

УДК 536.46+532.51

## **ТУРБУЛЕНТНЫЙ КОНЦЕНТРАЦИОННО-ТЕПЛОВОЙ ТЕРМИК ПРИ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ В НЕСТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ**

**ГОСТИНЦЕВ Ю. А., СУХАНОВ Л. А.**

В работе на основе турбулентных уравнений переноса завихренности, энергии и вещества найдено приближенное автомодельное решение для структуры концентрационно-теплого термика, возникающего при воздействии мгновенного точечного источника тепла и многокомпонентной примеси в случае больших значений коэффициента турбулентности. Получены аналитические выражения для скорости распространения «ядра» плаучести и сформировавшегося тороидального вихря. Исследовано влияние параметров источника и коэффициента турбулентности на структуру и динамику подъема термика. Проведено сравнение с ламинарным режимом движения подобных образований.

Под термиком обычно подразумевают свободное конвективное движение типа восходящих струй или вихревых структур нагретого воздуха [1, 2]. Причиной движения в таком случае является сила Архимеда, возникающая за счет разницы температур всплывающего газа и окружающей среды. Сходное по физической природе явление возникает при подъеме облака легкого газа из-за различия молекулярных весов [3, 4]. Иногда оба фактора действуют вместе, приводя к возникновению сложного турбулентного вихревого движения, которое будем называть концентрационно-тепловым термиком.

В [5–8] с использованием уравнений движения, осредненных по конечному объему, исследовались нагретые вихревые образования в поле силы тяжести и впервые сделан качественный вывод о существовании автомодельного режима таких течений.

Теоретические исследования детальной структуры термиком, основанные на рассмотрении полных уравнений движения сплошной среды, представлены небольшим числом работ. Например, в работах [2, 9] найдены аналитические решения задачи о развитии ламинарного теплового термика в свободной нестратифицированной атмосфере. При этом решение уравнений Навье – Стокса получено разложением в ряд по малому параметру, пропорциональному отношению мощности тепловыделения к квадрату ламинарной вязкости. В [10] в приближении пограничного слоя рассмотрена структура ламинарного термика для другого предельного случая – малых значений коэффициента кинематической вязкости.

Общей особенностью упомянутых работ является допущение о возможности описания турбулентного движения уравнениями Навье – Стокса с постоянной эффективной вязкостью. Благодаря этому в системе исходных уравнений (содержащих размерную величину вязкости) появляется возможность введения безразмерного параметра – аналога числа Рэлея, в ряды по которому и найдено решение в [2, 9, 10].

В данной работе в отличие от [2, 9, 10] для описания турбулентного термика используются уравнения Рейнольдса, получаемые путем обычной процедуры осреднения и привлечения гипотезы градиентного переноса завихренности, температуры и вещества. Возможность такого подхода показана в [4], где для малых значений коэффициента турбулентности получено аналитическое решение задачи в струйном приближении.

Здесь рассматривается асимптотика поведения всплывающего термика при больших значениях коэффициента турбулентности.

1. Пусть в некоторой точке покоящейся безразлично-стратифицированной среды при  $t=0$  мгновенно выделяется конечная порция многокомпонентной примеси  $E_0$  (кг), содержащая  $Q_0$  (Дж) количества тепла, или начинает функционировать постоянно действующий источник с производимостями  $E_1$  (кг·с<sup>-1</sup>),  $Q_1$  (Дж·с<sup>-1</sup>). Поступившая в систему смесь газов и тепло диффундируют в окружающее пространство и из-за наличия силы

плавучести возбуждают вихревое конвективное движение, которое в свою очередь оказывает обратное влияние на перенос температуры и примеси. В результате в среде возникает вихревое образование (концентрационно-тепловой термик) с характерной термогазодинамической структурой и вполне определенными асимптотическими автомодельными законами движения.

Осредненные уравнения переноса завихренности, энергии и вещества для осесимметричного конвективного турбулентного движения многокомпонентной среды в случае безразлично-стратифицированной атмосферы в приближении Буссинеска в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r v_r \Omega + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi \Omega \right) &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r e \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{e}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) + \\
 &+ \frac{g}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Delta \rho}{\rho_a} r \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\Delta \rho}{\rho_a} \cos \varphi \right) \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r \vartheta + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi \vartheta \sin \varphi &= \\
 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \text{Pr}^{-1} e \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{e \text{Pr}^{-1}}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \sin \varphi \\
 \frac{\partial c_j}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r c_j + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi c_j \sin \varphi &= \\
 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \text{Sm}_j^{-1} e \frac{\partial c_j}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{e \text{Sm}_j^{-1}}{r} \frac{\partial c_j}{\partial \varphi} \sin \varphi \\
 \Omega r &= -\sin^{-1} \varphi \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \\
 v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\
 \frac{\Delta \rho}{\rho_a} &= -\beta \vartheta - \frac{\mu_a}{\mu_b} \sum_j \kappa_j c_j, \quad \frac{\mu_a}{\mu_b} = \left( 1 + \sum_k \kappa_k^a Y_k^a \right)^{-1}, \quad \kappa_j = \frac{\mu_b}{\mu_j} - 1
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $r$  — радиус,  $\varphi$  — широта, отсчитываемая от вертикальной оси,  $\chi$  — долгота,  $v_r$  и  $v_\varphi$  — радиальная и угловая составляющие скорости движения,  $\psi$  — функция тока,  $\Delta \rho = \rho - \rho^a$ ,  $\vartheta = T - T^a$ ,  $c_j = Y_j - Y_j^a$  — избыточные значения плотности, температуры и массовой концентрации примеси по отношению к их значениям в окружающей среде  $\rho^a$ ,  $T^a$ ,  $Y_j^a$ ,  $\beta = T_a^{-1}$  — термический коэффициент расширения при постоянном давлении, предполагаемый в дальнейшем постоянным;  $e(r, \varphi, t)$  — турбулентная вязкость;  $\text{Pr}$ ,  $\text{Sm}_j$  — турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта;  $g$  — ускорение силы тяжести, направленное вдоль вертикальной оси;  $\mu_a$ ,  $\mu_b$ ,  $\mu_j$  — молекулярные веса атмосферы, сухого воздуха и  $j$ -го компонента вещества, дополнительного к составу сухого воздуха. Окружающая среда состоит в общем случае из  $1+j=1+l+m+n$  компонентов, где индекс 1 соответствует сухому воздуху,  $l$  — компонентам примеси, содержащимся как в окружающей среде, так и выделяемым источником,  $m$  — компонентам примеси только источника и  $n$  — компонентам примеси только атмосферы (например, парам воды). Для различных компонентов величины  $c_j$  выражаются через массовые концентрации следующим образом:

$$c_l = Y_l - Y_l^a, \quad c_m = Y_m, \quad c_n = Y_n^a - Y_n$$

При написании (1.1) принято также, что коэффициенты процессов турбулентного переноса много больше их ламинарных значений; скорости конвективного движения малы и изменением плотности из-за изменения

давления можно пренебречь; давление в окружающей атмосфере удовлетворяет гидростатическому уравнению, а молекулярный состав сухого воздуха не меняется с высотой. Концентрационно-тепловой источник расположен в  $r=0$ , движение симметрично относительно  $\chi$  и отлична от нуля только одна компонента вихря  $\Omega = \Omega_\chi$ .

Для связи корреляционных моментов, возникающих при выводе (1.1), с осредненными параметрами течения использована гипотеза Буссинеска для переноса завихренности  $\Omega$  температуры  $T$  и концентрации  $Y_j$  в виде [4]

$$\begin{aligned} \langle v_r' \Omega' \rangle &= -e \frac{\partial \Omega}{\partial r}, & \langle v_\varphi' \Omega' \rangle &= -r^{-1} e \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}, & \langle v_r' T' \rangle &= -e \text{Pr}^{-1} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \langle v_\varphi' T' \rangle &= -r^{-1} e \text{Pr}^{-1} \frac{\partial T}{\partial \varphi} & \langle v_r' Y_j' \rangle &= -e \text{Sm}_j^{-1} \frac{\partial Y_j}{\partial r}, \\ \langle v_\varphi' Y_j' \rangle &= -r^{-1} e \text{Sm}_j^{-1} \frac{\partial Y_j}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для (1.1) состоят в затухании полей  $\Omega$ ,  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $\Psi$ ,  $\theta$ ,  $c_j$ ,  $\Psi$  вне области конвекции и условий симметрии на вертикальной оси

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \{\Omega, v_r, v_\varphi, \Psi, \theta, c_j\} &\rightarrow 0 \\ v_\varphi = \Omega = \Psi = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial c_j}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} &= 0 \quad (\varphi = 0, \pi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ввиду физического подобия процессов теплопереноса и диффузии логично предположить, что турбулентные числа Шмидта для различных компонентов примеси одинаковы и равны числу Прандтля:  $\text{Sm}_j = \text{Sm} = \text{Pr}$  и ( $\text{Pr} = 1$ ).

Введем новые переменные  $\Theta = g\beta\theta$ ,  $\varepsilon_j = g\mu_a\mu_b^{-1}\kappa_j c_j$ , имеющие одинаковые размерности  $[\text{мс}^{-2}]$ . Умножая уравнение энергии из (1.1) на  $g\beta$ , каждое из  $j$ -уравнений концентраций — на  $g\mu_a\mu_b^{-1}\kappa_j$  и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r v_r \Omega + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi \Omega \right) &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r e \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} e \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) - \\ &- \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} r \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r \omega + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi \omega \sin \varphi &= \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 e \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} e \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \sin \varphi \\ \Omega r &= -\sin^{-1} \varphi \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \\ v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \omega = -g \frac{\Delta \rho}{\rho_a} \\ \omega &= \Theta + \sum_j \varepsilon_j \end{aligned} \quad (1.4)$$

Граничные условия для ускорения силы плавучести  $\omega$  из (1.4) следуют из определения величины  $\Delta \rho / \rho_a$  и условий симметрии (1.3)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega \rightarrow 0, \quad \left( \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0, \pi} = 0 \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.3)–(1.5) замкнута и позволяет найти распределения  $\Omega$ ,  $v_r$ ,  $v_\varphi$  и  $\omega$  без детального рассмотрения полей температуры и концентрации.

2. Интегрирование уравнения плавучести из (1.4), энергии и диффузии из (1.1) по всему пространству показывает, что реализуется автомодельный режим течения, определяемый сохранением интегралов

$$\int \omega dW = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int v_r \omega dS \right\} t = \Pi_\varepsilon t^\varepsilon$$

$$\int \Theta dW = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int v_r \Theta dS \right\} t = q_\varepsilon t^\varepsilon$$

$$\int \varepsilon_j dW = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int v_r \varepsilon_j dS \right\} t = \pi_{j\varepsilon} t^\varepsilon$$
(2.1)

$$q_\varepsilon = \frac{\Theta_\varepsilon g \beta}{\rho_a c_p} [M^4 c^{-(2+\varepsilon)}], \quad \pi_{j\varepsilon} = g \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{E_{j\varepsilon} \kappa_j}{\rho_j^\circ} [M^4 c^{-(2+\varepsilon)}]$$
(2.2)

$$\Pi_\varepsilon = q_\varepsilon (1 + K_\varepsilon) [M^4 c^{-(2+\varepsilon)}], \quad K_\varepsilon = \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{\rho_a c_p}{Q_\varepsilon \beta} \sum_j \frac{E_{j\varepsilon} \kappa_j}{\rho_j^\circ}$$
(2.3)

В (2.1)–(2.3) символ  $\varepsilon$  характеризует темп выделения энергии и вещества в источнике:  $\varepsilon=0$  соответствует мгновенному источнику с параметрами  $Q_0$  (Дж),  $E_{j0}$  (кг), а  $\varepsilon=1$  – постоянно действующему с  $Q_1$  (Дж·с<sup>-1</sup>),  $E_{j1}$  (кг·с<sup>-1</sup>). Безразмерная величина  $K_\varepsilon$  из (2.3) определяет вклад разности молекулярных весов источника и атмосферы в подъемную силу. Из л-теоремы [11, 12] с учетом интеграла сохранения плавучести из (2.1) и соотношения (2.3) следует, что решение фундаментальной задачи (1.3)–(1.5) определяется только угловой координатой  $\varphi$  и безразмерным радиусом

$$\xi = \frac{r}{\Pi_\varepsilon^{1/\varepsilon}}, \quad \gamma = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \frac{2+\varepsilon}{4}$$
(2.4)

При этом автомодельные решения (1.3)–(1.5) и турбулентная вязкость представимы соотношениями

$$v_{r, \varphi} = t^{\alpha-1} \Pi_\varepsilon^{1/\varepsilon} \Phi_{1,2}(\xi, \varphi), \quad \omega = t^{\alpha-2} \Pi_\varepsilon^{1/\varepsilon} \Phi_4(\xi, \varphi)$$
(2.5)

$$\Omega = t^{-1} \Phi_5(\xi, \varphi), \quad \Psi = t^{3\alpha-1} \Pi_\varepsilon^{3/\varepsilon} \Phi_6(\xi, \varphi)$$

$$e = \nu t^{2\alpha-1} \Pi_\varepsilon^{2/\varepsilon} E(\xi, \varphi) [m^2 \cdot c^{-1}]$$
(2.6)

Здесь  $\nu$  – безразмерный коэффициент турбулентности,  $E(\xi, \varphi)$  – автомодельная структурная функция.

Из вида уравнений и граничных условий для функции  $\Theta$ ,  $\varepsilon_j$  и  $\omega$  видно, что профили температуры, концентрации и ускорения силы плавучести подобны, т. е.  $\Theta = B\omega$ ,  $\varepsilon_j = D_j\omega$ . Коэффициенты подобия  $B$  и  $D_j$  находятся из соответствующих (индивидуальных) инвариантов (2.1) (2.2) и тогда

$$\Theta = \frac{q_\varepsilon}{\Pi_\varepsilon^{3/\varepsilon}} t^{\alpha-2} \Phi_4(\xi, \varphi), \quad \vartheta = \frac{\Theta}{g\beta}, \quad \varepsilon_j = \frac{\pi_{j\varepsilon}}{\Pi_\varepsilon^{3/\varepsilon}} t^{\alpha-2} \Phi_4(\xi, \varphi), \quad c_j = \frac{\varepsilon_j \mu_b}{g \mu_a \kappa_j}$$
(2.7)

Соотношения (2.5)–(2.7) с точностью до безразмерных структурных функций  $\Phi_i(\xi, \varphi)$ ,  $E(\xi, \varphi)$  определяют динамику развития концентрационно-теплового термика.

В зависимости от природы подъемной силы возможны два предельных

случая рассматриваемого течения, когда подъем термика определяется лишь одним из рассмотренных факторов (теплом или концентрацией). Так, в случае теплового термика в (2.5)–(2.7) необходимо формально перейти к пределу  $K_e \rightarrow 0$ ,  $\Pi_e \rightarrow q_e$ ,  $\xi \rightarrow r/q_e^{1/2} t^\alpha$ . Для концентрационного термика  $q_e \rightarrow 0$  и режим течения будет определять параметр

$$q_e K_e = g \frac{\mu_a}{\mu_b} \sum_j \frac{E_j \kappa_j}{\rho_j^0} = \sum_j \pi_{j_e}$$

Здесь во всех формулах вместо  $\Pi_e$  следует использовать величину  $\sum_j \pi_{j_e}$ .

В первом случае концентрация переносится как пассивная примесь, во втором — пассивным элементом является температура.

Используя (2.5) (2.6), преобразуем (1.4) к автомодельному виду

$$\begin{aligned} & - \left( \Phi_5 + \alpha \xi \frac{\partial \Phi_5}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Phi_1 \Phi_5 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2 \Phi_5 \right) = \\ & = \frac{\nu}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi E \frac{\partial \Phi_5}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{E}{\xi} \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} \xi \sin \varphi + \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \\ & (\alpha - 2) \Phi_4 - \alpha \xi \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \Phi_1 \Phi_4 + \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2 \Phi_4 \sin \varphi = \\ & = \nu \left( \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 E \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi_4}{\xi} \sin \varphi \right) \\ & \Phi_5 \xi = - \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial^2 \Phi_6}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_6}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg } \varphi}{\xi^2} \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi} \right) \\ & \Phi_1 = \frac{1}{\xi^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi}, \quad \Phi_2 = - \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial \Phi_6}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегралы (2.1) для мгновенного  $\varepsilon=0$  и постоянно действующих источников  $\varepsilon=1$  в выбранных автомодельных переменных  $\xi, \varphi$  записываются одинаковым образом, а граничные условия не изменяют своего вида

$$4\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \Phi_4(\xi, \varphi) \xi^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\xi = 1 \quad (2.9)$$

$$\lim \{ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6 \} \rightarrow 0$$

$$\Phi_2 = \Phi_5 = \Phi_6 = \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \pi \quad (2.10)$$

Для полного замыкания системы уравнения (2.8)–(2.10) необходимо знание вида зависимости автомодельной турбулентной вязкости  $E$  от переменных  $\xi, \varphi$ . Каких-либо экспериментальных обоснований выбора вида функции  $E(\xi, \varphi)$  для термиков не существует. Поэтому используем простейшее допущение об изотропности функций  $E$  и положим  $E \equiv 1$ . Вводя преобразования

$$\Phi_1^0 = \Phi_1 \nu^{-1/2}, \quad \Phi_2^0 = \Phi_2 \nu^{-1/2}, \quad \Phi_4^0 = \Phi_4 \nu^{-1/2}, \quad \Phi_5^0 = \Phi_5,$$

$$\Phi_6^0 = \Phi_6 v^{-1/2}, \quad \xi^0 = \xi v^{-1/2} \quad (2.11)$$

получим систему уравнений (2.8), но уже не содержащую безразмерного параметра  $v$ . При этом граничные условия (2.10) не изменяются, а интеграл (2.9) принимает вид

$$4\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \Phi_4(\xi, \varphi) \xi^2 \sin \varphi d\xi d\varphi = v^{-2} \quad (2.12)$$

(в дальнейшем знак градуса над функциями опускается).

3. Интегрирование (2.8), (2.10) (2.12) для достаточно больших значений  $v$  можно выполнить способом последовательных приближений [14]. Так как при движении, возникающем из состояния покоя, вязкость имеет превалирующее значение, то в первом приближении конвективным переносом в (2.8) можно пренебречь. Тогда вязкие члены уравнения сбалансированы соответствующими локальными производными  $-(\Phi_5 + \alpha \xi \partial \Phi_5 / \partial \xi)$ ,  $(\alpha - 2) \Phi_4 - \alpha \xi \partial \Phi_4 / \partial \xi$ .

Для определения второго приближения найденное решение следует подставить в конвективные члены уравнений. Высшие приближения находятся аналогичным образом.

Следуя методу последовательных приближений и разыскивая решения (2.8), (2.10), (2.12) в виде рядов

$$\Phi_i = \Phi_i^{(1)} + \Phi_i^{(2)} + \dots + \Phi_i^{(p)} + \dots, \quad i=1, \dots, 6 \quad (3.1)$$

(где  $i$  — номер функции из (25),  $p$  — номер приближения), получим бесконечную последовательность линейных уравнений и краевых условий

$$\Phi_1^{(p)} = \frac{1}{\xi^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Phi_6^{(p)}}{\partial \varphi}, \quad \Phi_2^{(p)} = -\frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial \Phi_6^{(p)}}{\partial \xi}, \quad p=1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$\xi \Phi_5^{(p)} = -\sin^{-1} \varphi \left( \frac{\partial^2 \Phi_6^{(p)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_6^{(p)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi}{\xi^2} \frac{\partial \Phi_6^{(p)}}{\partial \varphi} \right) \quad (3.3)$$

В первом приближении уравнения движения плавучести и интеграл сохранения (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned} - \left( \Phi_5^{(1)} + \alpha \xi \frac{\partial \Phi_5^{(1)}}{\partial \xi} \right) &= \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \Phi_5^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_5^{(1)}}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial \Phi_4^{(1)}}{\partial \xi} \xi \sin \varphi + \frac{\partial \Phi_4^{(1)}}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \\ (\alpha - 2) \Phi_4^{(1)} - \alpha \xi \frac{\partial \Phi_4^{(1)}}{\partial \xi} &= \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial \Phi_4^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_4^{(1)}}{\partial \varphi} \sin \varphi \\ \int_0^\pi \int_0^\infty \Phi_4^{(1)}(\xi, \varphi) \xi^2 \sin \varphi d\varphi d\xi &= (4\pi v^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последующие приближения записываются в форме

$$- \left( \Phi_5^{(p+1)} + \alpha \xi \frac{\partial \Phi_5^{(p+1)}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \Phi_1^{(1)} \Phi_5^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2^{(p)} \Phi_5^{(p)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \Phi_5^{(p+1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_5^{(p+1)}}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial \Phi_4^{(p+1)}}{\partial \xi} \xi \sin \varphi + \frac{\partial \Phi_4^{(p+1)}}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \\
&(\alpha-2) \Phi_4^{(p+1)} - \alpha \xi \frac{\partial \Phi_4^{(p+1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \Phi_1^{(p)} \Phi_4^{(p)} + \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_2^{(p)} \Phi_4^{(p)} \sin \varphi = \\
&= \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial \Phi_4^{(p+1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_4^{(p+1)}}{\partial \varphi} \sin \varphi \quad (3.5) \\
&\int_0^\pi \int_0^\infty \Phi_4^{(p)}(\xi, \varphi) \xi^2 \sin \varphi d\varphi d\xi = 0, \quad p=1, 2, 3 \dots
\end{aligned}$$

а граничные условия (2.10) для каждого из  $p$  приближений не изменяют своего вида.

Исследуем решение задачи (3.2)–(3.5) для термика, возникающего под действием мгновенного концентрационно-теплого импульса ( $\alpha=1/2$ ).

*Первое приближение.* Так как функция  $\Phi_4^{(1)}$  симметрична по  $\varphi$ , то из второго уравнения (3.4) получим

$$\Phi_4^{(1)} = A \exp(-\xi^2/4), \quad A=1/(8\pi^{1/2}\nu^2) \quad (3.6)$$

Для вихря скорости  $\Phi_5^{(1)}$  из (3.4) и (3.6) следует уравнение

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \Phi_5^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_5^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial \Phi_5^{(1)}}{\partial \xi} + \Phi_5^{(1)} = -\frac{1}{2} A \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \sin \varphi$$

которому при граничных условиях (2.10) удовлетворяет функция

$$\Phi_5^{(1)} = A \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \sin \varphi \quad (3.7)$$

а уравнение для функции тока (3.3)

$$\frac{\partial^2 \Phi_6^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_6^{(1)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg} \varphi}{\xi^2} \frac{\partial \Phi_6^{(1)}}{\partial \varphi} + A \xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \sin^2 \varphi = 0$$

имеет решение

$$\begin{aligned}
\Phi_6^{(1)} &= 4A \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\xi} \text{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \right] \sin^2 \varphi, \\
\text{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Автомодельные скорости  $\Phi_{1,2}^{(1)}$  из (3.2) в первом приближении равны

$$\Phi_1^{(1)} = 8A \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\xi^3} \text{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \right] \cos \varphi \quad (3.9)$$

$$\Phi_2^{(1)} = 4A \left[ \frac{\sqrt{\gamma\pi}}{\xi^3} \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) - \frac{1}{\xi^2} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \sin \varphi \right] \quad (3.10)$$

Второе приближение. Уравнение для плавучести  $\Phi_4^{(2)}$  следует из (3.5), (3.6), (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial \Phi_4^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi_4^{(2)}}{\partial \varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} \xi \frac{\partial \Phi_4^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \Phi_4^{(2)} = \\ & = 4A^2 \left[ \frac{1}{\xi} \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{\gamma\pi}}{\xi^2} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) \right] \cos \varphi \end{aligned}$$

Его приближенное решение найдено в форме

$$\Phi_4^{(2)} = A^2 \left[ 0,933 \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) - 0,014 \xi^3 \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \right] \cos \varphi \quad (3.11)$$

Используя (3.5), (3.7), (3.9), (3.10) и (3.11), для возмущения завихренности  $-\Phi_5^{(2)}$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \Phi_5^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_5^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{\partial \Phi_5^{(2)}}{\partial \xi} + \Phi_5^{(2)} = 4A^2 \left[ \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\gamma\pi}}{2\xi} \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \right] \sin 2\varphi + A^2 (-0,247 \xi^2 + 6,8510^{-3} \xi^4) \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

с приближенным решением

$$\Phi_5^{(2)} = 0,3944 A^2 \xi^2 \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \sin 2\varphi \quad (3.12)$$

Угловые функции в (3.11), (3.12) точно удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям, а радиальные вычислены приближенным методом Галеркина. Решение уравнения для функции тока

$$0,3944 A^2 \xi^3 \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \sin \varphi \sin 2\varphi = - \left( \frac{\partial^2 \Phi_6^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Phi_6^{(2)}}{\partial \varphi^2} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi_6^{(2)}}{\partial \varphi} \right)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_6^{(2)} = 1,576 A^2 \left[ \frac{6\sqrt{\gamma\pi}}{\xi^2} \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) - \frac{6}{\xi} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) - \right. \\ \left. - \xi \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \right] \sin \varphi \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда для возмущений скоростей  $\Phi_{1,2}^{(2)}$  получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} = 3,152 \frac{A^2}{\xi^2} \left[ \frac{6\sqrt{\gamma\pi}}{\xi^2} \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) - \frac{6}{\xi} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) - \right. \\ \left. - \xi \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) \right] (\cos 2\varphi + \cos^2 \varphi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Phi_2^{(2)} = 3,152 \frac{A^2}{\xi^2} \left[ \frac{6\sqrt{\gamma\pi}}{\xi^2} \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) - \frac{6}{\xi} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4} \right) - \right.$$



$$-\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) - \frac{\xi^3}{4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \Big] \sin 2\varphi \quad (3.15)$$

Для функции  $\Phi_4(\xi, \varphi)$  аналогичным образом найдено третье приближение

$$\Phi_4^{(3)} = A^4 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) (0,109\xi^3 \cos^3 \varphi - 0,123\xi \cos \varphi) \quad (3.16)$$

Суммируя полученные выше результаты, окончательно запишем решение задачи (2.5)–(2.7) для концентрационно-теплого термика в виде

$$v_{r,\varphi} = \Pi_0^{1/4} t^{-1/2} \nu^{1/2} \Phi_{1,2}, \quad \omega = \Pi_0^{1/4} t^{-3/2} \nu^{1/2} \Phi_4, \quad \Psi = \Pi_0^{3/4} t^{1/2} \nu^{3/2} \Phi_6 \quad (3.17)$$

$$\Omega = t^{-1} \Phi_5, \quad \vartheta = \frac{q_0}{g\beta \Pi_0^{3/4}} t^{-3/2} \nu^{1/2} \Phi_4, \quad c_j = \frac{\pi j_0}{g\mu_a \mu_b^{-1} \kappa_j \Pi_0^{3/4}} t^{-3/2} \nu^{1/2} \Phi_4$$

где структурные функции  $\Phi_j$  определяются соотношениями (3.6)–(3.16). Использованный метод последовательных приближений, как это видно из записи (3.1) и (3.6)–(3.16), формально сводит решение задачи к разложению в ряды по малому параметру  $A$ .

Из полученных результатов следует, что при мгновенном воздействии источника в моменты времени, близкие к начальному, среда еще неподвижна, а изоповерхности  $\omega$  представляют собой концентрические сферы. Образующееся затем вихревое кольцо расширяется только в боковом направлении, и только потом происходит формирование автомодельного всплывающего торообразного вихря.

В качестве примера на фиг. 1 изображена термогазодинамическая структура течения, построенная в автомодельных переменных  $\{\xi^{\circ} = r/\Pi_0^{1/4} t^{1/2} \nu^{1/2}, \varphi\}$  для значения  $\nu=0,2$ . Сплошные кривые – изолинии плавучести  $\Phi_4(\xi, \varphi)$  (1–0,935, 2–0,813, 3–0,488, 4–0,081), пунктирные – изолинии функции тока  $\Phi_6(\xi, \varphi)$  (1–0,984, 2–0,925, 3–0,349).

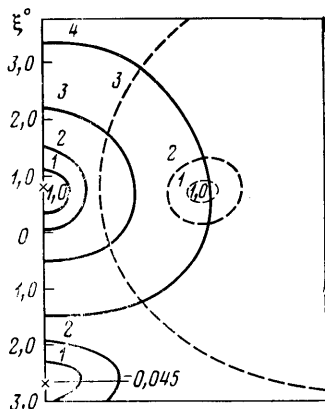
Обе автомодельные величины отнесены к своим максимальным значениям  $\Phi_4^{\max} = 1,23$ ,  $\Phi_6^{\max} = 0,504$ .

Видно, что турбулентное конвективное движение представляет собой осесимметричный тороидальный вихрь с безразмерным радиусом  $\xi^{\circ} = \xi_*^{\circ} = 3,1$  и углом раствора  $\varphi = \varphi_* = 75^{\circ}$ . При этом над источником  $\xi = 0$  находится сформировавшееся ядро положительной плавучести  $\Phi_4$ , а под источником – весьма слабая (для  $\nu=0,2$ ,  $\Phi_4^{\min}/\Phi_4^{\max} \approx -0,045$ ,  $\Phi_6^{\min}/\Phi_6^{\max} \approx -10^{-4}$ ), опускающаяся вниз область отрицательных значений  $\Phi_4$ ,  $\Phi_6$  (в нижней части фиг. 1 тонкими сплошными линиями даны кривые  $\Phi_4 = -0,039(1)$ ,  $\Phi_4 = -0,023(2)$ ). Изолинии положительных величин ускорения силы плавучести представляют собой овалы «яблокообразной» формы с экстремумом, расположенным на оси симметрии в точке  $X_0 = \xi_*^{\circ} = 0,8$ .

Фигуры 2 и 3 дают представление о структуре функций  $\Phi_4$  (фиг. 2) и  $\Phi_6$  (фиг. 3) (кривые 1–4 на фиг. 2 построены для значений угла  $\varphi^{\circ} = 0, 60, 120, 180^{\circ}$ , а кривые 1–6 на фиг. 3 – для  $\varphi = 30, 60, 75, 90, 120, 150^{\circ}$ ). Максимальное значение  $\Phi_4$  равно  $\Phi_4^{\max} \approx 1,23$ , а экстремум функции тока  $\Phi_6$  достигается при  $\xi_0 \approx 3,1$ ,  $\varphi_* \approx 75^{\circ}$  и принимает значение  $\Phi_6^{\max} \approx 0,504$ .

Из фиг. 2, 3 следует, что с увеличением угла  $\varphi$  «перегрев» газа постепенно уменьшается, а расход увеличивается, достигает максимального значения, а затем снова падает (функция тока проходит через максимум). При больших значениях угла  $\varphi$  автомодельные функции принимают отрицательные значения с амплитудами (по абсолютной величине) на два (для  $\Phi_4$ ) и четыре порядка (для  $\Phi_6$ ) меньше их максимальных положительных значений. Как уже отмечалось, эта область опускается вниз и соответствует слабому «переохлаждению» и реверсу вихря.

Представляется интересным исследовать асимптотическое поведение экстремальных точек плавучести  $\omega$ , завихренности  $\Omega$  и функции тока  $\Psi$  от параметров течения и коэффициента турбулентности  $\nu$ . Точки, где возмущения этих функций экстремальны, определяются из условий



Фиг. 1

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_6}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi_5}{\partial \xi} = 0,$$

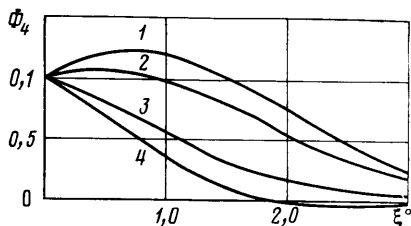
$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_6}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_5}{\partial \varphi} = 0$$

Используя полученное выше решение, приходим к следующим результатам (для больших  $\nu$ ).

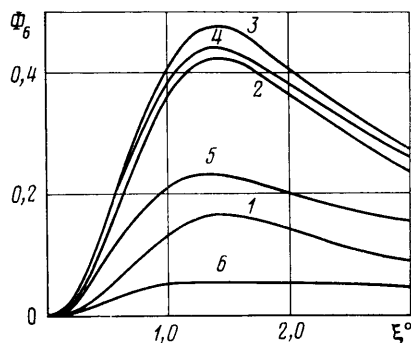
Максимум возмущения  $\omega$  достигается на оси симметрии в точке

$$X_{\omega,*} = r_{\omega,*} = \frac{\Pi_0^{1/4} t^{1/2}}{8\pi^{3/2} \nu^{3/2}} \left( 1,86 - \frac{3,76}{64\pi^3 \nu^4} \right)$$

а центр образовавшейся всплывающей «нагретой» области движется вверх со скоростью



Фиг. 2



Фиг. 3

$U_{\omega,*} = dr_{\omega,*}/dt$ . При этом зависимость  $\omega_*$  в точке экстремума  $X_{\omega,*}$  от параметров течения и времени имеет вид

$$\omega_* = \frac{\Pi_0^{1/4}}{8\pi^{3/2} t^{3/2} \nu^{3/2}} \left( 1 + \frac{0,87}{64\pi^3 \nu^4} \right)$$

Максимумы завихренности  $\Omega$  и функции тока  $\Psi$  расположены в точках с координатами  $\{r_{\Omega,*}, \varphi_{\Omega,*}\}$ ,  $\{r_{\Psi,*}, \varphi_{\Psi,*}\}$ , зависимость которых от времени и параметров течения определяется асимптотическими соотношениями

$$\varphi_{*,\Omega} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1,114}{8\pi^{3/2} \nu^2}, \quad \varphi_{*,\Psi} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{0,522}{8\pi^{3/2} \nu^2}$$

$$r_{\Omega,*} \approx \Pi_0^{1/4} t^{1/2} \left( \sqrt{2\nu} + \frac{0,878}{64\pi^3 \nu^{1/2}} \right)$$

$$r_{\Psi,*} \approx \Pi_0^{1/4} t^{1/2} \left( 3,02\sqrt{\nu} + \frac{13,04}{64\pi^3 \nu^{1/2}} \right)$$

а радиальные скорости перемещения соответствующих экстремумов даются формулами  $U_{*,\Omega} = dr_{*,\Omega}/dt$  и  $U_{*,\Psi} = dr_{*,\Psi}/dt$ . При этом для вертикальных и горизонтальных  $X_{\Omega,*} = r_{\Omega,*} \cos \varphi$ ,

$$U_{\alpha, \varphi}^* = \frac{dr_{\alpha, \varphi}}{dt} \cos \varphi, \quad Y_{\alpha, \varphi}^* = r_{\alpha, \varphi}^* \sin \varphi, \quad V_{\alpha, \varphi}^* = \frac{dr_{\alpha, \varphi}}{dt} \sin \varphi$$

составляющих координат и скоростей движения максимумов завихренности и функции тока будем иметь в первом приближении по параметру  $\nu$

$$X_{\alpha}^* = \frac{1,576 \Pi_0^{1/4} t^{1/2}}{8\pi^{3/2} \nu^{1/2}}, \quad U_{\alpha}^* = \frac{1,576 \Pi_0^{1/4}}{16\pi^{3/2} \nu^{1/2} t^{1/2}}$$

$$Y_{\alpha}^* = \sqrt{2} \Pi_0^{1/4} t^{1/2} \nu^{1/2}, \quad V_{\alpha}^* = 0,707 \Pi_0^{1/4} \nu^{1/2} t^{-1/2}$$

$$X_{\varphi}^* = \frac{1,577 \Pi_0^{1/4} t^{1/2}}{8\pi^{3/2} \nu^{1/2}}, \quad U_{\varphi}^* = \frac{1,577 \Pi_0^{1/4}}{16\pi^{3/2} \nu^{1/2} t^{1/2}}$$

$$Y_{\varphi}^* = 3,02 \Pi_0^{1/4} t^{1/2} \nu^{1/2}, \quad V_{\varphi}^* = 1,51 \Pi_0^{1/4} \nu^{1/2} t^{-1/2}$$

Из полученных предельных соотношений следует, что с уменьшением коэффициента турбулентности  $\nu$  вертикальные характерные размеры всплывающего вихря (и соответственно скорости его вертикального движения) возрастают пропорционально  $\nu^{-1/2}$ , а горизонтальные уменьшаются как  $\nu^{1/2}$ . С ростом вязкости исследуемая структура стремится принять форму «лепешки», растекаясь в горизонтальном направлении, и, наоборот, с уменьшением последней вытягивается вверх, образуя подобие вертикального пограничного слоя [4, 10]. При этом линейные размеры области возрастают  $\sim t^{1/2}$ , а скорость ее движения уменьшается как  $t^{-1/2}$ .

В заключение сравним скорость газа  $U^*(0, 0)$  в точке  $\xi=0, \varphi=0$  (начало координат) и лагранжеву скорость всплывания «нагретой» области  $U_{\omega}^*$ . Из (3.17) при  $\xi \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$  следует  $U^*(0, 0) = \Pi_0^{1/4} / 6\pi^{1/2} \nu^{1/2} t^{1/2}$ , следовательно,  $U^*(0, 0) / U_{\omega}^* \simeq \sqrt{2}$ .

Таким образом, скорость движения газа в турбулентном термике в  $\sqrt{2}$  больше скорости подъема последнего. Для ламинарного теплового термика, исследованного в [2], это отношение равно  $U^*(0, 0) / U_{\omega}^* = 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Предельные законы свободно восходящих конвективных потоков.— ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 12, с. 1463—1465.
2. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 295 с.
3. Гостинцев Ю. А., Суханов Л. А., Солодовник А. Ф. Предельные законы нестационарных свободно восходящих турбулентных конвективных движений в атмосфере.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 311—314.
4. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В. К теории аэродинамики, самовоспламенения и выгорания турбулентных термик, вихревых колец и струй в свободной атмосфере.— Хим. физика, 1982, № 9, с. 1279—1290.
5. Онуфриев А. Т. Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва.— ПМТФ, 1967, № 2, с. 3—13.
6. Тарасов В. Ф. О движении всплывающего вихревого кольца.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, 1975, с. 210—218.
7. Morton V. R., Taylor G., Turner J. S. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources.— Proc. Roy. London, Ser. A, 1956, v. 234, № 1196, p. 1—23.
8. Turner J. S. Buoyant vortex rings.— Proc. Roy. Soc., London, 1957, v. A239, № 1246, p. 61—75.
9. Morton V. R. Buoyant plumes in moist atmosphere.— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, № 2, p. 127—144.
10. Мальбахов В. Н. К теории термик в неподвижной атмосфере.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 8, № 7, с. 683—694.
11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
12. Баренблатт Г. М. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 206 с.
13. Лаврентьев М. А., Шабаг Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
14. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.XI.1983