МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1984

УДК 532.5.013.4:532.135

# О СПЕКТРЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

КИРЕЙКО Г. В.

Исследование явления перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения слабых растворов полимеров представляет большой практический интерес. Экспериментальные данные указывают как на повышение устойчивости течения, так и на явление «ранней турбулентности» [1]. В [2] объяснена противоречивость экспериментальных данных при численном исследовании симметричных возмущений первой моды, неустойчивых для ньютоновской жидкости. В [3] показано, что при течении вязкоупругой жидкости Максвелла в канале неустойчивыми становятся и другие моды. Отмеченные особенности гидродинамической устойчивости вязкоупругих жидкостей указывают на значительную перестройку спектра малых возмущений.

Ниже исследуется спектр возмущений плоскопараллельных течений вязкоупругих жидкостей Олдройда и Максвелла при малых числах Рейнольдса и больших и малых волновых числах.

1. Уравнение состояния вязкоупругой жидкости Олдройда имеет вид

$$\sigma_{ij}+\gamma_1\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}=2\mu\left(e_{ij}+\gamma_2\frac{De_{ij}}{Dt}\right)$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt}=\frac{\partial B_{ij}}{\partial t}+v_k\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}-B_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}-B_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{1.1}$$

где $\sigma_{ij}$ и $e_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, $\mu$ – коэффициент вязкости, $\gamma_1$ и $\gamma_2$ – времена релаксации и ретардации, $0\leqslant\gamma_2\leqslant\gamma_1$, $B_{ij}$ – компоненты произвольного тензора, $v_i$ – скорость течения ((1.1) при $\gamma_2=0$ соответствует жидкости Максвелла).

Уравнение типа Орра – Зоммерфельда для амплитуды функции тока малых возмущений плоскопараллельных течений жидкости (1.1) в канале имеет вид [4]

$$\Psi^{\mathrm{IV}}+b_3\Psi'''+b_2\Psi''+b_1\Psi'+b_0\Psi=i\alpha R\frac{\beta_1}{\beta_2}[(U-c)(\Psi''-\alpha^2\Psi)-U''\Psi]$$

$$\beta_1=1+i\alpha RE_1(U-c),\qquad \beta_2=1+i\alpha RE_2(U-c) \tag{1.2}$$

$$E_1=\gamma_1\nu/h^2,\qquad E_2=\gamma_2\nu/h^2,\qquad R=U_0h/\nu$$

Здесь $U=U(y)$ – скорость основного течения, $U_0$ – средняя скорость течения, $h$ – полуширина канала, $\alpha$ – волновое число, $c=X+iY$, $X$ – фазовая скорость возмущения, штрихами обозначено дифференцирование по $y$, $b_i$ – функции $\alpha$, $\beta_1$ и $\beta_2$. Амплитуда функции тока возмущений удовлетворяет краевым условиям

$$\Psi=\Psi'=0,\qquad y=\pm1 \tag{1.3}$$

Для ньютоновской жидкости ($\beta_1=\beta_2$) уравнение (1.2) переходит в уравнение Орра – Зоммерфельда.

2. Найдем выражение для собственных значений краевой задачи (1.2) и (1.3) при $R\to0$. Пусть

$$X=\frac{X_{-1}}{R}+X_0+X_1R+\ldots,\qquad Y=\frac{Y_{-1}}{R}+Y_0+Y_1R+\ldots$$

$$\Psi=\Psi_0+\Psi_1R+\Psi_2R^2+\ldots \tag{2.1}$$

При этом $U$ и ее производные считаем ограниченными. При $R^{\circ}$ получим

$$L(c_{-1}, \Psi_0)=\Psi_0^{IV}-2\alpha^2\Psi_0''+\alpha^4\Psi_0+i\alpha c_{-1}\frac{1-i\alpha E_1 c_{-1}}{1-i\alpha E_2 c_{-1}}(\Psi_0''-\alpha^2\Psi_0)=0 \qquad (2.2)$$

$$\Psi_0=\Psi_0'=0, \qquad y=\pm 1 \qquad (2.3)$$

Умножим уравнение (2.2) на комплексно-сопряженное к $\Psi_0$ и проинтегрируем по $y$ от $-1$ до $+1$ с использованием граничных условий (2.3), тогда

$$I_2^2+2\alpha^2 I_1^2+\alpha^4 I_0^2-i\alpha c_{-1}\frac{1-i\alpha E_1 c_{-1}}{1-i\alpha E_2 c_{-1}}(I_1^2+\alpha^2 I_0^2)=0$$

$$I_0^2=\int_{-1}^{1}|\Psi_0|^2\,dy, \qquad I_1^2=\int_{-1}^{1}|\Psi_0'|^2\,dy, \qquad I_2^2=\int_{-1}^{1}|\Psi_0''|^2\,dy$$

Из полученного уравнения следует: коэффициент при скобках должен быть действительным и положительным, тогда общее решение уравнения (2.2) запишем в виде

$$\Psi_0=A_1\operatorname{ch}\alpha y+A_2\operatorname{sh}\alpha y+A_3\cos\lambda y+A_4\sin\lambda y \qquad (2.4)$$

$$\lambda^2=-\alpha^2+i\alpha c_{-1}\frac{1-i\alpha E_1 c_{-1}}{1-i\alpha E_2 c_{-1}} \qquad (2.5)$$

Используя краевые условия (2.3), получим уравнения для определения $\lambda$

$$(\lambda\operatorname{tg}\lambda+\alpha\operatorname{th}\alpha)(\alpha\operatorname{tg}\lambda-\lambda\operatorname{th}\alpha)=0$$

Если пронумеровать корни уравнения в порядке возрастания, то для $\lambda_n$ справедливо

$$\begin{aligned} &n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\lambda_{2n-1}\leqslant n\pi, \qquad \lambda_{2n-1}=b_n: \qquad \operatorname{tg}b_n=-\frac{\alpha\operatorname{th}\alpha}{b_n}\\ &n\pi\leqslant\lambda_{2n}\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_{2n}=d_n: \qquad \operatorname{tg}d_n=\frac{\operatorname{th}\alpha}{\alpha}d_n \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Величину $c_{-1}$ определяем из уравнения (2.5), тогда

$$\alpha X_{-1}[(\lambda_n^2+\alpha^2)E_2+1+2\alpha E_1 Y_{-1}]=0 \qquad (2.7)$$

$$(\lambda_n^2+\alpha^2)(1+\alpha E_2 Y_{-1})+\alpha Y_{-1}-\alpha^2 E_1(X_{-1}^2-Y_{-1}^2)=0 \qquad (2.8)$$

Пусть, как и в случае течения ньютоновской жидкости [5], $X_{-1}=0$, тогда из (2.8) получим

$$Y_{-1}=\frac{-1-E_2(\lambda_n^2+\alpha^2)+\sqrt{1-2(2E_1-E_2)(\lambda_n^2+\alpha^2)+E_2^2(\lambda_n^2+\alpha^2)^2}}{2\alpha E_1} \qquad (2.9)$$

Здесь перед корнем выбран знак плюс, чтобы из (2.9) получить решение для ньютоновской жидкости при $E_1\to 0$. Подкоренное выражение в (2.9) положительно только тогда, когда

$$|(\lambda_n^2+\alpha^2)E_2^2-(2E_1-E_2)|>2\sqrt{E_1(E_1-E_2)} \qquad (2.10)$$

В этом случае, если неравенства (2.10) не удовлетворяются, то $X_{-1}\neq 0$ и $Y_{-1}$ определяется из (2.7), а $X_{-1}$ затем из (2.8)

$$Y_{-1}=-\frac{1+E_2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{2\alpha E_1} \qquad (2.11)$$

$$X_{-1}=\pm\frac{\sqrt{2(2E_1-E_2)(\lambda_n^2+\alpha^2)-E_2^2(\lambda_n^2+\alpha^2)^2-1}}{2\alpha E_1} \qquad (2.12)$$

Чтобы найти $X_0$ в случае (2.10), рассмотрим коэффициент при $R$ в уравнении (1.2)

$$L(c_{-1}, \Psi_1)=-f_1(c_0, \Psi_0) \qquad (2.13)$$

Из условия разрешимости (2.13) следует

$$\int_{-1}^{1} f_1 \overline{\Psi_0}\, dy=0$$

После интегрирования по частям получим

$$Y_0=0$$

$$X_0=\left[\int_{-1}^{1} U(|\Psi_0'|^2+\alpha^2|\Psi_0|^2)\,dy+\frac{1+2\alpha E_2Y_{-1}+\alpha^2E_1E_2Y_{-1}^2}{2(1+2\alpha E_1Y_{-1}+\alpha^2E_1E_2Y_{-1}^2)}\int_{-1}^{1} U''|\Psi_0|^2\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+\alpha E_2Y_{-1})(2+\alpha E_1Y_{-1})(E_1-E_2)}{2(1+\alpha E_1Y_{-1})(1+2\alpha E_1Y_{-1}+\alpha^2E_1E_2Y_{-1}^2)}\int_{-1}^{1} U^{\mathrm{IV}}|\Psi_0|^2\,dy\right]\frac{1}{I_1^2+\alpha^2I_0^2} \qquad (2.14)$$

$$\Psi_0=\operatorname{ch}\alpha\cos\lambda_n y-\cos\lambda_n\operatorname{ch}\alpha y,\qquad n=2k-1$$

$$\Psi_0=\operatorname{sh}\alpha\sin\lambda_n y-\sin\lambda_n\operatorname{sh}\alpha y,\qquad n=2k \qquad (2.15)$$

Таким образом, спектр малых возмущений плоскопараллельных течений жидкости Олдройда при $R\to 0$ для $n$, удовлетворяющих неравенствам (2.10), имеет вид

$$Y_n=Y_{-1}/R+\ldots,\qquad X_n=X_0+\ldots \qquad (2.16)$$

где $Y_{-1}$ и $X_0$ определяются формулами (2.4) и (2.14); для остальных $n$

$$Y_n=Y_{-1}/R+\ldots,\qquad X_n=X_{-1}/R+\ldots \qquad (2.17)$$

где $Y_{-1}$ и $X_{-1}$ определяются формулами (2.11) и (2.12)

3. Для спектра малых возмущений течения жидкости Олдройда при $\alpha\to 0$, который получается аналогично, можно записать для $n$, удовлетворяющих неравенствам (2.10) при $\alpha=0$

$$Y_n=Y_{-1}/\alpha+\ldots,\qquad X_n=X_0+\ldots$$

$$X_0=\left[\int_{-1}^{1} U|\Psi_0'|^2\,dy+\frac{1+2RE_2Y_{-1}+R^2E_1E_2Y_{-1}^2}{2(1+2RE_1Y_{-1}+R^2E_1E_2Y_{-1}^2)}\int_{-1}^{1} U''|\Psi_0|^2\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+RE_2Y_{-1})(2+RE_1Y_{-1})(E_1-E_2)}{2(1+RE_1Y_{-1})(1+2RE_1Y_{-1}+R^2E_1E_2Y_{-1}^2)}\int_{-1}^{1} U^{\mathrm{IV}}|\Psi_0|^2\,dy\right]\frac{1}{I_1^2} \qquad (3.1)$$

$$Y_{-1}=\frac{-1-E_2\lambda_n^2+\sqrt{1-2(2E_1-E_2)\lambda_n^2+E_2^2\lambda_n^4}}{2RE_1}$$

для $n$, неудовлетворяющих (2.10) при $\alpha=0$

$$Y_n=-\frac{1+E_2\lambda_n^2}{2\alpha RE_1}+\ldots$$

$$X_n=\pm\frac{\sqrt{2(2E_1-E_2)\lambda_n^2-E_2^2\lambda_n^4-1}}{2\alpha RE_1}+\ldots \qquad (3.2)$$

$$\lambda_{2n-1}=n\pi,\qquad n\pi<\lambda_{2n}<n\pi+\pi/2,\qquad \lambda_{2n}=K_n,\qquad \operatorname{tg}K_n=K_n \qquad (3.3)$$

Собственные функции $\Psi_0$ имеют вид

$$\Psi_0=\cos\lambda_n y-\cos\lambda_n,\qquad n=2k-1$$

$$\Psi_0=y\sin\lambda_n-\sin\lambda_n y,\qquad n=2k \qquad (3.4)$$

4. Исследуем спектр малых возмущений жидкости Олдройда при $\alpha\to\infty$. Пусть, как и в случае ньютоновской жидкости [6], $Y\sim\alpha$ и $X\sim 1$, тогда при больших $\alpha$ уравнение (1.2) имеет вид

$$\Psi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\Psi''+\alpha^4\Psi=\alpha RY\frac{E_1}{E_2}(\Psi''-\alpha^2\Psi) \qquad (4.1)$$

Общее решение (4.1) совпадает с (2.4), если положить

$$\lambda^2=-\alpha^2-\alpha RYE_1/E_2 \tag{4.2}$$

Величины $\lambda_n$ определяются выражениями (2.6), а $Y_n$ – (4.2). Тогда для любого конечного $n$ при $\alpha\to\infty$ $Y_n\to-\alpha E_2/RE_1$. Полученная оценка отличается от ньютоновской жидкости только множителем $E_2/E_1$.

Выражения для спектра возмущений течения вязкоупругой жидкости Максвелла ($\gamma_2=0$ в (1.1)) при $\alpha\to0$ и $R\to0$ можно получить из (2.16), (2.17) и (3.1), (3.2), если подставить $E_2=0$. При этом условие (2.10) переходит в условие

$$\lambda_n^2<-\alpha^2+1/4E_1$$

Проведенное исследование подтвердило предположение о значительной перестройке спектра малых возмущений вязкоупругих жидкостей. Так, для любого значения параметра упругости $E_1$ существует такой номер моды, начиная с которого все $X_n$ имеют порядок $1/\alpha R$ при $\alpha\to0$ и $R\to0$, тогда как для ньютоновских жидкостей все $X_n\sim1$. Следовательно, в достаточно упругой покоящейся жидкости малые возмущения могут затухать в виде бегущих волн в разных направлениях от места возмущения (формулы (2.12), (2.17)), тогда как в покоящейся ньютоновской жидкости все возмущения затухают монотонно [5].

Полученные оценки для $Y_n$ не зависят от профиля скорости $U(y)$ и могут быть использованы для нумерации собственных значений $c_n$. Также оценки для $X_n$ и $Y_n$ можно взять в качестве начальных при численных расчетах спектра методом непрерывного перехода по $\alpha$ от $\alpha\ll1$ к $\alpha\sim1$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Пилипенко В. Н.* Влияние добавок на пристенные турбулентные течения.— Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Мех. жидкости и газа, 1980, т. 15, с. 156–257.
2. *Кирейко Г. В., Пилипенко В. Н.* Устойчивость течения вязкоупругой жидкости в плоском канале.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 3, с. 569—573.
3. *Porteous K. C., Denn M. M.* Linear stability of plane Poiseuille flow of viscoelastic liquids.— Trans. Soc. Rheol., 1972, v. 16, № 2, p. 295—308.
4. *Kundu P. K.* Small disturbance stability of plane Poiseuille flow of Oldroyd fluid.— Phys. Fluids, 1972, v. 15, № 7, p. 1207—1212.
5. *Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса.– ПММ, 1965, т. 29, № 1, с. 88—98.
6. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.


Москва

Поступила в редакцию 24.X.1983

УДК 532.529

# ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ

МОСКАЛЕВ А. М.

Рассматривается движение мелких сферических частиц в заданном стационарном вихревом потоке несжимаемой жидкости. Представлены результаты исследования на устойчивость по Ляпунову траектории частицы, совпадающей с осью вихря, и траекторий, расстояние от которых до оси вихря определяется условием равенства радиальных компонент силы взаимодействия фаз и центробежной силы, действующей на частицу.

В ряде работ (например, [1]), посвященных исследованию осесимметричного стационарного течения дисперсной смеси с направленной к оси вихря радиальной составляющей скорости несущей среды, были получены траектории частиц, расстояние от которых до оси вихря определяется условием равенства радиальных компонент силы взаимодействия фаз и центробежной силы, действующей на частицы.

Ниже представлены результаты исследования устойчивости по Ляпунову аналогичных траекторий в случае, когда объемная плотность частиц $\rho_s$ мала. Частицы предполагаются твердыми сферами малого радиуса $R_s$ с постоянной плотностью $\rho_s°$. Несущая среда – вязкая несжимаемая жидкость с плотностью $\rho°$. Предполагается отсутствие взаимодействия между частицами, а также потоков тепла и сил, обусловленных внешними источниками. Сила трения между фазами считается стоксовской. Движение рассматривается в неограниченном пространстве.