**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1984**

УДК 532.542+577.31

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

РЕГИРЕР С. А.

Рассмотрены общие свойства квазиодномерных уравнений, описывающих перистальтическое перемещение жидкости по трубкам. Указаны возможности получения аналитических решений.

1. Многие живые организмы имеют транспортные системы в виде трубок или каналов, стенки которых содержат мышечные или иные сократительные структуры. Их активность создает упорядоченную деформацию стенки и, как следствие,– перемещение жидкости. Примерами таких «перистальтирующих» систем могут служить кишечник, мочеточники, некоторые внутриклеточные образования, канальцы в растительной ткани и т. д. Перистальтическое прокачивание используется также в ряде технических устройств. Этому кругу гидродинамических проблем посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования (см., например, обзоры [1, 2]) [1].

Когда получение детальных сведений о картине течения не обязательно, расчет перистальтического транспорта удобно основывать на квазиодномерных модельных уравнениях. Ниже рассматриваются общие свойства таких уравнений, включая их построение методом осреднения, и обсуждаются возможности аналитического решения; приведены также некоторые примеры.

2. Пусть внутренняя поверхность длинной трубки определена в цилиндрической системе координат r°, ϑ, x° уравнением $r^\circ=r_w{}^\circ\equiv r_0\varphi(x^\circ/\lambda, \vartheta, t^\circ/T)$; элементы поверхности смещаются со скоростью $\mathbf{v}_w{}^\circ=\mathbf{e}_x u_w{}^\circ+\mathbf{e}_r v_w{}^\circ+\mathbf{e}_\vartheta w_w{}^\circ$. Здесь $r_0=\mathrm{const}$ – характерный поперечный размер трубки, λ и T – масштабы длины и времени для изменений $r_w{}^\circ$, $\mathbf{v}_w{}^\circ$. Вследствие изменений формы трубки и приложенных на ее концах давлений $p^\pm$ заполняющая трубку несжимаемая жидкость находится в состоянии нестационарного трехмерного движения, характеризуемого скоростью $\mathbf{v}^\circ=\mathbf{e}_x u^\circ+\mathbf{e}_r v^\circ+\mathbf{e}_\vartheta w^\circ$ и давлением p. Вклад перепада давлений в движение считается не превосходящим по порядку величины вклада от формоизменения трубки (иначе задача свелась бы к отысканию возмущений, наложенных на обычное «напорное» течение).

Далее используются следующие основные упрощающие предположения: 1) параметр $\varepsilon=r_0/\lambda$ мал в сравнении с единицей; 2) число Рейнольдса, подсчитанное по размеру r_0 и характерной скорости r_0/T, по порядку величины не превосходит единицы; 3) жидкость ньютоновская; 4) функции $r_w{}^\circ$, $\mathbf{v}_w{}^\circ$ известны (например, из прямых наблюдений над биологическими объектами) в эйлеровом или лагранжевом представлении.

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$r=\frac{r^\circ}{r_0},\quad x=\frac{x^\circ}{\lambda},\quad t=\frac{t^\circ}{T},\quad u=\frac{u^\circ}{ch},\quad v=\frac{v^\circ}{\varepsilon ch}$$

---

[1] Практически полные данные о публикациях до середины 1983 г. приведены в работе: *Регирер С. А.* Перистальтические течения.– Отчет Ин-та механ. МГУ, 1983, № 2820, 64 с.

$$w=\frac{w^\circ}{\varepsilon ch},\quad p=\frac{(p^\circ-p^-)r_0^2}{\mu h\lambda c},\quad \Delta=\frac{(p^+-p^-)r_0^2}{\mu h\lambda c} \tag{2.1}$$

$$\tau_{ij}=\frac{\tau_{ij}{}^\circ r_0^2}{\mu hc},\quad L=\frac{L^\circ}{\lambda},\quad S=\frac{\rho r_0^2}{\mu T}$$

Здесь $c=\lambda/T$ — характерная «скорость распространения» деформации вдоль трубки, $h\leqslant 1$ — безразмерная характерная амплитуда изменений $r_w{}^\circ/r_0\equiv\varphi$ (h входит в φ как параметр), μ и ρ — вязкость и плотность жидкости, $\tau_{ij}{}^\circ=\tau_{xr}{}^\circ$, $\tau_{x\vartheta}{}^\circ$ — компоненты тензора вязких напряжений, L° — длина трубки.

Согласно (2.1), роль характерной продольной скорости играет $u_*=ch$, а характерное давление, сообразно сделанным предположениям, есть $p_*=\mu u_*\lambda/r_0^2$. Число Рейнольдса, о котором говорится в предположении 2), есть $\rho r_0^2/\mu T=S$. Число Рейнольдса Re_v, подсчитанное по поперечной характерной скорости $v_*=\varepsilon u_*$, равно $\varepsilon(\rho r_0 u_*/\mu)=hS$ и имеет порядок $\leqslant S$.

Для достаточно гладких функций φ, $\mathbf{v}_w$ предположения 1), 2) позволяют описывать течение в трубке уравнениями типа теории пограничного слоя (или смазочного слоя, если $S\ll 1$), т. е. уравнением неразрывности и x-компонентой уравнения импульсов, в котором давление зависит только от x, t

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\vartheta}=0 \tag{2.2}$$

$$S\left[\frac{\partial u}{\partial t}+h\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\right]=$$
$$=-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xr}}{\partial r}+\frac{\tau_{xr}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{x\vartheta}}{\partial\vartheta} \tag{2.3}$$

В силу предположения 3) $\tau_{xr}=\partial u/\partial r$, $\tau_{x\vartheta}=r^{-1}\partial u/\partial\vartheta$. Граничные условия независимо от предположения 3) имеют вид

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_w\quad (r=\varphi(x,\vartheta,t)) \tag{2.4}$$

$$p=\Delta\ \ (x=0),\quad p=0\ \ (x=L) \tag{2.5}$$

Функции φ, $\mathbf{v}_w$ связаны кинематическим соотношением

$$\frac{1}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=v_w-u_w\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{w_w}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \tag{2.6}$$

В постановку задачи входит еще начальное условие (или условие периодичности по t) для u.

Модифицированные постановки задачи предусматривают, что перистальтирующая трубка служит элементом гидравлической цепи, например последовательно подключена к входному и выходному резервуарам через сопротивления $Z^\pm$ [3]. Если резервуары обладают упругостью, то в (2.1) следует за начало отсчета давления выбрать не p^-, а некоторое «равновесное» давление p^*, и граничные условия, заменяющие (2.5), принимают вид

$$\begin{aligned} &P^+(V^+)-p^+=Z^+g(0,t),\quad \frac{dV^+}{dt}=-g(0,t)\qquad (x=0)\\ &p^--P^-(V^-)=Z^-g(L,t),\quad \frac{dV^-}{dt}=g(L,t)\qquad (x=L)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $g(x,t)$ — расход, $V^\pm$ — объемы резервуаров, $P^\pm$ — давления в них. Отсюда

$$\Delta=P^+(V^+)-P^-(V^-)-Z^+g(0,t)-Z^-g(L,t) \tag{2.8}$$

Нетрудно также учесть инерцию жидкости, добавляя в правую часть (2.8) слагаемые $-[m^+\partial g(0,t)/\partial t+m^-\partial g(L,t)/\partial t]$, где $m^\pm$ — эффективные инерционности для резервуаров. Когда резервуары бесконечно податливы, $P^\pm$ не зависят от $V^\pm$.

3. Непосредственное интегрирование уравнений (2.2), (2.3) по сечению трубки с учетом условий (2.4), (2.6) дает

$$h\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{3.1}$$

$$S\left(\frac{\partial g}{\partial t}+h\frac{\partial E}{\partial x}\right)=-F\frac{\partial p}{\partial x}+\Gamma\tau \tag{3.2}$$

Здесь F, Γ — площадь и периметр сечения трубки, g — расход, E — поток количества движения, τ — среднее напряжение сдвига

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\vartheta,\qquad g=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}ru\,dr\,d\vartheta,\qquad E=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}ru^2\,dr\,d\vartheta$$

$$\Gamma\tau=\int_0^{2\pi}\tau_{xnw}\left[\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right]^{1/2}d\vartheta \tag{3.3}$$

$$\tau_{xnw}=\left[\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right]^{-1/2}\left(\varphi\tau_{xr}-\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\tau_{x\vartheta}\right)\Big|_{r=\varphi}$$

Система уравнений (3.1), (3.2) содержит основные неизвестные g, p и переменные E, $\Gamma\tau$, для которых необходимо задать дополнительные замыкающие соотношения. Подчеркнем, что (3.1)—(3.3) — точные следствия уравнений (2.2), (2.3), справедливые независимо от предположений 3), 4).

Соотношение (3.2) есть частный случай соотношений, аналогичных известным в теории пограничного слоя [4]. Положим, например, $f=f(u)$ и $\Psi=\int f\,du$. После умножения (2.2), (2.3) соответственно на $hS\Psi$, f и сложения получим

$$S\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}+h\left(\frac{\partial u\Psi}{\partial x}+\operatorname{div}_\perp \mathbf{u}_\perp\Psi\right)\right]=-f\frac{\partial p}{\partial x}+\operatorname{div}_\perp f\boldsymbol{\tau}_\perp-\boldsymbol{\tau}_\perp\nabla_\perp f,\quad \boldsymbol{\tau}_\perp=\mathbf{e}_r\tau_{xr}+\mathbf{e}_\vartheta\tau_{x\vartheta} \tag{3.4}$$

Здесь знаком $\perp$ отмечены векторы и операции в плоскости переменных r, ϑ. Интегрируя (3.4) по сечению трубки и используя (2.4), (2.6), найдем

$$S\left(\frac{\partial M[\Psi]}{\partial t}+h\frac{\partial M[u\Psi]}{\partial x}\right)=-M[f]\frac{\partial p}{\partial x}+\int_0^{2\pi}f_w\tau_{xnw}\left[\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right]^{1/2}d\vartheta-M[\boldsymbol{\tau}_\perp\nabla_\perp f] \tag{3.5}$$

$$M[a]=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}ar\,dr\,d\vartheta,\qquad f_w=f(u_w)$$

Если $f=1$, $\Psi=u$, то $M[f]=F$, $M[\Psi]=g$, $M[u\Psi]=E$ и из (3.5) следует (3.2). При $f=u$ из (3.5) получаем уравнение живых сил, описывающее эволюцию E

$$\frac{S}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+h\frac{\partial M[u^3]}{\partial x}\right)=-g\frac{\partial p}{\partial x}+\int_0^{2\pi}u_w\tau_{xnw}\left[\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2\right]^{1/2}d\vartheta-$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}\left(\tau_{xr}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\tau_{x\vartheta}}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)r\,dr\,d\vartheta \tag{3.6}$$

4. Из числа возможных способов замыкания системы (3.1), (3.2) рассмотрим здесь один из наиболее распространенных, а именно использующий предположения 3), 4) и гипотезу о том, что при любых фиксированных $x=x_c$, $t=t_c$ связь между E, $\Gamma\tau$ и g такая же, как в «каноническом» пуазейлевском течении по цилиндрической трубке с поверхностью $r=\varphi(x_c, \vartheta, t_c)\equiv\varphi_c(\vartheta)$. Движение в этой трубке характеризуется градиентом давления $\partial p_c/\partial x$ и скоростью $u_c(r, \vartheta)$, причем

$$\frac{\partial p_c}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}\Bigg|_{x=x_c, t=t_c}, \quad u_c(\varphi_c, \vartheta)=u_w(x_c, \vartheta, t_c)\equiv u_{cw}(\vartheta)$$

Процедура состоит в определении u_c как решения краевой задачи

$$\Delta u_c(r, \vartheta)=\frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad u_c(\varphi_c, \vartheta)=u_{cw}(\vartheta) \tag{4.1}$$

и последующем установлении связи между величинами E_c, $\Gamma_c\tau_c$ и g_c, которые выражаются через u_c согласно (3.3).

Пусть $G_c(r, r', \vartheta, \vartheta')$ — функция Грина задачи Дирихле для области, ограниченной кривой $r=\varphi_c(\vartheta)$, так что G_c содержит x_c, t_c в качестве параметров. Распределение скорости u_c находится тогда из (4.1) по формуле

$$u_c(r, \vartheta)=-\frac{\partial p_c}{\partial x}K_c(r, \vartheta)+U_c(r, \vartheta) \tag{4.2}$$

$$K_c=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c'} G_c(r, r', \vartheta, \vartheta')r'\,dr'\,d\vartheta', \quad \varphi_c'=\varphi_c(\vartheta')$$

$$U_c=\int_0^{2\pi} u_{cw}(\vartheta')\left[\varphi_c'\frac{\partial G_c}{\partial r'}-\frac{1}{\varphi_c'}\frac{\partial \varphi_c'}{\partial \vartheta'}\frac{\partial G_c}{\partial \vartheta'}\right]_{r'=\varphi_c'} d\vartheta'$$

Отсюда получаем расход

$$g_c=-\xi_c F^2\frac{\partial p_c}{\partial x}+FU_{cw} \tag{4.3}$$

$$\xi_c=\frac{1}{F^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c} K_c r\,dr\,d\vartheta, \quad U_{cw}=\frac{1}{F}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c} U_c r\,dr\,d\vartheta \tag{4.4}$$

Подставляя u_c из (4.2) и $\partial p_c/\partial x$ из (4.3) в интеграл (3.3), найдем

$$E_c=\beta_c g_c^2/F+2\beta_{1c}g_c U_{cw}+\beta_{2c}FU_{cw}^2 \tag{4.5}$$

$$\beta_c=\frac{1}{\xi_c^2F^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c} K_c^2 r\,dr\,d\vartheta, \quad \gamma_{1c}=\frac{1}{\xi_c F^2 U_{cw}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c} K_c U_c r\,dr\,d\vartheta \tag{4.6}$$

$$\gamma_{2c}=\frac{1}{FU_{cw}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c} U_c^2 r\,dr\,d\vartheta, \quad \beta_{1c}=\gamma_{1c}-\beta_c, \quad \beta_{2c}=\beta_c-2\gamma_{1c}+\gamma_{2c}$$

Наконец, интегрируя (4.1) по сечению трубки, будем иметь

$$\Gamma_c\tau_c=F\frac{\partial p_c}{\partial x} \tag{4.7}$$

откуда с учетом (4.3) получим

$$\Gamma_c\tau_c=-\frac{1}{\xi_c F}(g_c-FU_{cw}) \tag{4.8}$$

В замыкающие соотношения (4.5), (4.8) входят три характеристики формы сечения F, ξ_c, β_c и три характеристики продольных смещений стенки U_{cw}, γ_{1c}, γ_{2c}, вычисляемые по формулам (4.4), (4.6) и зависящие от x_c, t_c как от параметров; в дальнейшем индекс c будет опускаться, когда речь идет о системе (3.1), (3.2), (4.5), (4.8).

Соотношение (4.5) отличается от часто используемого равенства $E=\beta g^2/F$ и совпадает с ним только в специальных случаях. Иными словами, при $u_w\neq 0$ отличие профиля скорости от плоского определяет в (4.5) не только коэффициент β, но и, вообще говоря, дополнительные слагаемые, линейные по g.

Когда все сечения трубки геометрически подобны, то ξ_c и β_c — постоянные, не зависящие от x_c, t_c. Аналогично γ_{1c} и γ_{2c} будут постоянны, если кроме геометрического подобия имеет место еще и подобие в распределении скорости $u_{cw}(\vartheta)$. Доказательство этих утверждений использует свойство инвариантности функции Грина при трансляции и повороте системы координат, масштабное преобразование координаты r и формулы (4.2), (4.4), (4.6).

В качестве примера приведем вычисление ξ, β для течения в прямой трубке с сечением в форме эллипса. Обозначая длины (безразмерные) полуосей эллипса через $a(x,t)$, $b(x,t)$, будем иметь

$$\varphi_c(\vartheta)=\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)^{-1/2},\qquad F=\pi ab$$

Распределение скоростей при пуазейлевском течении ($u_w=0$) в эллиптической трубке дается формулой [5]

$$u_c=-\frac{1}{2}\frac{\partial p_c}{\partial x}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{r^2}{\varphi_c^2}\right)$$

$$g_c=-\frac{\pi}{4}\frac{\partial p_c}{\partial x}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2},\qquad E_c=\frac{\pi}{12}\left(\frac{\partial p_c}{\partial x}\right)^2\frac{a^5b^5}{(a^2+b^2)^2}$$

Следовательно, согласно (4.4), (4.6)

$$\xi=\frac{1}{4\pi}\frac{ab}{a^2+b^2},\qquad \beta=\frac{4}{3}\tag{4.9}$$

Заметим, что β здесь постоянно независимо от геометрического подобия, тогда как $\xi=\mathrm{const}$ только при его соблюдении (когда a/b не зависит от x, t).

Интегрирование (4.1) с весом u_c по сечению дает равенство

$$-g_c\frac{\partial p_c}{\partial x}+\int_0^{2\pi}u_{cw}\tau_{xncw}\left[\varphi_c^2+\left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial\vartheta}\right)^2\right]^{1/2}d\vartheta-$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_c}\left[\left(\frac{\partial u_c}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u_c}{\partial\vartheta}\right)^2\right]r\,dr\,d\vartheta=0$$

которое можно с учетом (4.7), (4.8) использовать для замыкания уравнения (3.6). Тогда получим

$$\frac{S}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+h\frac{\partial M[u^3]}{\partial x}\right)=-g\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{g}{F}\Gamma\tau\tag{4.10}$$

Комбинируя (4.10) и (3.2), приходим к соотношению

$$\frac{g}{F}\left(\frac{\partial g}{\partial t}+h\frac{\partial E}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+h\frac{\partial M[u^3]}{\partial x}\right)\tag{4.11}$$

Оно может служить, в частности, для определения $E(x,\ t)$ или же оценки невязки аппроксимации (4.5), если принять «пуазейлевскую» связь $M=M_c(g,\ F)$. В предположении $E=E(g,\ F)$, $M=M(g,\ F)$ уравнение (4.11) тождественно удовлетворяется только при $E=g^2/F+E_0F^3+F_1$, $M=g^3/F^2+3E_0F^2g+M_0$; E_0, E_1, $M_0=\mathrm{const}$.

Интегральное соотношение (3.6), как и другие моментные уравнения типа (3.5), удобно, когда замыкание основывается не на задаче (4.1), а на прямом задании профилей скорости в виде функций от r, ϑ со свободными параметрами, зависящими от x, t или от F, g, E, M, ...

5. Из уравнения (3.1) следует [6]

$$g=G(t)-V(x,t), \qquad V=\frac{1}{h}\int_0^x \frac{\partial F}{\partial t}dx \tag{5.1}$$

Здесь G — расход через входное сечение трубки и V — известная из условий задачи (предположение 4)) скорость изменения объема трубки длиной x. Подставляя (5.1) в (3.2) и учитывая (4.5), (4.8), получим

$$\frac{S}{F}\left\{\frac{\partial G}{\partial t}+hG^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\beta}{F}-2hG\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta V}{F}-\beta_1 U_w\right)\right\}+\frac{G}{\xi F^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}+$$
$$+\frac{S}{F}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}-h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta V^2}{F}-\beta_1 VU_w+\beta_2 FU_w^2\right)\right\}+\frac{V+FU_w}{\xi F^2} \tag{5.2}$$

Интегрируя (5.2) по длине трубки с учетом граничного условия (2.5) и обозначая угловыми скобками осреднение по x на длине L, приходим к уравнению Риккати относительно G

$$S\left\{\langle F^{-1}\rangle\frac{\partial G}{\partial t}+h\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta F^{-1}\right\rangle G^2\right\}-$$
$$-\left\{2Sh\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(\beta VF^{-1}-\beta_1 U_w)\right\rangle-\langle\xi^{-1}F^{-2}\rangle\right\}G= \tag{5.3}$$
$$=\frac{\Delta}{L}+S\left\langle F^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}-hF^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(\beta V^2F^{-1}-\beta_1 VU_w+\beta_2 FU_w^2)\right\rangle+$$
$$+\langle\xi^{-1}F^{-2}(V+FU_w)\rangle$$

При $\beta=\mathrm{const}$ для дальнейших преобразований могут быть использованы равенства

$$\left(F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F^{-1}\right)=\frac{1}{2L}[F^{-2}(L,t)-F^{-2}(0,t)]$$
$$\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}V^nF^{-1}\right\rangle=\frac{L^{n-1}}{2h^n}\frac{1}{F^2(L,t)}\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle^n-\frac{n}{2h}\left\langle V^{n-1}\frac{\partial F^{-1}}{\partial t}\right\rangle \tag{5.4}$$

Для модифицированных задач с условиями типа (2.7) уравнение (5.3) верно, но в нем нужно выразить Δ через G, V при помощи (2.8) и (5.1), положив (если не учитывать инерционные эффекты)

$$\Delta=P^+(V^+)-P^-(V^-)-(Z^++Z^-)G+Z^-\frac{L}{h}\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle$$
$$\frac{dV^+}{dt}=-G, \qquad \frac{dV^-}{dt}=G-\frac{L}{h}\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \tag{5.5}$$

Когда решение (5.3) найдено, то тем самым по (5.1) найдены g и средняя скорость g/F, а из (5.2) квадратурой определяется давление p. Анализ уравнения (5.3) позволяет, таким образом, выделить случаи, в которых решения исходной задачи могут быть представлены через табулированные функции. Например, переходя от (5.3) к линейному уравнению второго порядка подстановкой $G=\theta'\langle F^{-1}\rangle/\theta h\langle F^{-1}\partial(\beta F^{-1})/\partial x\rangle$, можно установить условия, когда оно решается в гипергеометрических функциях. Не останавливаясь здесь на этих общих приемах, укажем простой важный случай превращения (5.3) в линейное уравнение [6]: если $\beta=\mathrm{const}$ и

$F(0,t)=F(L,t)$, то множитель при G^2 в (5.3) обращается в нуль (см. (5.4)); то же имеет место и при любой непрерывной однозначной зависимости β от F. Исчезновение члена с G^2 в (5.3) не означает отсутствия конвективных инерционных эффектов – они частично сохраняются в коэффициенте при G и в правой части.

Важной характеристикой перистальтического течения при периодическом изменении F во времени является средний за цикл расход. Из (5.1) следует, что при $F(t+1)=F(t)$ имеет место равенство $g_m\equiv\int\limits_0^1 g\,dt=\int\limits_0^1 G\,dt\equiv$ $\equiv G_m$.

При малых значениях h уравнение (5.3) можно решать с помощью разложений по степеням h. Для приближения в пределе $h\to 0$ получается простое уравнение

$$S\langle F^{-1}\rangle\frac{\partial G}{\partial t}+\langle\xi^{-1}F^{-2}\rangle G=\frac{\Delta}{L}+S\left\langle F^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle+\langle\xi^{-1}F^{-2}(V+FU_w)\rangle \tag{5.6}$$

При малых S также возможно использование асимптотических разложений; в пределе $S\to 0$

$$\langle\xi^{-1}F^{-2}\rangle G=\frac{\Delta}{L}+\langle\xi^{-1}F^{-2}(V+FU_w)\rangle \tag{5.7}$$

Медленные течения, для которых расход полностью определяется формулами (5.1), (5.7), сравнительно подробно изучены [1, 2]. Случаи трубки круглого сечения при чисто продольных и чисто радиальных смещениях стенки рассмотрены соответственно в [6, 7]. Решение, эквивалентное формуле (5.7), для эллиптической трубки с поперечными смещениями стенки получено в [8] методами возмущений.

6. Пусть деформации стенки имеют характер бегущей волны, т. е. F, U_w, ξ, β, β_1, β_2 – функции переменной $\zeta=2\pi(x-t)$ (этот случай представляет основной практический интерес [1, 2]). Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial x},\qquad V=\frac{1}{h}[F(0,t)-F] \tag{6.1}$$

Подстановка выражения для V в (5.3) приводит к уравнению того же типа относительно величины $q=G-F(0,t)/h$:

$$S\langle F^{-1}\rangle\frac{\partial q}{\partial t}+Sh\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta F^{-1}\right\rangle q^2+$$
$$+\left\{2S\left[\left\langle F^{-1}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right\rangle+h\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta_1U_w\right\rangle\right]+\langle\xi^{-1}F^{-2}\rangle\right\}q=$$
$$=\frac{\Delta}{L}+\frac{S}{Lh}\ln\frac{F(L,t)}{F(0,t)}-\frac{S}{h}\left\langle F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta F+hF^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta_1FU_w+\right.$$
$$\left.+h^2F^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\beta_2FU_w^2\right\rangle-\frac{1}{h}\langle\xi^{-1}F^{-1}\rangle+\langle\xi^{-1}F^{-1}U_w\rangle \tag{6.2}$$

Если перечисленные выше функции от ξ периодические, а длина трубки L кратна длине волны, то все величины в угловых скобках постоянны и уравнение легко интегрируется при $\Delta=\text{const}$ или при $\Delta=P-(Z^++Z^-)q+$ $+(Z^-/h)\langle\partial F/\partial t\rangle$ (см. (5.5)), $P=\text{const}$.

Пусть далее $\beta=\text{const}$, $U_w=0$, а F, ξ — периодические функции. Тогда из (6.2) следует (ср. с (5.6))

$$S\langle F^{-1}\rangle\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\Delta}{L}-\langle\xi^{-1}F^{-2}\rangle q-\frac{1}{k}\langle\xi^{-1}F^{-1}\rangle \tag{6.3}$$

Интегрируя по времени, находим, что среднее за период значение q_m и, следовательно, расхода G_m не зависят в данном случае от S, т. е. от инерционных эффектов. При $\Delta=\text{const}$ от S не зависит и мгновенный расход g. Аналогичный вывод получен в [6] для чисто продольных смещений стенки цилиндрической трубки. Нетрудно, основываясь на (6.2) или более общих уравнениях (5.3), (5.5), привести примеры и других ситуаций, в которых инерционные эффекты не сказываются на расходе в перистальтическом течении.

Изучение перистальтических течений с бегущими волнами в большинстве работ ограничивается случаем бесконечно длинной трубки, когда можно в системе отсчета, связанной с волной, перейти к стационарной задаче. Для трубок конечной длины эти результаты остаются верными только в случаях типа рассмотренного выше.

7. Квазиодномерный расчет перистальтического течения сводится в конечном счете к решению уравнений (5.3), (5.5), которое легко осуществить численно, а во многих случаях, как показано выше, и аналитическими приемами. Последние позволяют проанализировать с качественной стороны многие закономерности перистальтического транспорта, включая роль инерционных эффектов, формы перистальтических волн и т. д.

Нетрудно, в частности, доказать, что стоячие волны с $F=F_0(x)\eta(t)$, $U_w=0$ могут при $S\ll1$ создать средний по времени поток жидкости, отличный от нуля, только когда хотя бы одно из внешних сопротивлений играет роль клапана ($Z^\pm$ в (5.5) зависит от $\operatorname{sign} g$ при $x=0$ или $x=L$). Когда $S\sim1$, стоячая волна может порождать среднее течение благодаря тому, что сопротивление самой трубки зависит от направления потока.

Структура уравнений (5.3), (5.5) такова, что не существует сколько-нибудь простого правила сложения эффектов от двух и более волн. Так, если $F=F_1(x-c_1t)+F_2(x-c_2t)$, то даже в наинизшем приближении по амплитуде (при сохранении в G членов порядка не выше h^2) средний расход G_m не равен сумме расходов от волн F_1, F_2 по отдельности. Не разделяются и вклады в расход от продольных и поперечных смещений стенки [6].

Для неньютоновских жидкостей квазиодномерные уравнения могут быть построены практически теми же методами, что и для ньютоновской. Например, для нелинейно-вязких жидкостей изменениям подлежат только соотношения (2.7), (2.8), где следует учесть зависимость $Z^\pm$ от $g(0,t)$, $g(L,t)$ соответственно, и замыкающие соотношения (4.5), (4.8) [6]. Процедура их получения может быть основана на решении нелинейной краевой задачи $\operatorname{div}(f(|\nabla u_c|)\nabla u_c)=\partial p_c/\partial x$, $u_c(\varphi_c,\vartheta)=u_{cw}(\vartheta)$, заменяющий (4.1). В частности, для жидкостей со степенным реологическим законом $f(a)\sim a^n$ при $u_w=0$ заведомо получим степенные зависимости E, $\Gamma\tau$ от g, F.

Отметим в заключение, что существует широкий круг задач, в которых задаются не смещения стенки, а приложенные к ней силы или же степень ее активности; тогда к уравнениям (3.1), (3.2) добавляется еще «реологическое» уравнение для стенки. Форма перистальтических волн, вырабатывающихся в таких системах, зависит от условий на концах трубки, что служит источником новых интересных эффектов. В частности, как следует из результатов работ [3, 9], несимметрия условий на концах может обеспечить направленный средний поток даже тогда, когда внешнее воздействие на трубку имеет характер стоячей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rath H. J.* Peristaltische Strömungen. Berlin e.a.: Springer, 1980. 119 p.
2. *Srivastava L. M., Srivastava V. P., Singha S. N.* Peristaltic transport of a physiological fluid. Pt 1.– Biorheology, 1983, v. 20, № 2, p. 153–166.
3. *Киреева Е. Е., Регирер С. А.* Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Вынужденные колебания.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 94–99.
4. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.
5. *Кочин Н. С., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.– Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
6. *Регирер С. А.* О роли продольных смещений стенки в перистальтических течениях.– В кн.: Избранные вопросы современной механики. Ч. I. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 165–170.
7. *Регирер С. А.* О движении вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 202–204.
8. *Shen M. C., Shih S. M., Wu A. M.* Asymptotic method for peristaltic transport.– Bull. Math. Biol., 1980, v. 42, № 3, p. 305–325.
9. *Rath H. J., Teipel I.* Der Fördereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen.– Z. angew. Math. und Phys., 1978, B. 29, № 1, S. 123–133.

Институт механики МГУ,
Москва

Поступила в редакцию
11.X.1983