работы [4]). Как видно из графиков, согласие результатов расчета (вариант 3) с натурными наблюдениями удовлетворительное.

На фиг. 3 приведены также величины максимальных вертикальных составляющих скорости ω_{\max} для всех трех случаев.

На фиг. 4 в тех же обозначениях представлены траектории движения точек с максимальной температурой для вариантов 2 и 3. Конечные точки траекторий соответствуют моментам: $t=71,5$ с (для варианта 2) и 57,9 с (для варианта 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
2. Полежаев В. И. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и

газов.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1971, с. 86—180.

3. Орленко Л. Р. Структура планетарного пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1979, 270 с.
4. Фирсов П. П., Токарев П. И., Лемзиков В. К. Киносъемка выбросов и схема эксплозивного процесса вулкана Карымского.— Бюл. вулканологических станций, 1978, № 55, с. 152—157.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1983

УДК 533.6.011.72

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

ШИНДЯПИН Г. П.

Рассматривается численное решение универсальной нелинейной краевой задачи дифракции, возникающей при асимптотическом анализе течения в области больших градиентов параметров вблизи точки пересечения падающей, дифрагированной и отраженной волн в различных задачах взаимодействия слабых ударных волн [1, 2]. Аналитические решения задач такого типа обычно удовлетворяют приближенно условиям на дифрагированном фронте, положение которого заранее не известно и находится вместе с решением задачи. В настоящей работе решение задачи строится численным методом [3], сводящим исходную краевую задачу для системы уравнений коротких волн с неизвестной границей к решению серии краевых задач с фиксированной границей. В качестве приложения решения задачи рассматривается задача дифракции слабой ударной волны на клине с конечным углом раствора. Данные расчета по рассматриваемой асимптотической теории в отличие от теоретических данных [4] значительно лучше согласуются с экспериментальными данными [5].

1. При асимптотическом исследовании различных задач взаимодействия (дифракции, отражения, взаимного проникновения и др.) ударных волн малой интенсивности ε [1, 2], где

$$\varepsilon = P_{10} = (p_1 - p_0) / \kappa p_0 = m^{-1} (M_0^2 - 1), \quad m = (\kappa + 1) / 2$$

при конечных углах взаимодействия α для областей больших градиентов параметров течения в окрестности точек пересечения падающей, дифрагированной и отраженной волн возникает универсальная краевая задача дифракции, характеризующаяся обозначенным положением области II (см., например, фиг. 1, а, б). Удобно в общем случае перейти к подвижной полярной системе с центром O' (фиг. 1, б), движущимся со скоростью однородного потока перед фронтом дифрагированной волны AN , и осью, направленной на точку A пересечения фронтов (с углом θ_A^0 в линейном приближении), и ввести внутренние переменные (индекс соответствует однородному потоку)

$$\frac{u}{a_k} = \varepsilon \mu + \dots, \quad \frac{v}{a_k} = \varepsilon^{1/2} m^{1/2} \nu + \dots, \quad P = \frac{p - p_k}{\kappa p_k} = \varepsilon P^{(1)} + \dots$$

$$R = a_k t r = a_k t (1 + \varepsilon m \delta), \quad \theta = \theta_A^0 + \varepsilon^{1/2} m^{1/2} Y$$

$$\delta = X + Y^2 / 2 \tag{1.1}$$

Анализ общих постановок задач взаимодействия [1, 2] приводит для области II (фиг. 1, в) в переменных (1.1) к постановке краевой задачи для системы нелинейных уравнений коротких волн. Эта задача методом, описанным в [3], может быть преобразована к краевой задаче для давления $P^{(1)}$ или скорости μ для уравнения

$$2(\mu - \delta)\mu_{\delta\delta} + 2\mu_{\delta}^2 - \mu_{\delta} + \mu_{XY} = 0, \quad P^{(1)} = \mu \tag{1.2}$$

с условиями на фронте $\delta = \delta^*(Y)$ дифрагированной волны AN

$$\mu = 2\delta - \delta'^2$$

$$(5\delta'^2 - 2\delta)\delta'' - (5 + \mu_{\delta})\delta'^2 + 2\delta(1 + \mu_{\delta}) = 0 \tag{1.3}$$

на фронте отраженной волны AB

$$\delta = 1, \quad \mu = 1 \tag{1.4}$$

с асимптотическими условиями сращивания на границе CE с областью I линейного