МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1984

УДК 533.6.11.8+536.756

О СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОНЗАГЕРА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

БИШАЕВ А. М., РЫКОВ В. А.

На основе линейного уравнения Больцмана в [1] рассмотрено медленное обтекание тела произвольной формы с постоянной температурой поверхности, слабо отличающейся от температуры невозмущенного потока. Выражение для производства энтропии во всем газе определяет систему термодинамических потоков и сил. Термодинамическими потоками являются компоненты силы сопротивления и поток энергии, получаемой телом, а термодинамическими силами – компоненты скорости набегающего потока и разность температур между телом и невозмущенным потоком. В силу линейности уравнений потоки пропорциональны возмущающим силам с некоторыми коэффициентами. Симметрия этих кинетических коэффициентов и была установлена в [1] на основе уравнения Больцмана. В [2] рассмотрен случай, когда обтекаемое тело теплопроводное и находится в равновесии с потоком газа. В этом случае температура поверхности тела переменная.

В настоящей работе рассматривается обтекание тела, на поверхности которого может происходить конденсация или испарение газа. Этот случай представляет интерес при изучении движения аэрозольных частиц, которые испаряются или же служат центрами конденсации в потоке газа. К уже названным термодинамическим потокам добавляется поток массы через поверхность тела, а к термодинамическим силам – разность давлений между давлением невозмущенного газа и равновесным давлением пара, отвечающим температуре тела.

Для полученной системы потоков и сил устанавливается принцип симметрии кинетических коэффициентов. В последнем разделе рассмотрена задача о течении газа в канале с теплопроводными стенками произвольной формы, соединяющем два независимых равновесных состояния. Установлена симметрия кинетических коэффициентов Онзагера в выражениях потоков массы и энергии через термодинамические силы – разности температур и давлений между равновесными состояниями. Задача для канала с прямолинейными теплоизолированными стенками рассматривалась ранее в [3–5].

1. Рассмотрим обтекание тела с поверхностью S_w, на которой происходит испарение или конденсация газа при постоянной температуре T_w. Равномерный на бесконечности поток газа имеет компоненты скорости $U_{\infty i}$, давление p_0 и температуру T_0. Предположим, что безразмерные компоненты скорости потока $S_i=U_{\infty i}/v_0$, $v_0=(2kT_0/m)^{1/2}$ малы, т. е. $S_i\ll 1$; величина $\tau_w=(T_w-T_0)/T_0\ll 1$; давление p_0 слабо отличается от давления насыщения $p_w=p_w(T_w)$, отвечающего температуре тела T_w, т. е. $\Delta p_w=(p_w-p_0)/p_0\ll 1$.

При этих условиях в основу исследования положено линейное уравнение Больцмана [6]

$$v_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=L(\varphi),\quad (i=1,2,3)$$
$$L(\varphi)=\frac{1}{\mathrm{Kn}}\int\frac{\exp(-v_1^2)}{\sqrt{\pi^3}}(\varphi_1'+\varphi'-\varphi_1-\varphi)\,gbdbd\mathbf{v}_1d\varepsilon \qquad (1.1)$$
$$\mathbf{v}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{v_0},\quad \mathrm{Kn}=\frac{kT_0}{p_0\pi r_0^2L_0},\quad f=f_0(1+\varphi)$$
$$f_0=\frac{p_0\exp(-v^2)}{\sqrt{\pi^3}kT_0^3v_0^3},\quad \mathbf{v}=\frac{\boldsymbol{\xi}}{v_0}$$

Здесь Kn — число Кнудсена, r_0 и L_0 — характерный радиус действия межмолекулярных сил и характерный размер течения, k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, $\boldsymbol{\xi}$ — ее скорость, v_0 — характерное значение тепловой скорости, функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ есть возмущение функции распределения $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ около абсолютно максвелловской f_0 с температурой T_0 и давлением p_0.

Возмущения макропараметров выражаются через функцию φ

$$n=\frac{p_0}{kT_0}(1+\nu), \quad \nu=\int \varphi d\omega, \quad U_i=\int v_i\varphi d\omega$$

$$T=T_0(1+\tau), \quad \tau=\frac{2}{3}\int\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi d\omega$$

$$d\omega=\exp(-v^2)\frac{d\mathbf{v}}{\sqrt{\pi^3}}$$

$$p_{ij}=2\int v_iv_j\varphi d\omega, \quad q_i=\int v_i\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi d\omega$$

Линеаризуя функцию распределения на бесконечности, получим

$$\varphi=2v_iS_i, \quad r=|\mathbf{x}|\to\infty \tag{1.2}$$

Граничное условие для функции $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ на поверхности S_w берется в виде [7]

$$\begin{gathered} \underset{\xi_n>0}{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}=\int\limits_{\xi_n'<0}|\xi_n'|R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}+(1-\alpha)f_w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|\xi_n| \\ f_w=\left(\frac{m}{2\pi kT_w}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\xi^2}{2kT_w}\right)\frac{p_w}{kT_w}, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant1 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь p_w — давление насыщенного пара, отвечающего температуре T_w, α — вероятность отражения от поверхности тела S_w.

Ядро рассеяния $R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})$ обладает свойствами

$$\begin{gathered} R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})\geqslant0, \quad \int R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=\alpha \\ f_w(\boldsymbol{\xi}')|\xi_w'|R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})=f_w(\boldsymbol{\xi})|\xi_n|R(-\boldsymbol{\xi}, -\boldsymbol{\xi}') \\ \xi_n'<0 \qquad\qquad \xi_n>0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Последнее равенство означает, что в состоянии равновесия прямые и обращенные по времени столкновения частиц со стенкой равновероятны. Интегрируя его по области $\xi_n'<0$ и учитывая второе равенство (1.4), получим

$$\alpha f_w(\boldsymbol{\xi})|\xi_n|=\int\limits_{\xi_n'<0}|\xi_n'|f_w(\boldsymbol{\xi}')R(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}' \tag{1.5}$$

В [7] использовалось условие (1.5), которое в нашем случае является следствием (1.4).

Получим граничное условие для φ, линеаризуя (1.3), (1.5)

$$\begin{gathered} \chi(\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{v})-\tau_w\left(v^2-\frac{5}{2}\right)-\Delta p_w, \quad \Delta p_w=\frac{p_w-p_0}{p_0} \\ \underset{v_n>0}{\chi(\mathbf{v})}|v_n|\exp(-v^2)=\int\limits_{w_n<0}|w_n|\exp(-w^2)\chi(\mathbf{w})R_0(\mathbf{w}, \mathbf{v})d\mathbf{w}, \\ \mathbf{x}\in S_w \end{gathered} \tag{1.6}$$

Так же как в [2], здесь проведена линеаризация ядра $R=R_0+\delta R$. Ядро $R_0(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ обладает свойствами (1.4), (1.5) с заменой в них f_w на f_0.

Итак, для уравнения (1.1) получены граничные условия (1.2), (1.6).

Рассмотрим вопрос о производстве энтропии в газе при обтекании испаряющегося тела сначала в точной нелинейной постановке. Запишем уравнение баланса энтропии для области D, ограниченной поверхностью тела S_w и поверхностью S_∞, охватывающей тело [1]

$$\int_{S_w} kH_i n_i d\sigma + \int_{S_\infty} kHn_i d\sigma = I \geqslant 0$$

$$kH_i n_i = k\int \xi_n f(\ln f - 1)\, d\xi$$

Здесь $kH_i n_i$ — поток энтропии, отводимой от газа через единичный элемент поверхности, n — нормаль к поверхности, направленная к газу, I — производство энтропии в области D в единицу времени за счет столкновений молекул между собой, первое слагаемое написанной выше формулы — поток энтропии, отводимой от газа к телу.

Поток энтропии, получаемой телом, есть

$$\frac{1}{T_w}(-E+\mu_w Q) = \int\int_{S_w} k\xi_n f \ln f_w d\xi d\sigma$$

$$\mu_w = kT_w \ln\left[n_w\left(\frac{m}{2\pi kT_w}\right)^{3/2}\right]$$

$$Q = \int\int_{S_w} \xi_n f d\xi d\sigma, \quad -E = -\int\int_{S_w} \xi_n \frac{m\xi^2}{2} f d\xi d\sigma$$

Здесь μ_w — химический потенциал, Q — поток частиц с поверхности тела, $-E$ — энергия, получаемая телом от газа за единицу времени.

Поток энтропии, отводимой от газа к телу, можно представить в виде разности потока энтропии, получаемой телом, и потока I_w энтропии, возникающей из-за соударений частиц газа с поверхностью тела

$$\int_{S_w} kH_i n_i d\sigma = \frac{1}{T_w}(-E+\mu_w Q) - I_w$$

$$I_w = -k\int\int_{S_w} \xi_n f_w C\left(\frac{f}{f_w}\right) d\xi d\sigma$$

$$C(x) = x(\ln x - 1) + 1$$

Так как функция $C(x)$ строго выпуклая и непрерывная, то по теореме [8, с. 134] $I_w \geqslant 0$. Поток энтропии, отводимой от газа через поверхность S_∞, представим в виде

$$\int_{S_\infty} kH_i n_i d\sigma = \frac{1}{T_\infty}\left(E + F_i U_i + \frac{m}{2} Q U_\infty^2 - \mu_\infty Q\right) + I_\infty$$

$$I_\infty = k\int\int_{S_\infty} \xi_n f\left(\ln\frac{f}{f_\infty} - 1\right) d\xi d\sigma, \quad \mu_\infty = kT_\infty \ln\left[n_\infty\left(\frac{m}{2\pi kT_\infty}\right)^{3/2}\right]$$

$$F_i = -\int\int_{S_w} \xi_n m \xi_i f\, d\xi\, d\sigma$$

Здесь F_i — компоненты силы воздействия потока на тело.

При удалении поверхности S_∞ на бесконечность $I_\infty \to 0$, поэтому выражение для полного производства энтропии $\dot{S}=I+I_w$ в газе будет

$$\dot{S}=E\left(\frac{1}{T_\infty}-\frac{1}{T_w}\right)+\frac{F_iU_{\infty i}}{T_\infty}+\frac{mQU_\infty^2}{2T_\infty}+Q\left(\frac{\mu_w}{T_w}-\frac{\mu_\infty}{T_\infty}\right)$$

Проделывая аналогичные выкладки для линейной задачи, найдем производство энтропии

$$\dot{S}=I+I_w=\tau_wE+\Delta p_wQ+F_iS_i \tag{1.7}$$

$$I_w=-\iint\limits_{S_w} v_n\frac{\chi^2}{2}\,d\omega\,d\sigma\geqslant 0,\quad I=-\iint\limits_{D}\varphi L(\varphi)\,d\omega\,d\mathbf{x}\geqslant 0$$

$$Q=\iint\limits_{S_w} v_0\varphi\,d\omega\,d\sigma,\quad F_i=-2\iint\limits_{S_w} v_nv_i\varphi\,d\omega\,d\sigma$$

$$E=\iint\limits_{S_w} v_n\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi\,d\omega\,d\sigma \tag{1.8}$$

Из (1.7) следует, что S_i, τ_w и Δp_w можно считать термодинамическими силами, а F_i, E и Q — соответствующими потоками.

Линейность задачи позволяет представить φ в виде разложения по термодинамическим силам

$$\begin{gathered}\varphi=\beta_j\varphi_j,\quad j=(1,2,3,4,5)\\ \beta_j=S_j,\quad j=(1,2,3);\quad \beta_4=\tau_w;\quad \beta_5=\Delta p_w\end{gathered} \tag{1.9}$$

Функция φ_j удовлетворяет уравнению (1.1) с граничными условиями

$$\begin{gathered}\varphi_j=2v_j,\quad j=(1,2,3),\quad \varphi_4=\varphi_5=0,\quad r\to\infty\\ |v_n|\chi_j(\mathbf{v})\exp(-v^2)=\int|w_n|\chi_j(\mathbf{w})R_0(\mathbf{w},\mathbf{v})\exp(-w^2)\,d\mathbf{w}\quad \mathbf{x}\in S_w\\ \chi_j=\varphi_j-\lambda_j,\quad \lambda_j=0,\quad j=(1,2,3),\quad \lambda_4=\left(v^2-\frac{5}{2}\right),\quad \lambda_5=1\end{gathered} \tag{1.10}$$

Подстановка (1.9) в (1.8) дает

$$F_i=\alpha_{ij}\beta_j,\quad \alpha_{ij}=2\iint\limits_{S_\infty} v_nv_i\varphi_j\,d\omega\,d\sigma$$

$$i=(1,2,3),\quad j=(1,2,3,4,5)$$

$$E=\alpha_{4j}\beta_j,\quad \alpha_{4j}=\iint\limits_{S_w} v_n\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi_j\,d\omega\,d\sigma$$

$$Q=\alpha_{5j}\beta_j,\quad \alpha_{5j}=\iint\limits_{S_w} v_n\varphi_j\,d\omega\,d\sigma,\quad j=1,2,3,4,5$$

В соответствии с принципом Онзагера должно быть

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji},\quad i,j=(1,2,3);\quad \alpha_{i5}=-\alpha_{5i},\quad \alpha_{i4}=-\alpha_{4i}\quad i=(1,2,3);\quad \alpha_{45}=\alpha_{54}$$

Докажем, например, равенство $\alpha_{j5}=-\alpha_{5j}$.

Умножим уравнение, определяющее функцию φ_j, на φ_5, а уравнение, определяющее функцию φ_5,— на φ_j. Проинтегрируем по пространству скоростей и физическому пространству, ограниченному поверхностями S_w и S_∞, и вычтем друг из друга. Получим [1, 2]

$$\iint\limits_{S_w} v_n(\varphi_5^+\varphi_j^- -\varphi_j^+\varphi_5^-)\,d\omega\,d\sigma=\iint\limits_{S_\infty} v_n(\varphi_j^+\varphi_5^- -\varphi_5^+\varphi_j^-)\,d\omega\,d\sigma$$

Здесь φ_j^+ — четная, а φ_j^- — нечетная части функции φ_j относительно переменной $\mathbf{v}$.

На поверхности S_∞ положим $\varphi_j = 2v_j + \psi_j$, если $j = (1, 2, 3)$, и $\varphi_5 = \psi_5$. Тогда

$$\int\limits_{S_\infty}\int v_n(\varphi_j^+\varphi_5^- - \varphi_5^+\varphi_j^-)\,d\omega\,d\sigma = -\alpha_{j5} + \int\limits_{S_\infty}\int v_n(\psi_j^+\psi_5^- - \psi_5^+\psi_j^-)\,d\omega\,d\sigma$$

При удалении поверхности S_∞ на бесконечность интеграл, содержащий функции ψ, стремится к нулю [1, 2]. Поэтому

$$\int\limits_{S_w}\int v_n(\varphi_5^+\varphi_j^- - \varphi_j^+\varphi_5^-)\,d\omega\,d\sigma = -\alpha_{j5} \tag{1.11}$$

На поверхности тела имеют место соотношения

$$\varphi_j^+(\mathbf{v}) = (\varphi_j(-\mathbf{u}) + \varphi_{jw}(\mathbf{u}))/2$$

$$\mathbf{v}\varphi_j^-(\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\varphi_{jw}(\mathbf{u}) - \varphi_j(-\mathbf{u}))/2, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}\,\mathrm{sign}\,v_n \tag{1.12}$$

$$\varphi_{jw}(\mathbf{u}) = \chi_{jw}(\mathbf{u}) + \lambda_j, \quad \varphi_j(-\mathbf{u}) = \chi_j(-\mathbf{u}) + \lambda_j \tag{1.13}$$

$$\chi_{jw}(\mathbf{u})\,|v_n|\exp(-v)^2 = \int\limits_{w_n<0} |w_n|\,\chi_{jw}(\mathbf{w})R_0(\mathbf{w}, \mathbf{u})\exp(-w^2)\,d\mathbf{w} \tag{1.14}$$

Используя (1.12), (1.13), выражение (1.11) представим в виде

$$\alpha_{5j} + \alpha_{j5} = \frac{1}{2}\int\limits_{S_w}\int |v_n|\,(\chi_j(-\mathbf{u})\chi_{5w}(\mathbf{u}) - \chi_5(-\mathbf{u})\chi_{jw}(\mathbf{u}))\,d\omega\,d\sigma$$

Используя (1.14), можно показать [1, 2], что интеграл в правой части равен нулю, поэтому $\alpha_{5j} = -\alpha_{j5}$, $j = (1, 2, 3)$. Симметрия коэффициентов Онзагера установлена.

2. Рассмотрим два независимых равновесных состояния покоящегося газа с близкими температурами и давлениями, которые разделены непроницаемой перегородкой. В левом полупространстве газ имеет температуру T_0 и давление p_0, в правом $-T_1$ и p_1. Проделаем в перегородке канал с теплопроводными стенками произвольной формы. Сечение канала показано на фигуре. В этом случае возникает трехмерное стационарное течение с некоторым расходом Q и потоком энергии E.

Перетекание энергии из одного полупространства в другое будет происходить как через газовую среду в канале, так и через его теплопроводные стенки, которые на фигуре отмечены штриховкой.

Введем обозначения: S° — поверхность нетеплопроводного тела (состоит из поверхности S_w°, граничащей с газом, и поверхности $S^{\circ t}$, общей со стенкой канала, $S^\circ = S_w^\circ \cup S^{\circ t}$); S^t — поверхность стенок канала (состоит из поверхности S_w^t, граничащей с газом, и поверхности $S^{\circ t}$, $S^t = S_w^t \cup S^{\circ t}$); S_w — общая поверхность между телом (любым) и газом, $S_w = S_w^\circ \cup S_w^t$.

Рассматриваемая задача линейна и возмущение функции распределения удовлетворяет уравнению (1.1) с условиями на бесконечности

$$\varphi \to 0, \quad r \to \infty, \quad x_1 < 0$$

$$\varphi \to \Delta T\left(v^2 - \frac{5}{2}\right) + \Delta p, \quad r \to \infty, \quad x_1 > 0$$

$$\Delta p = \frac{(p_1 - p_0)}{p_0}, \quad \Delta T = \frac{(T_1 - T_0)}{T_0}$$

На поверхности S_w принято условие непротекания $\alpha = 1$, поэтому на ней для $v_n > 0$ $\varphi = \chi + \tau_w(v^2 - {}^5/_2)$, где χ удовлетворяет уравнению (1.6), а τ_w — искомое возмущение температуры поверхности. На поверхности S^0 выставляется условие $q_n=0$, на поверхности S_w^t — условие равенства нормальных потоков энергии в газе q_n^G и в теле q_n^T: $q_n^G=q_n^T$, $x\in S_w^t$. В области внутри стенок канала V возмущение температуры $\tau=(T-T_0)/T_0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)=0 \qquad (2.1)$$

где λ — коэффициент теплопроводности. Поток тепла в области V определяется законом Фурье $\mathbf{q}=-\lambda\,\mathrm{grad}\,\tau$.

Производство энтропии в системе газ — стенки канала определяется выражением [2]

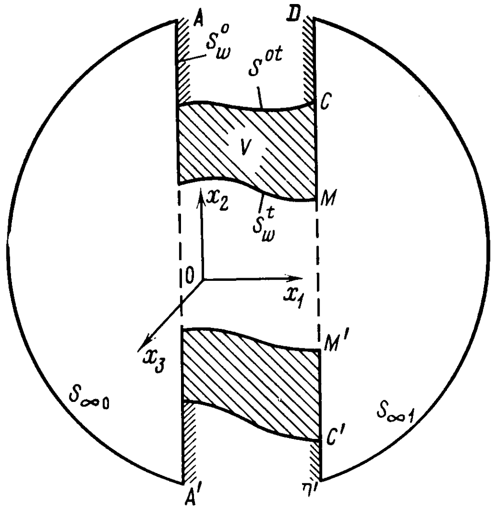
$$S=I+I_w+J=-Q\Delta p-E\Delta T \qquad (2.2)$$

$$I=\iint\limits_D \varphi L(\varphi)\,d\omega\,d\mathbf{x},$$

$$I_w=-\iint\limits_{S_w} v_n\frac{\chi^2}{2}\,d\omega\,d\sigma$$

$$J=\int\limits_V\lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x}\geqslant 0,$$

$$Q=\int\limits_{S_{MM'}}U_n\,d\sigma,\qquad E=\int\limits_{S_{CC'}}q_n\,d\sigma$$



где I — производство энтропии в единицу времени в области D, занятой газом, за счет столкновений частиц между собой, I_w — производство энтропии за счет столкновений частиц с поверхностью тела, J — производство энтропии внутри стенок канала.

Выражение (2.2) определяет систему термодинамических сил Δp, ΔT. Положим $\varphi=\Delta p\varphi_1+\Delta T\varphi_2$, $\tau=\Delta p\tau_1+\Delta T\tau_2$. Величины φ_j, τ_j удовлетворяют уравнениям (1.1), (2.1) соответственно.

На бесконечности φ_j удовлетворяют следующим условиям $\varphi_j\to 0$, $r\to\infty$, $x_1<0$; $\varphi_1\to 1$, $\varphi_2\to v^2-{}^5/_2$, $r\to\infty$, $x_1>0$. На поверхности тела для $v_n>0$ $\varphi_j=\chi_j+\tau_{wj}(v^2-{}^5/_2)$, где χ_j удовлетворяют (1.6). На абсолютно нетеплопроводной поверхности $q_{jn}=0$, на теплопроводной поверхности стенок канала $q_{jn}^G=q_{jn}^T$. Потоки представим в виде

$$-Q=\alpha_{11}\Delta p+\alpha_{12}\Delta T,\qquad -E=\alpha_{21}\Delta p+\alpha_{22}\Delta T$$

$$\alpha_{1j}=\int\limits_{S_{MM'}}\int v_n\,\varphi_j\,d\omega\,d\sigma$$

$$\alpha_{2j}=\int\limits_{S_{CC'}}\int v_n\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi_j\,d\omega\,d\sigma,\qquad j=(1,2)$$

Докажем, что $\alpha_{12}=\alpha_{21}$, т. е.

$$\int\limits_{S_{MM'}}\int v_n\,\varphi_2\,d\omega\,d\sigma=\int\limits_{S_{CC'}}\int v_n\left(v^2-\frac{5}{2}\right)\varphi_1\,d\omega\,d\sigma.$$

Проведем сферу большого радиуса R с центром внутри канала. Левую часть полусферы, отсекаемую поверхностью AA', обозначим $S_{\infty 0}$, правую часть полусферы, отсекаемую поверхностью DD', обозначим $S_{\infty 1}$.

Умножим уравнение, определяющее φ_2, на φ_1, уравнение для φ_1 — на φ_2, проинтегрируем по пространству скоростей и области D, занятой газом внутри сферы, и вычтем друг из друга. Получим

$$\int\limits_{S_{\infty 0}} \int v_n (\varphi_1{}^+\varphi_2{}^- - \varphi_1{}^-\varphi_2{}^+)\, d\omega\, d\sigma + \int\limits_{S_w} \int v_n (\varphi_1{}^+\varphi_2{}^- - \varphi_1{}^-\varphi_2{}^+)\, d\omega\, d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{S_{\infty 1}} \int v_n (\varphi_1{}^+\varphi_2{}^- - \varphi_1{}^-\varphi_2{}^+)\, d\omega\, d\sigma = 0$$

Переходя к пределу $R\to\infty$, имеем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_{\infty 0}} \int v_n (\varphi_1{}^+\varphi_2{}^- - \varphi_1{}^-\varphi_2{}^+)\, d\omega\, d\sigma = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_{\infty 1}} v_n (\varphi_1{}^+\varphi_2{}^- - \varphi_1{}^-\varphi_2{}^+)\, d\omega\, d\sigma = \alpha_{12} - \alpha_{21}$$

Поэтому

$$\alpha_{12} - \alpha_{21} = \int\limits_{S_w} \int v_n (\varphi_2{}^+\varphi_1{}^- - \varphi_1{}^+\varphi_2{}^-)\, d\omega\, d\sigma$$

Используя (1.12), (1.13) с $\lambda_j = \tau_{wj}(v^2 - {}^5/_2)$, получим

$$\alpha_{12} - \alpha_{21} = \frac{1}{2} \int\limits_{S_w} \int |v_n| \left(\chi_2(-\mathbf{u})\chi_{w_1}(\mathbf{u}) - \chi_1(-\mathbf{u})\chi_{2w}(\mathbf{u})\right) d\omega\, d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{S_w{}^t} (\tau_{w2} q_{1n}{}^G - \tau_{w1} q_{2n}{}^G)\, d\sigma$$

Используя свойства ядра $R_0(\mathbf{w}, \mathbf{v})$, можно показать [1, 2], что первый интеграл правой части равен нулю. Так как на $S_w{}^t$ — имеет место $q_{jn}{}^G = q_{jn}{}^T$, а на S^{0t} — $q_{jn} = 0$, то второй интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_{S^t} (\tau_{w2} q_{n1}{}^T - \tau_{w1} q_{2n}{}^T)\, d\sigma = \int\limits_V \left[\tau_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial \tau_2}{\partial x_i}\right) - \tau_2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial \tau_1}{\partial x_i}\right)\right] d\mathbf{x} = 0$$

Поэтому имеем $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бишаев А. М., Рыков В. А.* H-теорема и принцип Онзагера для стационарного уравнения Больцмана.— Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1983, т. 23, № 4, с. 954—964.
2. *Бишаев А. М., Рыков В. А.* О соотношениях симметрии Онзагера в линейной задаче обтекания теплопроводного тела разреженным газом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, в. 6, с. 140—146.
3. *Loyalka S. K.* Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. I.— J. Chem. Phys., 1971, v. 55, № 9, p. 4497—4503.
4. *Lang H.* Second-order slip effects in Poiseuille flow.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, № 3, p. 366—371.
5. *Жданов В. М., Зазноба В. А.* Неизотермическое течение газовой смеси в канале при промежуточных числах Кнудсена.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1063—1072.
6. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
7. *Москалев О. Б.* H-теорема Больцмана для газа в термостате.— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 3, с. 521—523.
8. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.I.1984