ЛИТЕРАТУРА

1. *Полищук Г. И.* О методе функции Грина в теории акустического ветра.— Акуст. журн., 1982. т. 28, № 2, с. 271—278.
2. *Yamamoto K., Iwamura N.* Flow with convective acceleration through a porous medium.— J. Eng. Math., 1976, v. 10, № 1, p. 41—54.
3. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1965. 553 p. (Рус. перев.: Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.)

Ленинград

Поступила в редакцию
6.XII.1983

УДК 532.592

О ВЛИЯНИИ ВРАЩЕНИЯ НА ЗАТУХАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

НЕСТЕРОВ А. В.

Изучаются колебания свободной поверхности цилиндрического слоя вязкой несжимаемой жидкости, притянутой силой тяжести к твердому равномерно вращающемуся цилиндру. В предположении больших чисел Рейнольдса найдены логарифмические декременты затухания поверхностных гравитационных волн. Показано, что вращение вносит несимметрию в затухание волн, бегущих по направлению и против вращения жидкости.

Слой жидкости, притянутый к твердому цилиндру силой тяжести, равномерно вращается вместе с цилиндром вокруг продольной оси z с угловой скоростью Ω. Радиус цилиндра равен a, радиус невозмущенной поверхности жидкости равен b. Жидкость предполагается вязкой и несжимаемой. Требуется найти логарифмический декремент затухания поверхностных гравитационных волн бесконечно малой амплитуды в приближении больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=\lambda c/2\pi\nu\gg 1$.

Запишем уравнения Навье – Стокса и граничные условия

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\mathbf{g}(\mathbf{r})+\nu\Delta\mathbf{v},\qquad (\nabla\mathbf{v})=0$$

$$r=a:\quad \mathbf{v}=[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{a}]$$

$$r=b+\eta:\qquad \sigma_{r\varphi}=0,\qquad p=p_0,\qquad \frac{d\eta}{dt}=v_r$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости, p – давление, $\rho=\mathrm{const}$ – плотность (в дальнейшем положим для краткости $\rho=1$), $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ – ускорение силы тяжести, ν – кинематический коэффициент вязкости, $\sigma_{r\varphi}$ – тензор касательных напряжений, η – возвышение поверхности жидкости над невозмущенным уровнем.

Перейдем во вращающуюся систему координат, жестко связанную с цилиндром, и исключим статическое давление. Тогда для волн бесконечно малой амплитуды система уравнений и граничные условия примут вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p_1-2[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}]+\nu\Delta\mathbf{v},\qquad (\nabla\mathbf{v})=0$$

$$r=a:\quad v=0$$

$$r=b:\qquad \sigma_{r\varphi}=0,\qquad p_1=g_1\eta,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=v_r$$

$$g_1=g(b)-\Omega^2 b$$

$$p=p_1+\left(\int\limits_r^b g(s)\,ds+\frac{1}{2}\Omega^2(r^2-b^2)\right)+p_0$$

Считая (пока формально) ν малым параметром, ищем решение уравнений в соответствии с формализмом погранслойного метода в виде

$$\mathbf{v}=\nabla\Phi(r,\ \varphi)+\nabla^*(\Psi(r,\ \varphi)+\Pi(\xi,\ \varphi))\tag{1}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{n}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \rho}\mathbf{n}_\varphi, \qquad \nabla^* = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{n}_r - \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{n}_\varphi, \qquad \xi = \frac{r-a}{\sqrt{\nu}}$$

В представлении (1) потенциальная и вихревая части течения $\nabla\Phi$ и $\nabla^*\Psi$ в пределе при $\nu\to 0$ переходят в соответствующие выражения для идеальной жидкости, погранслойная часть $\nabla^*\Pi$ отражает влияние малой вязкости в окрестности твердой границы. Поскольку ν размерно, то в дальнейшем будет указан точный смысл малости ν.

Подставляя (1) в уравнения и стандартным образом разделяя вихревую и потенциальную части, получим

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\frac{\partial(\Psi+\Pi)}{\partial t} - 2\Omega\Phi - \nu\Delta(\Psi+\Pi) = 0$$

При условии, что собственные частоты колебаний системы при $\nu=0$ отличны от нуля, можно искать Φ, Ψ и Π в виде рядов по степеням малого параметра $\nu^{1/2}$. Подставляя $\Phi=\Phi_0+\nu^{1/2}\Phi_1+\ldots$, $\Psi=\Psi_0+\nu^{1/2}\Psi_1+\ldots$, $\Pi=\Pi_0+\nu^{1/2}\Pi_1+\ldots$ в уравнения и приравнивая во втором нулю отдельно выражения, зависящие от (r,φ) и (ξ,φ), получим уравнения для определения Φ_i, Ψ_i и Π_i. Удержим лишь члены порядка $O(\nu^0)$ и $O(\nu^{1/2})$.

Функции Φ_i, Ψ_i и Π_i $(i=0,1)$ определяются из системы уравнений

$$\Delta\Phi_i = 0, \qquad \frac{\partial\Psi_i}{\partial t} = 2\Omega\Phi_i, \qquad \frac{\partial\Pi_i}{\partial t} - \frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2} = 0 \qquad (i=0,1) \tag{2}$$

В дальнейшем везде также будем удерживать члены, имеющие порядок малости не выше $\nu^{1/2}$.

Поскольку $\sigma_{r\varphi}=O(\nu)$, то условие $\sigma_{r\varphi}(b)=0$ можно опустить в соответствии со сказанным выше. Остальные принимают вид

$$r=a:\quad \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\Psi+\Pi)}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\Psi+\Pi)}{\partial r} = 0$$

$$r=b:\quad -\frac{1}{g_1}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right) \tag{3}$$

$$\xi\to\infty:\quad \Pi(\xi)\to 0$$

Первые два условия выражают равенство нулю скорости жидкости на твердой поверхности, третье – динамическое условие на свободной поверхности жидкости, четвертое погранслойный характер влияния вязкости в окрестности твердой поверхности. Решение системы уравнений (2) с условиями (3) ищем в виде

$$\Phi = \Phi(r)\exp i(\omega t - k\varphi), \qquad \Psi = \Psi(r)\exp i(\omega t - k\varphi)$$

$$\Pi = \Pi(\xi)\exp i(\omega t - k\varphi) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Из уравнений и условий для Φ_i, Ψ_i, Π_i получаем

$$\Phi(r) = Ar^k + Br^{-k}, \qquad \Psi(r) = \frac{2\Omega}{i\omega}(Ar^k + Br^{-k})$$

$$\Pi(\xi) = C\exp(-\sqrt{i\omega}\,\xi) \tag{4}$$

$$A = A_0+\nu^{1/2}A_1, \quad B = B_0+\nu^{1/2}B_1, \quad C = C_0+\nu^{1/2}C_1, \quad \omega = \omega_0+\nu^{1/2}\omega_1$$

В выражении $\sqrt{i\omega}$ выбираем ветвь корня с положительной вещественной частью, что обеспечивает выполнение последнего условия в (3).

Подставляя (4) в (3), получим систему линейных уравнений относительно A, B и C. Приравняв нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение. После несложных преобразований оно приводится к виду

$$\omega^2 + 2\Omega\gamma(1+\delta)\omega - kg_1b^{-1}\gamma(1+\delta) = 0 \tag{5}$$

$$\delta(\omega) = \frac{i-1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}(\gamma^{-1}-\gamma), \qquad \mathrm{Re} = \frac{a^2\omega}{k^2\nu} = \frac{\lambda c}{2\pi\nu}, \qquad \gamma = \frac{(b/a)^{2k}-1}{(b/a)^{2k}+1} > 0$$

Теперь малость ν имеет физический смысл: ν должно удовлетворять неравенству $\mathrm{Re}\gg 1$.

Подставляя $\omega=\omega_0+\nu^{1/2}\omega_1$ в (5), получим уравнения для определения ω_0 и ω_1, из которых следует

$$\omega_0{}^{\pm}=-\Omega\gamma\pm\sqrt{\Omega^2\gamma^2+kg_1b^{-1}\gamma} \tag{6}$$

$$\omega_1{}^{\pm}=\delta(\omega_0{}^{\pm})\left(\mp\Omega\gamma+\frac{kg_1b^{-1}\gamma+2\Omega^2\gamma^2}{2\sqrt{kg_1b^{-1}\gamma+\Omega^2\gamma^2}}\right)$$

Такое же выражение для $\omega_0{}^{\pm}$ ранее получено в [2].

Система устойчива при $\Omega^2b<g$, при этом также выполняется условие $\omega_0{}^{\pm}\neq\neq0$ $\forall k=1, 2, \ldots$, необходимое для самой возможности разложения решения в ряды по степеням параметра $\nu^{1/2}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $g-\Omega^2b>0$. Рассмотрим поведение системы при $\delta\neq0$. Из (6) видно, что на поверхности жидкости могут существовать две затухающие волны с разными частотами, бегущие по направлению и против вращения цилиндра. Как и во всякой колебательной системе, малая вязкость приводит к затуханию собственных колебаний и к небольшому сдвигу собственных частот. При $\Omega=0$ поверхностные волны, бегущие по направлению и против часовой стрелки, имеют одинаковые частоты и декременты затухания. По мере роста угловой скорости вращения Ω частоты волн и декременты затухания различаются все больше, причем волна, бегущая по направлению вращения, затухает медленнее, чем волна, бегущая против направления вращения. Формулы (6) теряют справедливость при $\Omega^2\gtrsim gb^{-1}$, однако при этом система неустойчива и, следовательно, физически не реализуема.

Вид ω_1 также показывает, что наибольшее влияние вязкость оказывает на длинные волны (в коротких волнах движение сосредоточено вблизи свободной поверхности и вязкость влияет на движение за счет условия $\sigma_{r\varphi}(b+\eta)=0$ в приближении Re^{-1}, а не $\mathrm{Re}^{-1/2}$).

Аналогичное явление – разница в затухании волн, бегущих по направлению и против вращения,– должно иметь место и на сфере.

Расчет, проведенный для системы, близкой по геометрии к экваториальному сечению Земли, покрытой океаном толщиной 10 км, для $k\sim10$ показывает, что эффекты, связанные с различным затуханием длинных волн, бегущих на запад и на восток, пренебрежимо малы. Однако на быстро вращающихся планетах эти эффекты могут привести к заметной разнице в поведении возмущений, распространяющихся по направлению и против вращения. Так, для параметров $b=71\cdot10^3$ км, $a=0{,}5$ в, $\Omega==1{,}7\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$, $g=25$ м$\cdot$с$^{-2}$ (очень грубая модель экваториального сечения Юпитера) при $k=10$ имеем $\omega_1{}^{\pm}=\delta(\omega_0{}^{\pm})(9\mp1{,}7)\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$, т. е. разница в затухании заметна. Если скорость вращения близка к критической ($\Omega^2b\sim g$), то эффект будет максимален.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2. Л.— М.: Гостехиздат, 1948.
2. *Габов С. А., Секерж-Зенькович С. Я.* Установившиеся волны на поверхности вращающегося цилиндрического слоя жидкости.— Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1976, № 3, с. 65—75.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Обнинск

Поступила в редакцию 24.XI.1983

УДК 533.6.011+536.25

ДРЕЙФ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ГОРЯЧИХ ТЕРМИКОВ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКАХ

АНДРУЩЕНКО В. А., ЧУДОВ Л. А.

С помощью разностной методики, разработанной для расчета трехмерных нестационарных течений вязкого теплопроводного газа, изучено влияние горизонтального стратифицированного по высоте ветра на движение облаков выброса вулканов. Обнаружено, что с увеличением интенсивности воздушного потока и с усилением его стратификации скорость подъема термика уменьшается. Получены данные об особенностях движения образующихся вихревых колец.

1. Опишем кратко постановку задачи и метод решения. Исходная система полных уравнений Навье – Стокса для идеального однокомпонентного газа в декартовых координатах (см. [1]) интегрировалась численно в пространственной области, имею-