

УДК 536.25

**УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ
В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА,
ЛОКАЛЬНО НАГРЕВАЕМОМ СВЕРХУ**

САНОЧКИН Ю. В.

Рассмотрена стационарная термокапиллярная конвекция в тонком горизонтальном слое жидкости с числом Прандтля $Pr < 1$ при локальном нагреве ее сверху в условиях, когда кривизна свободной поверхности мала. Показано, что движение имеет ячеистую структуру. Размер конвективной ячейки определяется из решения спектральной задачи, к которой сводится интегрирование системы уравнений свободной конвекции. Если число Марангони (Пекле) достаточно велико, то длина конвективной ячейки оказывается большой по сравнению с толщиной слоя. Рассмотрена картина конвекции и получено выражение для скорости развивающегося течения.

При неизотермичности свободной поверхности в жидкости развивается термокапиллярная конвекция. Одномерная модель термокапиллярного движения предложена в [1]. Рассматривалось движение тонкого слоя жидкости в средней части плоской кюветы в предположении постоянной толщины слоя. Уравнение переноса тепла в жидкости не привлекалось, и на свободной поверхности постулировалось линейное распределение температуры. На эту непоследовательность было обращено внимание в [2], где в приближении теории мелкой воды дана строгая постановка и решена аналогичная задача о движении жидкости под действием примеси поверхностно-активного вещества. Решение [1] обобщено в [3], где учтены влияние силы тяжести и деформация свободной поверхности. Одномерное движение в слое нагреваемой снизу жидкости с учетом действия капиллярных сил рассмотрено в [4]. Плоское стационарное термокапиллярное течение невесомой жидкости в прямоугольном канале, противоположные стенки которого поддерживаются при разных температурах, численно исследовалось в [5] при заданной форме поверхности раздела. Двумерное движение, возникающее под действием капиллярной силы в тонком горизонтальном слое жидкости, локально нагреваемом сверху, рассмотрено для больших чисел Марангони в [6]. Полученное там в предположении постоянной толщины слоя точное решение уравнений свободной конвекции справедливо для чисел Прандтля $Pr \approx 1$. В этом случае конвективные члены в уравнении движения жидкости оказываются малыми.

Представляет интерес исследовать термокапиллярную конвекцию в тонком слое локально нагреваемого со стороны свободной поверхности жидкого металла, когда $Pr < 1$ и необходим учет инерции жидкости. Указанная ситуация имеет место, например, при воздействии на поверхность металла электронного пучка (луча лазера) или в катодном пятне вакуумной дуги и может быть изучена на модели слоя жидкости в достаточно длинной и широкой кювете.

Пусть на дне кюветы $y = -h_0$ имеется слой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью $y = \zeta(x)$. Если толщина слоя $h = h_0 + \zeta$ достаточно мала, то даже при нагреве жидкости снизу конвекцией за счет архимедовых сил можно пренебречь. Для многих капельных жидкостей, в том числе жидких металлов, это имеет место, если $h < 1$ см [4, 7]. Поэтому плотность жидкости можно считать не зависящей от температуры. Направим ось x против градиента температуры и поместим начало координат на некотором расстоянии, большем h , от места расположения сосредоточенного источника тепла на свободной поверхности. Будем рассматривать конвекцию в области $x > 0$, где не сказываются влияние зоны

поворота потока под местом нагрева и детали способа подвода тепла. Теплообмен через свободную поверхность отсутствует, температура dna кюветы T_w считается постоянной. Это соответствует контакту жидкости с вакуумом сверху и с хорошим проводником тепла большого размера снизу (или контакту жидкой и твердой фаз одного вещества). Как и в [6], ограничимся рассмотрением случая больших чисел Марангони M , когда характерный продольный масштаб течения l много больше h . Это дает возможность воспользоваться упрощениями теории пограничного слоя. Вопрос о корректности применения к описанию конвективных структур приближения пограничного слоя будет рассмотрен после получения решения. Исходные уравнения стационарной капиллярной конвекции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь η — вязкость, χ — температуропроводность, g — ускорение силы тяжести.

Граничные условия

$$\begin{aligned} v_x(x, -h_0) = v_y(x, -h_0) = 0, \quad T(x, -h_0) = T_w, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=-\zeta} = 0 \\ \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\zeta} = \frac{d\sigma}{dx} = -\alpha \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=\zeta}, \quad p(x, \zeta) = 0 \\ v_y(x, \zeta) = \zeta' v_x(x, \zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\alpha = -(d\sigma/dT) = \text{const}$, поскольку σ линейно зависит от T .

Последнее равенство (2) — кинематическое условие на свободной поверхности. Два предпоследних условия выражают непрерывность тензора напряжений на поверхности раздела. Если радиус кривизны поверхности $R \gg h$, то легко показать, что капиллярным давлением можно пренебречь. Если предположить еще, что ускорение частиц жидкости по оси y оказывает незначительное влияние на давление, то динамическое условие на поверхности, содержащее σ , сводится к предпоследнему равенству (2). Строго говоря, x и y в дифференциальных условиях (2) должны быть заменены на криволинейные координаты, связанные со свободной поверхностью, v_x — на соответствующую проекцию скорости. Иными словами, задача (1) — (2) сформулирована здесь в приближении теории мелкой воды [2].

В дальнейшем рассматривается случай, когда поток жидкости в любом сечении равен нулю

$$\int_{-h_0}^{\zeta} v_x dy = 0 \quad (3)$$

Интегрируя последнее уравнение (1), находим, что

$$p = \rho g (\zeta - y) \quad (4)$$

т. е. $\partial p / \partial x$ зависит только от x .

Определим условия, когда толщину слоя жидкости можно считать приблизительно постоянной. Для оценки порядка величины ζ' опустим в уравнении движения жидкости (1) инерционные члены и проинтегрируем его с учетом (4). Это можно сделать, поскольку, как будет показано ниже, учет конвективных членов приводит к количественным изменениям в решении (например, величина скорости увеличивается в зависимости от Pr

в несколько раз), а вид решения остается прежним. В результате имеем

$$v_x = \frac{h_0 + y}{2\eta} \left[\frac{\partial p}{\partial x} (y - h_0 - 2\zeta) - 2\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=\zeta} \right]$$

Если подставить это выражение в (3), получим соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{3\alpha}{2(h_0 + \zeta)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=\zeta}$$

откуда следует

$$\frac{d\zeta}{dx} \sim \beta, \quad \beta = \frac{\alpha \Delta T}{\rho g h_0^2} \quad (5)$$

Таким образом, если $\beta \ll 1$, деформация свободной поверхности жидкости мала и толщину слоя можно считать неизменной. В данной работе будет рассматриваться решение для этого случая. Полагая в (2)–(3) $\zeta = 0$, решение (1) ищем в виде

$$v_x = \left(1 - \frac{x}{l} \right) u(y), \quad T = T_w + \Delta T \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \theta(y),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \rho \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (6)$$

где $\Delta T = T_0 - T_w$ — перепад температуры поперек слоя в начальном сечении, l — постоянная разделения, $\gamma = \gamma(l)$. Две последние константы подлежат определению. (Если температура нарастает с координатой x , то в (6) следует подставить $(1+x/l)$). Из уравнения неразрывности находим поперечную скорость

$$v_y = \frac{1}{l} \int_{-h_0}^y u \, dy \quad (7)$$

причем, согласно (3), кинематическое условие выполняется автоматически. Подставляя (6), (7) в уравнение движения и переходя к безразмерным переменным, приходим к нелинейной краевой задаче

$$w'' + aw^2 - aw' \int_{-1}^{\xi} w \, d\xi - b = 0, \quad w(-1) = 0, \quad w'(0) = 1$$

$$\xi = \frac{y}{h_0}, \quad w = \frac{u}{u_*}, \quad u_* = \frac{2\alpha \Delta T h_0}{\eta l}, \quad a = \frac{u_* h_0^2}{\nu l}, \quad b = \frac{\gamma h_0^2}{\nu u_*} \quad (8)$$

Вследствие (3) параметры a , b не являются независимыми. При $a \rightarrow 0$, что соответствует пренебрежению конвективными членами в уравнении движения жидкости, задача имеет простое решение [6]. В общем случае уравнение (8), которое может быть сведено к дифференциальному уравнению 3-го порядка, не поддается решению в конечном виде. Однако нетрудно получить решение задачи в рядах. Последовательно дифференцируя (8) в точке $\xi = 0$, находим

$$w'(0) = 1, \quad w''(0) = b - aw^2(0), \quad w'''(0) = -aw(0), \quad w^{(4)}(0) = -a, \dots$$

Для поставленных в работе целей достаточно ограничиться аппроксимацией решения в низшем допустимом порядке

$$w \simeq w_0 + \xi + \frac{1}{2}(b - aw_0^2)\xi^2 - \frac{1}{3!}aw_0\xi^3, \quad w_0 = w(0)$$

Заметим, что в теории пограничного слоя обычно оказывается достаточно точным приближенное описание профиля скорости полиномом 3–4-й сте-

пени. Постоянные w_0 и b определяются из граничного условия при $\xi = -1$ и условия (3)

$$w_0 = \left(4 - \frac{a}{12}\right)^{-1}, \quad b = aw_0^2 + \left(6 - \frac{a}{2}\right)w_0$$

Тогда величину w можно представить в виде

$$w(\xi, a) = w_0(1+\xi) \left[1 + \left(3 - \frac{a}{12}\right)\xi - \frac{a}{6}\xi^2 \right] = -\frac{6}{a}w_0(1+\xi)(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2) \quad (9)$$

$$\xi_{1,2} = \left(\frac{9}{a} - \frac{1}{4}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{9}{a} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{6}{a}}$$

Здесь корни ξ_1, ξ_2 имеют разные знаки.

Интегрируя (9), находим выражение для безразмерной поперечной скорости (7)

$$v(\xi, a) = w_0\xi(1+\xi)^2 \left(1 - \frac{a}{24}\xi\right), \quad v_\nu = \frac{h_0}{l} u_* v \quad (10)$$

Решение задачи завершается интегрированием уравнения переноса тепла в жидкости. Разделяя в нем переменные, приходим к линейной спектральной задаче

$$\theta'' - \lambda v \left(\xi, \frac{\lambda}{\text{Pr}}\right) \theta' + 2\lambda w \left(\xi, \frac{\lambda}{\text{Pr}}\right) \theta = 0 \quad (11)$$

$$\theta(-1) = 0, \quad \theta'(0) = 0$$

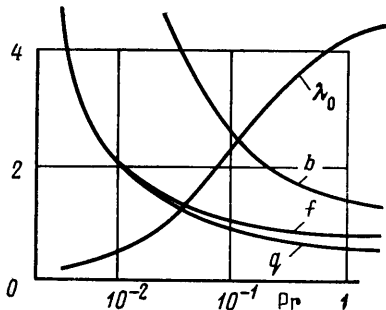
в которую параметр $\lambda = a \text{Pr}$ входит нелинейно.

Основная задача работы состоит в изучении влияния инерционных членов в уравнении движения на скорость конвекции и размер ячейки, т. е. зависимости решения от числа Прандтля. Дело в том, что при $\text{Pr} \geq 1$ собственные значения λ и определяемые ими величины не зависят от Pr [6]. Согласно (11), безразмерные величины λ, a, b, w_0 зависят только от числа Прандтля. Поэтому прежде всего необходим качественный анализ зависимости $\lambda(\text{Pr})$ и проверка ее асимптотики при $\text{Pr} \geq 1$. Точный количественный анализ решения задачи (11) можно выполнить численно с помощью ЭВМ. Однако это вряд ли целесообразно в данной постановке, поскольку само уравнение (11) неточно: его коэффициентами являются в отличие от [6] приближенные выражения для скорости потока (9), (10). Поэтому ограничимся приближенным решением задачи (11). Собственные числа (11) принадлежат дискретному спектру и принимают положительные и отрицательные значения ($\lambda = 0$ не является собственным числом). Определим наименьшее положительное собственное значение λ_0 , поскольку соответствующая собственная функция θ_0 не имеет узлов внутри слоя жидкости. (Состояния, соответствующие следующим собственным числам, в данной работе не рассматриваются.) Использовался метод Галеркина. Решение аппроксимировалось одно- или двучленным разложением

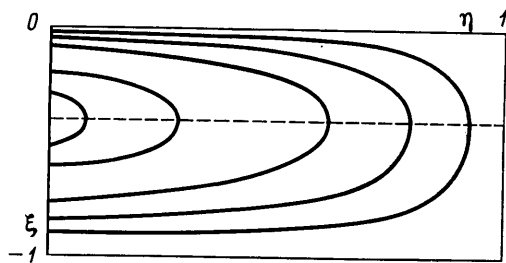
$$\theta = \sum C_m \psi_m$$

где в качестве базисных функций использовались $\psi_1 = 1 - \xi^2, \psi_2 = 1 + \xi^3$. При этом получалось характеристическое уравнение с коэффициентами, зависящими от Pr , 2-й или 4-й степени соответственно. Половина его корней имеет один знак, половина — другой. Исследование наименьшего положительного корня λ_0 показало, что при $\text{Pr} \rightarrow 0, \lambda_0 \rightarrow 0$, при этом $a \rightarrow 48 (w_0 \rightarrow \infty)$. Это следует как из векового уравнения первого приближения (с использованием либо ψ_1 , либо ψ_2), так и из уравнения второго приближения. Отметим, что различия между вычисленными значениями λ_0 при малых Pr

невелики. Например, при $Pr=10^{-2}$ различие между λ_0 первого приближения меньше 10%, значения λ_0 , полученные в первом и втором приближениях, отличаются менее чем в 2 раза и с уменьшением Pr разница становится еще меньше. (С ростом Pr различие увеличивается.) При $Pr \rightarrow \infty$ $\lambda_0 \rightarrow \text{const}$, так что $a = (\lambda_0/Pr) \rightarrow 0$. Существенно, что указанная асимптотическая формула оказывается справедливой уже при $Pr \geq 1-2$. Этот результат получается из характеристического уравнения в обоих приближениях. Значения λ_0 различаются при этом в несколько раз. Таким образом, полученное решение при $Pr > 1$ имеет правильную асимптотику и качественно согласуется с решением [6]. Приведем результат решения характеристического уравнения первого приближения, поскольку он дает простое ана-



Фиг. 1



Фиг. 2

литическое выражение для $\lambda_0(Pr)$. Именно для параболической аппроксимации распределения температуры поперек слоя $\theta_0 = 1 - \xi^2$ имеем

$$\lambda_0 = -(127,5Pr + 12,45) + [(127,5Pr + 12,45)^2 + 1195Pr]^{1/2}. \quad (12)$$

Интересно отметить, что вычисленное по (12) значение λ_0 при $Pr=1$ равняется 4,22, что удовлетворительно согласуется со значением $\lambda_0 \approx 5,58$, полученным в [6]. Зависимость $\lambda_0(Pr)$ показана на фиг. 1.

Проанализируем полученное решение. Максимальная продольная скорость течения жидкости достигается на свободной поверхности и (в размерном виде) равна

$$u_0 = f(Pr) \sqrt{\frac{\alpha \Delta T \chi}{h_0 \eta}}, \quad f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{2}} \left(1 - \frac{\lambda_0}{48Pr}\right)^{-1} \quad (13)$$

Выражение (13) отличается от соответствующей формулы для скорости [6] множителем $f(Pr)$. Указанная функция приведена на фиг. 1. Относительно небольшое увеличение скорости при малых Pr объясняется соответствующим увеличением противодавления, что демонстрирует зависимость $b(Pr)$ (фиг. 1). Постоянная разделения l определяется из (12)

$$l = q(Pr) h_0^{1/2} \sqrt{\frac{\alpha \Delta T}{\eta \chi}}, \quad q = \sqrt{\frac{2}{\lambda_0}} \quad (14)$$

При $x=l$ поток тепла исчезает, поэтому характерный масштаб l представляет собой длину, на которую распространяется в жидкости тепло от источника. Формула (14) отличается от соответствующего выражения [6] (кроме незначительного числового множителя ≈ 1) тем, что при $Pr < 1$ λ_0 зависит от Pr . Функция $q(Pr)$ оказывается приблизительно равной $f(Pr)$ (фиг. 1). Существенно, что при $Pr > 1$ функции f , q и b выходят на константу.

Конвекция имеет, таким образом, ячеистую структуру с продольным размером конвективной ячейки l . С помощью решений вида (6) можно

описать термокапиллярное движение в кювете соответствующей длины, нагреваемой (охлаждаемой) симметрично или несимметрично со стороны одного или обоих торцов или между ними [6]. Сравним количественно скорости конвекции для двух жидкостей с разными коэффициентами теплопроводности. Пусть их остальные характеристики и внешние условия совпадают. Тогда для обычной жидкости с $Pr > 1$ имеем

$$u_0 = \frac{u_m}{\sqrt{Pr}} < u_m, \quad u_m = \sqrt{\frac{\alpha \Delta T}{\rho h_0}}$$

Для жидкого металла ($Pr < 1$)

$$u_0 = \frac{f(Pr)}{\sqrt{Pr}} u_m > u_m$$

При $Pr = 10^{-2}$ величина u_0 превышает u_m примерно в 20 раз. Указанная зависимость скорости от χ объясняется тем, что с ростом теплопроводности уменьшается l и возрастает градиент температуры на свободной поверхности. Действительно, из (14) следует, что для $Pr < 1$ размер конвективной ячейки

$$l = q(Pr) \sqrt{Pr} l_m, \quad l_m = \frac{h_0}{\eta} \sqrt{\rho \alpha \Delta T h_0}$$

меньше минимальной длины l_m для случая $Pr \geq 1$.

Картина течения жидкости имеет следующий вид. Движение с $v_x > 0$ происходит в приповерхностном слое толщиной $|\xi_1|$, возвратный поток занимает остальную часть слоя. Величина $|\xi_1|$ слабо зависит от Pr , увеличиваясь от 0,33 при $Pr \geq 1$ до 0,42 при $Pr \rightarrow 0$. Линии тока при $Pr < 1$ зависят от числа Прандтля и даются уравнением, которое в безразмерных переменных $\xi = y/h_0$, $\eta = x/l$ имеет вид $|1 - \eta| |v(\xi, Pr)| = \text{const}$. Они представлены на фиг. 2 для $Pr = 10^{-2}$. Линии тока при малых Pr вследствие большей скорости конвекции оказываются более вытянутыми в продольном направлении. По той же причине и вследствие того, что обратное течение охватывает меньшую, чем при $Pr \geq 1$, часть слоя, профили линий тока являются более наполненными и прижимаются к дну кюветы. Условия для конвективного переноса тепла при $Pr < 1$, таким образом, улучшаются. Согласно (6), плотность потока тепла спадает вдоль нижней границы слоя по параболическому закону

$$j = \frac{2\kappa \Delta T}{h_0} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

Полный тепловой поток через дно кюветы, отнесенный к единице длины $I = 2\kappa \Delta T l / 3h_0$, пропорционален мощности источника тепла.

Остановимся теперь на вопросе о возможности использования для описания ячейистой конвекции приближения пограничного слоя. Требование $h_0 \ll l$ приводит к следующему неравенству:

$$q(Pr) \sqrt{\frac{\alpha \Delta T h_0}{\eta \chi}} = q \sqrt{M} \gg 1, \quad (15)$$

где M — число Марангони.

Как видно из (10), $v_y \sim h_0 v_x / l$ и условие $v_y \ll v_x$ может нарушаться только в окрестности линий, где $v_x = 0$. Оценим размер областей, где неприменимы уравнения пограничного слоя. Используя (6), (9) и (10), легко показать, что $v_y \sim v_x$ в полосе шириной $\Delta \xi \sim (h_0/l)$ около прямой $\xi = \xi_1$ и в области длиной $\Delta x \sim h_0$, примыкающей к сечению $x = l$. В этих областях малых (относительно u_0) скоростей движения потока должны использоваться полные уравнения Навье — Стокса. Однако поскольку размер указан-

ных областей мал по сравнению с площадью основного прямоугольника, можно ожидать, что погрешность, вносимая от использования в них неточных уравнений, также будет мала. Область применимости данного рассмотрения, таким образом, определяется условиями (5), (15) и охватывает весьма широкую область параметров.

В заключение оценим числа Пекле и Рейнольдса. Используя (13), (14) в качестве характерных масштабов, имеем

$$\text{Re} > \text{Pe} = f(\text{Pr}) q(\text{Pr}) M$$

т. е. при $\text{Pr} < 1$ в отличие от [6] $\text{Pe} > M$. Соотношение (14) между h_0 и l можно записать в виде, подобном тому, как записывается толщина пограничного слоя на пластине

$$h_0 = l / \sqrt{\text{Pr Re}} > l / \sqrt{\text{Re}}$$

Таким образом, построенное точное решение (6) задачи свободной капиллярной конвекции соответствует движению с большими числами Марангони, Пекле и Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959, § 68, 699 с.
2. Chia-Shun Yih. Fluid motion induced by surface-tension variation.— *Phys. Fluids*, 1968, v. 11, № 3, p. 477—484.
3. Levich V. G., Krylov V. S. Surface-tension-driven phenomena.— *Ann. Rev. Fluid Mech.* v. 1, Palo Alto, Calif., 1969, p. 302—303.
4. Бирюх Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости.— *ПМТФ*, 1966, № 3, с. 69—72.
5. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976, гл. 8, § 4, 504 с.
6. Саночкин Ю. В. Термокапиллярная конвекция в тонком слое жидкости, локально нагреваемом сверху — *ПМТФ*, 1983, № 6, с. 134—137.
7. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension.— *J. Fluid Mech.*, 1958, v. 4, № 5, p. 489—500

Москва

Поступила в редакцию
6.IX.1982.