МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1984

УДК 534.222

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В МЯГКИХ ГРУНТАХ

ДУНИН С. З., НАГОРНОВ О. В.

Получено уравнение, описывающее распространение длинноволновых сейсмических сигналов конечной амплитуды в мягких грунтах. Вычислен коэффициент нелинейности насыщенной пористой среды. Исследован относительный вклад нелинейных эффектов и диссипативных, обусловленных относительным движением компонент среды.

Вопросами распространения сейсмических волн в насыщенных пористых средах занимались много исследователей (в [1] имеется подробная библиография), значительный вклад в теорию был внесен авторами работ [1–3].

Как установлено в [1], мягкие грунты характеризуются относительно малыми значениями параметра цементации $\varkappa=\beta_1 K$ (где β_1 – сжимаемость материала твердой матрицы, K^{-1} – эффективная сжимаемость скелета среды) и фазовые давления в водонасыщенном мягком грунте равны между собой с точностью до величин порядка $\varkappa$ [1–2]. В мягких грунтах существуют волны 1-го рода, распространяющиеся как в однофазной среде с внутренней степенью свободы, и волны 2-го рода, характеризующиеся небольшой скоростью распространения и аномально высоким коэффициентом поглощения. Фронт слабо нелинейной волны в мягких грунтах формируется звуковыми возмущениями 1-го рода и описывается в рамках модели насыщенной пористой среды с равными давлениями – моделью Х. А. Рахматулина. В [3] рассмотрено распространение стационарной сильной ударной волны. В данной статье анализируется поведение возмущения относительно небольшой амплитуды.

В этом приближении в работе вычислен коэффициент нелинейности насыщенной пористой среды и описан как нестационарный, так и стационарный режимы распространения возмущения, при котором нелинейность уравновешивается релаксационной вязкостью, возникающей за счет обмена импульсом между фазами.

В последнее время появились работы [4, 5], указывающие на то, что для грунтов характерны весьма большие коэффициенты нелинейности $\varepsilon=\rho/c\partial c/\partial\rho$, где ρ – плотность среды, c – скорость звука. Как показано ниже, в широком диапазоне характерных параметров грунтов учет нелинейных слагаемых в волнах небольшой амплитуды является определяющим. Развиваемый подход позволяет последовательно указать границы применимости линейного приближения и относительной роли нелинейных и диссипативно-дисперсионных слагаемых в волновом уравнении.

В рамках модели Х. А. Рахматулина система уравнений непрерывности и движения для каждой фазы в плоском одномерном случае принимает следующий вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2)+\frac{\partial}{\partial x}(wm\rho_2)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\rho_1]+\frac{\partial}{\partial x}[(1-m)u\rho_1]=0$$

$$m\rho_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+m\frac{\partial p}{\partial x}+m_0(1-m_0)\frac{\rho_{01}\rho_{02}}{\theta\rho_0}(w-u)=0 \tag{1}$$

$$(1-m)\rho_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+(1-m)\frac{\partial p}{\partial x}-m_0(1-m_0)\frac{\rho_{01}\rho_{02}}{\theta\rho_0}(w-u)=0$$

Здесь ρ_1, ρ_2, u, w – плотности фаз и их массовые скорости, m_0, m – начальная и текущая пористость, p – давление в фазах, $\rho_0=(1-m_0)\rho_{01}+m_0\rho_{02}$ – равновесная плотность среды, $\theta=k_0(1-m_0)\rho_{01}\rho_{02}/(\mu m_0\rho_0)$ – время релаксации, k_0 – проницаемость среды, μ – вязкость жидкой фазы.

Система уравнений (1) дополняется уравнением состояния Тэта для каждой фазы

$$p=\rho_{0i}c_i^2/n_i[(\rho_i/\rho_{0i})^{n_i}-1]$$

где c_i — равновесные скорости звука в каждой из фаз, n_i — постоянные, $i=1, 2$. Система уравнений (1) описывает суспензию твердых частиц в жидкости, мягкие водонасыщенные грунты.

Рассмотрим сейсмические длинноволновые возмущения конечной амплитуды, бегущие в одном направлении, с характерными частотами, такими, что $\omega\theta\ll 1$ (значения $m_0^{-1}\theta$ для различных грунтов приведено в [1]: $m_0^{-1}\theta\sim 10^{-9}-10^{-3}$ с). Предполагаем, что число Маха $M=w/c_0$ мало $M\ll 1$, где $c_0=(\beta\rho_0)^{-1/2}$ — равновесная скорость звука в среде, $\beta=(1-m_0)\beta_1+m_0\beta_2$ — сжимаемость двухфазной среды, $\beta_i=(\rho_{0i}c_i^2)^{-1}$ — сжимаемость i-й фазы. Считая, что нелинейные и диссипативные эффекты оказывают незначительное влияние на профиль волны на расстояниях порядка ее длины волны, в системе уравнений (1) оставим члены до второго порядка малости включительно по отношению к величинам w/c_0, ρ_i'/ρ_{0i}, $p'/(\rho_0 c_0^2)$, m'/m_0, где штрихом обозначено отклонение соответствующих величин от ее равновесного значения. Переходя в сопутствующую систему координат $x=x$, $\tau=t-x/c_0$, учтем, что в отсутствие диссипативных и нелинейных слагаемых в уравнениях все величины зависят только от одной переменной τ. При учете нелинейных и диссипативных слагаемых зависимость всех величин будет также определяться и медленной переменной x [6]. Так как изменение формы волны на расстояниях порядка ее длины незначительно, то следует ожидать проявления нелинейных эффектов на расстояниях $x\gg\lambda$, где λ — длина волны. С точностью до величин второго порядка малости в новых переменных система уравнений (1) примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\rho_2'}{\rho_{02}}+\frac{m'}{m_0}-\frac{w}{c_0}\right)=-\frac{1}{m_0\rho_{02}}\frac{\partial}{\partial\tau}(m'\rho_2')+\\
+\frac{1}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(w\rho_2')+\frac{1}{m_0c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(wm')-\frac{\partial w}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\rho_1'}{\rho_{01}}-\frac{m'}{1-m_0}-\frac{u}{c_0}\right)=\frac{1}{(1-m_0)\rho_{01}}\frac{\partial}{\partial\tau}(m'\rho_1')-\\
-\frac{1}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(u\rho_1')-\frac{1}{(1-m_0)c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(um')-\frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{w}{c_0}-\frac{p'}{\rho_{02}c_0^2}\right)+\frac{\rho_{01}(1-m_0)(w-u)}{\rho_0c_0\theta}=-\frac{\rho_2'}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial w}{\partial\tau}-\\
-\frac{m'}{m_0c_0}\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{w}{c_0^2}\frac{\partial w}{\partial\tau}-\frac{1}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial p'}{\partial x}+\frac{m'}{m_0\rho_{02}c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial\tau}\\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{u}{c_0}-\frac{p'}{\rho_{01}c_0^2}\right)-\frac{\rho_{02}m_0(w-u)}{\rho_0c_0\theta}=-\frac{\rho_1'}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\\
+\frac{m'}{(1-m_0)c_0}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{u}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{1}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{m'}{\rho_{01}(1-m_0)c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial\tau}
\end{gathered}\tag{2}$$

Из уравнений Тэта следует

$$\rho_i'=\frac{p'}{c_i^2}-\frac{\varepsilon_i}{\rho_{0i}c_i^4}(p')^2,\qquad \varepsilon_i=\frac{n_i-1}{2}\tag{3}$$

Подставим (3) в систему уравнений (2). Исключая из уравнений непрерывности фаз m', имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\beta p'-\frac{V}{c_0}\right)=m_0A_1-(1-m_0)A_2,\qquad V=(1-m_0)u+m_0w\tag{4}$$

где V — среднеобъемная скорость среды.

Умножая уравнение движения i-й фазы на величину $\rho_{0i}[(1-m_0)\delta_{i1}+ +m_0\delta_{i2}]$ (где δ_{i1}, δ_{i2} — символы Кронекера) и складывая полученные уравнения, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\beta p'-\frac{U}{c_0}\right)=-\frac{m_0\rho_{02}A_3+(1-m_0)\rho_{01}A_4}{\rho_0} \tag{5}$$

где $U=\rho_0^{-1}[(1-m_0)\rho_{01}u+m_0\rho_{02}w]$ — среднемассовая скорость среды.

В уравнениях (4), (5) A_1-A_4 определяются выражениями

$$A_1=\frac{\varepsilon_2}{\rho_{02}^2c_2^4}\frac{\partial(p')^2}{\partial\tau}-\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1}{c_0m_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(wm')-\frac{1}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(w\rho_2')-\frac{1}{m_0\rho_{02}}\frac{\partial}{\partial\tau}(m'\rho_2')$$

$$A_2=\frac{\varepsilon_1}{\rho_{01}^2c_1^4}\frac{\partial(p')^2}{\partial\tau}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{c_0(1-m_0)}\frac{\partial}{\partial\tau}(um')-$$

$$-\frac{1}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}(u\rho_1')-\frac{1}{(1-m_0)\rho_{01}}\frac{\partial}{\partial\tau}(m'\rho_1')$$

$$A_3=\frac{w}{c_0^2}\frac{\partial w}{\partial\tau}-\frac{m'}{m_0\rho_{02}c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial\tau}-\frac{1}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{m'}{m_0c_0}\frac{\partial w}{\partial\tau}-\frac{\rho_2'}{\rho_{02}c_0}\frac{\partial w}{\partial\tau}$$

$$A_4=\frac{u}{c_0^2}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{m'}{(1-m_0)\rho_{01}c_1^2}\frac{\partial p'}{\partial\tau}-\frac{1}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{m'}{(1-m_0)c_0}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\rho_1'}{\rho_{01}c_0}\frac{\partial u}{\partial\tau}$$

Из последних двух уравнений системы (2) (учитывая, что слагаемые $w-u$, $\theta\partial w/\partial\tau$ — величины второго порядка малости, а слагаемые, пропорциональные произведению θ на величины 2-го порядка малости, являются величинами 3-го порядка малости в силу малости θ), получим с точностью до 2-го порядка включительно (в [1] это уравнение выведено в линейном приближении)

$$\theta\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{V}{c_0}-\frac{\rho_0U}{\rho_\infty c_0}\right)=\frac{U-V}{c_0},\qquad \rho_\infty^{-1}=(1-m_0)\rho_{01}^{-1}=m_0\rho_{02}^{-1} \tag{6}$$

В слагаемых 2-го порядка заменим величины u, p', m', V, U через величину w с помощью соотношений, вытекающих из линейной теории

$$w=u=\beta c_0p'=\frac{\beta c_0m'}{m_0(1-m_0)(\beta_1-\beta_2)}=V=U$$

Как указывалось выше, в низкочастотном пределе массовые скорости фаз равны друг другу и волна распространяется со скоростью $c_0=(\beta\rho_0)^{-1/2}$. В следующем приближении необходимо учесть, что разность скоростей фаз является величиной второго порядка малости.

Подставляя значение $\partial(U-V)/\partial\tau$ из уравнения (6) в уравнение, полученное вычитанием уравнения (5) из (4), получим уравнение относительно величины w

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha w\frac{\partial w}{\partial\tau}=\gamma\frac{\partial^2w}{\partial\tau^2} \tag{7}$$

$$u-w=\frac{\rho_0\theta(1-\rho_0/\rho_\infty)}{m_0(1-m_0)(\rho_{01}-\rho_{02})}\frac{\partial w}{\partial\tau},\qquad \alpha=\frac{3}{4c_0^2}+\frac{m_0(1-m_0)(\beta_1-\beta_2)^2}{2\beta^2c_0^2}+$$

$$+\frac{m_0(1-m_0)(\beta_1-\beta_2)(\rho_{01}-\rho_{02})}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{m_0}{c_1^2}+\frac{1-m_0}{c_2^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\beta^2c_0^2}[m_0\varepsilon_2\beta_2^2+(1-m_0)\varepsilon_1\beta_1^2]$$

$$\gamma=\theta(\rho_0/\rho_\infty-1)/(2c_0)$$

Слагаемое в правой части уравнения (7) обусловлено неодинаковой инерционностью фаз. При малой проницаемости или значительной вязкости жидкости выравнивание скоростей происходит быстро; при малой вязкости или большой проницаемости значение скоростей фаз определяется только инерционными свойствами компонент. Отметим, что внутреннее трение в каждой фазе пропорционально вязкости, в то время как диссипация в среде обратно пропорциональна вязкости (в широком диапазоне изменения параметров вязкости и проницаемости основным диссипативным слагаемым в правой части уравнений движения является сила трения между компонентами).

Решение уравнения (7) известно [6]. Из него следует, что сигнал конечной амплитуды ослабляется, причем разность скоростей компонент выравнивается по мере удаления от фронта волны.

Рассмотрим решение, отвечающее стационарной волне, когда действие нелинейных эффектов уравновешивается вязкими. Тогда стационарная волна скачка разности массовых скоростей фаз имеет вид

$$w-u=\frac{\alpha\rho_0 c_0 w_0^2}{4m_0(1-m_0)(\rho_{02}-\rho_{01})}\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{\alpha w_0}{4\gamma}(\tau-\tau_0)\right]$$

где ширина фронта стационарной волны δ_Φ равна $4\gamma/(\alpha w_0)$. Для водонасыщенного кварцевого песка ширина фронта при $\mu\sim 10^{-4}$ есть $\delta_\Phi\sim 5$ м, в то время как в линейной теории δ_Φ растет с расстоянием [3].

Проанализируем относительную роль нелинейных слагаемых в уравнении (7) при распространении сейсмических волн конечной амплитуды в средах типа мягких грунтов. Параметр $z=\rho_{01}\rho_{02}k_0/(2\mu\rho_0)$ для глинистого песка при $m_0\sim 0{,}2-0{,}4$ порядка $5\cdot 10^{-6}-3\cdot 10^{-4}$ [1] и, следовательно, $w/c_0\sim$ $\sim c_0\omega\gamma\sim(10^{-4}-10^{-3})\omega$ при $c_0=2\cdot 10^3$ м/с, так что для сейсмических волн с частотами $\omega\sim 0{,}1-10$ Гц нелинейные эффекты должны превалировать над диссипативными при $w_0>0{,}1$ м/с, что может быть выполнено только для волн большой интенсивности. В суглинке карбонатном, глине или солонцовой глине $z\approx 10^{-9}-10^{-7}$ [1] и влияние нелинейных эффектов будет значительно и при малых интенсивностях волн. Учет дисперсии в уравнении (7) может привести к осцилляторному поведению возмущений за фронтом слабой ударной волны, что в свою очередь может способствовать разжижению среды.

Таким образом, проявление нелинейных эффектов следует ожидать в мягких грунтах с малой проницаемостью или большим коэффициентом вязкости, что соответствует малым релаксационным временам. Наличие в таких средах защемленного воздуха приведет к значительному увеличению роли нелинейного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред.— М.: Недра, 1970. 335 с.
2. *Николаевский В. Н.* О процессах неустановившейся деформации водонасыщенных грунтов.— Arch. Mech. Stosow, 1965, т. 17, № 3, с. 441—452.
3. *Борисов С. Н., Николаевский В. Н., Радченко В. П.* О структуре фронта ударной волны в водонасыщенном грунте.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 3, с. 55—63.
4. *Садовский М. А., Николаев А. В.* Новые методы сейсмической разведки. Перспективы развития.— Вестн. АН СССР, 1982, № 1, с. 57—64.
5. *Гущин В. В., Шалашов Г. М.* О возможности использования нелинейных сейсмических эффектов в задачах вибрационного просвечивания Земли.— В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. М.: Наука, 1981, с. 144—155.
6. *Руденко О. В., Солуян С. С.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1983