Общее решение (4.1) совпадает с (2.4), если положить

$$\lambda^2=-\alpha^2-\alpha RYE_1/E_2 \qquad (4.2)$$

Величины λ_n определяются выражениями (2.6), а Y_n – (4.2). Тогда для любого конечного n при $\alpha\to\infty$ $Y_n\to-\alpha E_2/RE_1$. Полученная оценка отличается от ньютоновской жидкости только множителем E_2/E_1.

Выражения для спектра возмущений течения вязкоупругой жидкости Максвелла ($\gamma_2=0$ в (1.1)) при $\alpha\to0$ и $R\to0$ можно получить из (2.16), (2.17) и (3.1), (3.2), если подставить $E_2=0$. При этом условие (2.10) переходит в условие

$$\lambda_n^2<-\alpha^2+1/4E_1$$

Проведенное исследование подтвердило предположение о значительной перестройке спектра малых возмущений вязкоупругих жидкостей. Так, для любого значения параметра упругости E_1 существует такой номер моды, начиная с которого все X_n имеют порядок $1/\alpha R$ при $\alpha\to0$ и $R\to0$, тогда как для ньютоновских жидкостей все $X_n\sim1$. Следовательно, в достаточно упругой покоящейся жидкости малые возмущения могут затухать в виде бегущих волн в разных направлениях от места возмущения (формулы (2.12), (2.17)), тогда как в покоящейся ньютоновской жидкости все возмущения затухают монотонно [5].

Полученные оценки для Y_n не зависят от профиля скорости $U(y)$ и могут быть использованы для нумерации собственных значений c_n. Также оценки для X_n и Y_n можно взять в качестве начальных при численных расчетах спектра методом непрерывного перехода по α от $\alpha\ll1$ к $\alpha\sim1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилипенко В. Н.* Влияние добавок на пристенные турбулентные течения.— Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Мех. жидкости и газа, 1980, т. 15, с. 156–257.
2. *Кирейко Г. В., Пилипенко В. Н.* Устойчивость течения вязкоупругой жидкости в плоском канале.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 3, с. 569—573.
3. *Porteous K. C., Denn M. M.* Linear stability of plane Poiseuille flow of viscoelastic liquids.— Trans. Soc. Rheol., 1972, v. 16, № 2, p. 295—308.
4. *Kundu P. K.* Small disturbance stability of plane Poiseuille flow of Oldroyd fluid.— Phys. Fluids, 1972, v. 15, № 7, p. 1207—1212.
5. *Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса.— ПММ, 1965, т. 29, № 1, с. 88—98.
6. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1983

УДК 532.529

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ

МОСКАЛЕВ А. М.

Рассматривается движение мелких сферических частиц в заданном стационарном вихревом потоке несжимаемой жидкости. Представлены результаты исследования на устойчивость по Ляпунову траектории частицы, совпадающей с осью вихря, и траекторий, расстояние от которых до оси вихря определяется условием равенства радиальных компонент силы взаимодействия фаз и центробежной силы, действующей на частицу.

В ряде работ (например, [1]), посвященных исследованию осесимметричного стационарного течения дисперсной смеси с направленной к оси вихря радиальной составляющей скорости несущей среды, были получены траектории частиц, расстояние от которых до оси вихря определяется условием равенства радиальных компонент силы взаимодействия фаз и центробежной силы, действующей на частицы.

Ниже представлены результаты исследования устойчивости по Ляпунову аналогичных траекторий в случае, когда объемная плотность частиц ρ_s мала. Частицы предполагаются твердыми сферами малого радиуса R_s с постоянной плотностью ρ_s°. Несущая среда – вязкая несжимаемая жидкость с плотностью ρ°. Предполагается отсутствие взаимодействия между частицами, а также потоков тепла и сил, обусловленных внешними источниками. Сила трения между фазами считается стоксовской. Движение рассматривается в неограниченном пространстве.

Из сделанных предположений следует, что влиянием частиц на движение жидкости можно пренебречь. Поток жидкости в цилиндрических координатах r, θ, z описывается решением уравнения Навье – Стокса, полученным Бюргерсом для стационарного осесимметричного вихревого течения несжимаемой жидкости [2]

$$u=-ar, \qquad v=\Gamma f(r)/r, \qquad w=2az$$
$$f(r)=1-\exp(-dr^2), \qquad a=\text{const}>0$$
$$\Gamma=\text{const}>0, \qquad d=0{,}5a\text{Re}'$$

где Re′ – число Рейнольдса для потока жидкости.

Задача сводится к исследованию движения частиц в лагранжевой цилиндрической системе координат [3]. В переменных $x_1=r$, $x_2=\dot r/r$, $x_3=\dot\theta$ уравнения движения имеют вид

$$\dot x_1=x_1x_2, \qquad \dot x_2=-C-kx_2-x_2^2+x_3^2 \tag{1}$$
$$\dot x_3=-kx_3+lf(x_1)/x_1^2-2x_2x_3$$
$$k=4{,}5L\mu/(R_s^2\rho_s{}^\circ V_\infty), \qquad C=ka, \qquad l=k\Gamma$$

где μ – коэффициент вязкости жидкости; L, V_∞ – характерные размер и скорость.

Уравнение движения частиц в проекции на ось z интегрируется отдельно

$$z=c_1\exp(\lambda_1t)+c_2\exp(\lambda_2t)$$
$$\lambda_{1,2}=-0{,}5k\pm\sqrt{k^2/4+2ak}$$

где c_1 и c_2 – константы, определяемые из начальных значений z и $\dot z$ частицы.

В фазовом пространстве движения частиц r, $\dot r$, $\dot\theta$ уравнения движения имеют особую точку M с координатами $r=\text{const}>0$, $\dot r=0$, $\dot\theta=\text{const}$ и линию особых точек $N(r=0,\ \dot r=0)$. Вопрос об устойчивости этих особых точек можно решить, исследуя уравнения движения частиц (1) в пространстве x_1, x_2, x_3 [4].

Если выбрать направление θ в цилиндрической системе координат по направлению вращения потока жидкости, то координаты точки M будут равны: $x_1=X_1=\text{const}>0$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{C}$.

Из третьего уравнения системы (1) следует соотношение

$$\gamma=\frac{f(X_1)}{dX_1^2}, \qquad \gamma=\frac{\sqrt{C}}{\Gamma d}$$

Следовательно, $X_1>0$ при $\gamma<1$.

Точка M фазового пространства имеет простой физический смысл: частицы движутся по поверхности цилиндра радиуса X_1 с угловой скоростью $\sqrt{C}$, ось цилиндра совпадает с координатной осью z. Изучение поведения решений системы (1) в окрестности особой точки M стандартным методом исследования по первому приближению [5] показало, что эта точка асимптотически устойчива по Ляпунову. Доказательство этого факта для краткости опущено.

В пространстве x_1, x_2, x_3 линии N соответствует плоскость $G: x_1=0$. Координаты особых точек, лежащих на этой плоскости, определяются условием $\dot x_2=0$, $\dot x_3=0$. Отсюда

$$x_3^2-kx_2-x_2^2=C$$
$$kx_3+2x_2x_3=n, \qquad n=ld$$

У этой системы два действительных решения, и, таким образом, на плоскости G имеем две особые точки A и B с координатами

$$A: x_2=-0{,}5k+q, \qquad x_3=n/q$$
$$B: x_2=-0{,}5k-q, \qquad x_3=-n/q \tag{2}$$
$$q=\sqrt{0{,}5[(k^2/4-C)+\sqrt{(k^2/4-C)^2+n^2}]}$$

Такое же исследование на устойчивость по первому приближению точек A и B, какое было проведено для точки M, дает условия их асимптотической устойчивости в малом, имеющие одинаковый вид для обеих точек

$$-0{,}5k<x_2<0, \qquad x_2=-0{,}5k\pm q \tag{3}$$

Если хотя бы одно из неравенств имеет противоположный знак, то соответствующая точка неустойчива [5].

Из (2) следует, что неустойчива точка B. Для точки A первое неравенство в (3) выполняется тождественно, а второе после подстановки x_2 из (2) принимает вид $n<k\sqrt{C}$. Это неравенство, взятое с обратным знаком, совпадает с условием существования отличного от нуля критического радиуса X_1, т. е. $\gamma<1$.

Физический смысл условия (3) таков: когда $X_1>0$, ось вихря отталкивающая, когда $X_1=0$, ось вращения – притягивающая.

Все точки линии N, кроме точки с координатами $(0, 0, n/q)$, неустойчивы. Эта точка может быть устойчивой или неустойчивой в зависимости от выполнения условия (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И.* Движение мелких частиц в закрученном потоке.— Инж.-физ. журн., 1960, т. 3, № 2. с. 17—24.
2. *Burgers J. M.* A mathematical model illustating the theory of turbulence.— Adv. in Appl. Mech., 1948, v. 1, p. 171—199.
3. *Соу С. Л.* Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
4. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

Москва

Поступила в редакцию 8.IX.1982

УДК 532.546

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ПОЛИЩУК Г. И., ПОЛИЩУК Т. Г.

Построено фундаментальное решение системы уравнений, описывающих медленное протекание несжимаемой вязкой жидкости сквозь пористый материал под действием поля объемных сил.

В теории фильтрации обычно рассматривается движение жидкости, порожденное гравитационными силами. Но фильтрационное течение можно вызывать (или интенсифицировать), воздействуя на жидкость полем объемных сил различной природы. Один из способов создания такого поля – облучение жидкости звуком [1].

Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в изотропной среде с высокой пористостью (близкой к единице) имеют следующий вид [2]:

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p-\frac{\mu}{k}\mathbf{u}+\mu\nabla^2\mathbf{u} \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

Здесь $\mathbf{u}$ – локальная скорость установившегося течения жидкости сквозь пористую среду (по определению это вектор, который имеет компоненты, равные объемному потоку жидкости на единицу площади через три плоские элемента поверхности, перпендикулярные к координатным осям; при этом линейные размеры элементов много больше характерного размера пор); p – локальное давление (т. е. среднее значение давления по некоторому объему жидкости, большому по сравнению с размерами пор, но малому по сравнению с характерным масштабом всего течения); ρ – плотность жидкости; μ – динамическая вязкость; k – проницаемость пористого материала; ∇ – оператор Гамильтона.

Предположив, что течение жидкости обусловлено некоторым стационарным полем объемных сил $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ – точка пространства, и характеризуется малыми значениями числа Рейнольдса, систему уравнений (1) в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) можно представить в следующем виде:

$$\mu\left(\nabla^2-\frac{1}{k}\right)u_j-\frac{\partial p}{\partial x_j}+F_j=0 \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0, \qquad j=1,2,3 \qquad (2)$$

Здесь индексом j отмечены проекции векторов на ось x_j.

Если силовое поле точечное, т. е. $F_j=\delta(\mathbf{x})f_j$, где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака, то применение к системе уравнений (2) преобразования Фурье

$$\Phi[g(\mathbf{x})]\equiv G(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}g(\mathbf{x})e^{i\omega\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}$$

где $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, а $g(\mathbf{x})$ – функция пространственной координаты $\mathbf{x}$, дает

$$(\omega^2+1/k)\mu U_j(\omega)-i\omega_jP(\omega)=f_j; \qquad \omega_jU_j(\omega)=0$$