Физический смысл условия (3) таков: когда $X_1>0$, ось вихря отталкивающая, когда $X_1=0$, ось вращения — притягивающая.

Все точки линии N, кроме точки с координатами $(0,\ 0,\ n/q)$, неустойчивы. Эта точка может быть устойчивой или неустойчивой в зависимости от выполнения условия (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И.* Движение мелких частиц в закрученном потоке.— Инж.-физ. журн., 1960, т. 3, № 2. с. 17—24.
2. *Burgers J. M.* A mathematical model illustating the theory of turbulence.— Adv. in Appl. Mech., 1948, v. 1, p. 171—199.
3. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
4. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

Москва

Поступила в редакцию 8.IX.1982

УДК 532.546

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ПОЛИЩУК Г. И., ПОЛИЩУК Т. Г.

Построено фундаментальное решение системы уравнений, описывающих медленное протекание несжимаемой вязкой жидкости сквозь пористый материал под действием поля объемных сил.

В теории фильтрации обычно рассматривается движение жидкости, порожденное гравитационными силами. Но фильтрационное течение можно вызывать (или интенсифицировать), воздействуя на жидкость полем объемных сил различной природы. Один из способов создания такого поля — облучение жидкости звуком [1].

Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в изотропной среде с высокой пористостью (близкой к единице) имеют следующий вид [2]:

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p-\frac{\mu}{k}\mathbf{u}+\mu\nabla^2\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

Здесь $\mathbf{u}$ — локальная скорость установившегося течения жидкости сквозь пористую среду (по определению это вектор, который имеет компоненты, равные объемному потоку жидкости на единицу площади через три плоские элемента поверхности, перпендикулярные к координатным осям; при этом линейные размеры элементов много больше характерного размера пор); p — локальное давление (т. е. среднее значение давления по некоторому объему жидкости, большому по сравнению с размерами пор, но малому по сравнению с характерным масштабом всего течения); ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость; k — проницаемость пористого материала; ∇ — оператор Гамильтона.

Предположив, что течение жидкости обусловлено некоторым стационарным полем объемных сил $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ — точка пространства, и характеризуется малыми значениями числа Рейнольдса, систему уравнений (1) в декартовой системе координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ можно представить в следующем виде:

$$\mu\left(\nabla^2-\frac{1}{k}\right)u_j-\frac{\partial p}{\partial x_j}+F_j=0 \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0, \qquad j=1,2,3 \tag{2}$$

Здесь индексом j отмечены проекции векторов на ось x_j.

Если силовое поле точечное, т. е. $F_j=\delta(\mathbf{x})f_j$, где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака, то применение к системе уравнений (2) преобразования Фурье

$$\Phi[g(\mathbf{x})]\equiv G(\omega)\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\mathbf{x})e^{i\omega\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}$$

где $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$, а $g(\mathbf{x})$ — функция пространственной координаты $\mathbf{x}$, дает

$$(\omega^2+1/k)\mu U_j(\omega)-i\omega_jP(\omega)=f_j;\qquad \omega_jU_j(\omega)=0$$

Здесь введено обозначение $\omega^2=\omega_j^2$. В результате имеем

$$P(\omega)=\frac{i}{\omega^2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{f};\qquad U_j(\omega)=\frac{\omega^2 f_j-\omega_j\omega_n f_n}{\omega^2\mu(\omega^2+1/k)} \tag{3}$$

К системе уравнений (3) следует применить обратное преобразование Фурье Φ^{-1} и при этом воспользоваться равенством

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+a^2}\right]=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ax}}{x}$$

Справедливость последнего можно доказать, произведя вычисления соответствующего интеграла в сферической системе координат с осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{x}$, и используя следующее тождество:

$$\int_0^\infty \frac{z\sin(mz)}{z^2+b^2}\,dz=\frac{\pi}{2}e^{-mb},\qquad b\geqslant 0,\qquad m>0$$

В итоге получается фундаментальное решение системы (2)

$$u_j(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\mu}\left[f_j\frac{e^{-\varkappa x}}{x}+\frac{1}{\varkappa^2}f_m\frac{\partial^2}{\partial x_m\,\partial x_j}\left(\frac{1-e^{-\varkappa x}}{x}\right)\right]$$

$$p(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}(\mathbf{f}\cdot\nabla)\frac{1}{x};\qquad \varkappa=\frac{1}{\sqrt{k}} \tag{4}$$

Равенство (4) после элементарных тождественных преобразований может быть записано в следующем виде:

$$u_j(\mathbf{x})=\frac{f_m}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta_{mj}}{x^3}\frac{(1+\varkappa x+\varkappa^2x^2)e^{-\varkappa x}-1}{\varkappa^2}-\frac{x_m x_j}{x^5}\frac{(3+3\varkappa x+\varkappa^2x^2)e^{-\varkappa x}-3}{\varkappa^2}\right] \tag{5}$$

При $\varkappa\to 0$ (т. е. проницаемость материала $k\to\infty$) из формулы (5) получается известное выражение для компонент скорости потока, создаваемого точечной силой в свободной жидкости [3]

$$u_j(\mathbf{x})=\frac{f_m}{8\pi\mu}\left(\frac{\delta_{mj}}{x}+\frac{x_m x_j}{x^3}\right)$$

В сферической системе координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$, ось которой ориентирована по силе $\mathbf{f}$, локальная скорость $\mathbf{u}$ будет иметь следующие радиальную u_r и меридиональную u_θ компоненты:

$$u_r=\frac{f}{2\pi\mu}\cdot\frac{\cos\theta}{\varkappa^2r^3}[1-e^{-\varkappa r}(1+\varkappa r)]$$

$$u_\theta=\frac{f}{4\pi\mu}\cdot\frac{\sin\theta}{\varkappa^2r^3}[1-e^{-\varkappa r}(1+\varkappa r+\varkappa^2r^2)] \tag{6}$$

Используя связь между функцией тока Стокса ψ и локальной скоростью

$$\mathbf{u}=-\nabla\times(\psi\nabla\varphi)$$

можно найти вид функции тока ψ, соответствующей течению (6)

$$\psi_\varkappa=-\frac{f}{4\pi\mu\varkappa^2}\frac{\sin^2\theta}{r}[1-e^{-\varkappa r}(1+\varkappa r)]$$

Отсюда при $\varkappa\to 0$ (проницаемость материала $k\to\infty$) как предельный случай получается известное выражение для функции тока течения, вызываемого в свободном жидком пространстве точечной силой $\mathbf{f}$, действующей в начале координат и ориентированной в направлении $\theta=0$ [3]:

$$\psi_0=-f\frac{r\sin^2\theta}{8\pi\mu}$$

Построенное фундаментальное решение может быть использовано при расчете движения жидкости в пористом материале под действием силовых полей различной природы и конфигурации. В частности, по аналогии с работой [1] могут быть рассчитаны течения, вызываемые в ограниченной пористой среде звуковыми полями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полищук Г. И.* О методе функции Грина в теории акустического ветра.— Акуст. журн., 1982. т. 28, № 2, с. 271—278.
2. *Yamamoto K., Iwamura N.* Flow with convective acceleration through a porous medium.— J. Eng. Math., 1976, v. 10, № 1, p. 41—54.
3. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1965. 553 p. (Рус. перев.: Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.)

Ленинград

Поступила в редакцию
6.XII.1983

УДК 532.592

О ВЛИЯНИИ ВРАЩЕНИЯ НА ЗАТУХАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

НЕСТЕРОВ А. В.

Изучаются колебания свободной поверхности цилиндрического слоя вязкой несжимаемой жидкости, притянутой силой тяжести к твердому равномерно вращающемуся цилиндру. В предположении больших чисел Рейнольдса найдены логарифмические декременты затухания поверхностных гравитационных волн. Показано, что вращение вносит несимметрию в затухание волн, бегущих по направлению и против вращения жидкости.

Слой жидкости, притянутый к твердому цилиндру силой тяжести, равномерно вращается вместе с цилиндром вокруг продольной оси z с угловой скоростью Ω. Радиус цилиндра равен a, радиус невозмущенной поверхности жидкости равен b. Жидкость предполагается вязкой и несжимаемой. Требуется найти логарифмический декремент затухания поверхностных гравитационных волн бесконечно малой амплитуды в приближении больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=\lambda c/2\pi\nu\gg 1$.

Запишем уравнения Навье – Стокса и граничные условия

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\mathbf{g}(\mathbf{r})+\nu\Delta\mathbf{v},\qquad (\nabla\mathbf{v})=0$$

$$r=a:\quad \mathbf{v}=[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{a}]$$

$$r=b+\eta:\qquad \sigma_{r\varphi}=0,\qquad p=p_0,\qquad \frac{d\eta}{dt}=v_r$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости, p – давление, $\rho=\mathrm{const}$ – плотность (в дальнейшем положим для краткости $\rho=1$), $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ – ускорение силы тяжести, ν – кинематический коэффициент вязкости, $\sigma_{r\varphi}$ – тензор касательных напряжений, η – возвышение поверхности жидкости над невозмущенным уровнем.

Перейдем во вращающуюся систему координат, жестко связанную с цилиндром, и исключим статическое давление. Тогда для волн бесконечно малой амплитуды система уравнений и граничные условия примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p_1-2[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}]+\nu\Delta\mathbf{v},\qquad (\nabla\mathbf{v})=0$$

$$r=a:\quad v=0$$

$$r=b:\qquad \sigma_{r\varphi}=0,\qquad p_1=g_1\eta,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=v_r$$

$$g_1=g(b)-\Omega^2 b$$

$$p=p_1+\left(\int\limits_r^b g(s)\,ds+\frac{1}{2}\Omega^2(r^2-b^2)\right)+p_0$$

Считая (пока формально) ν малым параметром, ищем решение уравнений в соответствии с формализмом погранслойного метода в виде

$$\mathbf{v}=\nabla\Phi(r,\ \varphi)+\nabla^*(\Psi(r,\ \varphi)+\Pi(\xi,\ \varphi))\qquad(1)$$