

УДК 532.529

**ВЛИЯНИЕ РАСТВОРИМОСТИ ГАЗА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ  
ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬЯМИ И НЕПОДВИЖНОЙ НАСАДКОЙ**

**ЗЕЛЕНКО В. Л.**

Неустойчивость барботажного слоя, связанная с наличием вертикального градиента скорости всплытия пузырей, вследствие чего возникает стратификация слоя по плотности, рассмотрена в работе [1]. Аналогичный механизм неустойчивости взвешенного слоя исследован в [2]. В работе [3] показано стабилизирующее влияние электрического и магнитного полей на барботажный слой. В [4] рассмотрено влияние условий подвода газа на устойчивость барботажного слоя с неподвижной насадкой. В настоящей работе рассмотрена устойчивость механического равновесия горизонтального слоя жидкости с неподвижной насадкой, через который барботируется растворимый в жидкости газ.

Показано, что существует критическое значение коэффициента растворимости газа, при достижении которого механическое равновесие оказывается неустойчивым относительно монотонных возмущений.

**1. Постановка задачи.** Пусть в нижнее сечение горизонтального слоя жидкости с неподвижной насадкой равномерно подается растворимый в жидкости газ. Начало прямоугольной системы координат  $xuz$  расположено в нижнем сечении слоя, ось  $z$  направлена по вертикали вверх.

Поскольку в каждой точке слоя осуществляется контакт жидкой и газовой фаз, то локальные концентрация растворенного газа, температура и давление связаны некоторым равновесным соотношением. Причем с ростом давления увеличивается концентрация растворенного в жидкости газа и, если процесс растворения не сопровождается химическим взаимодействием, эта зависимость носит линейный характер, выражаемый известным законом Генри [5, 6]

$$\rho_{2l} = K_p (p/p_0) \rho_2^{\circ\circ} \quad (1.1)$$

Здесь  $K_p$  — коэффициент растворимости,  $p_0$ ,  $p$  — давление в верхнем сечении и внутри слоя,  $\rho_2^{\circ\circ}$  — плотность газа при температуре среды и давлении  $p_0$ ,  $\rho_{2l}$  — масса газа, растворенного в 1 см<sup>3</sup> жидкости.

Так как в дальнейшем будут рассмотрены слои с малым относительным перепадом давления  $(p-p_0)/p_0 \ll 1$ , то формулу (1.1) можно применять и в тех случаях, когда закон Генри не выполняется, рассматривая это выражение как результат линеаризации истинной нелинейной зависимости в окрестности  $p_0$ .

Без учета изменения массы жидкости в связи с фазовым переходом жидкости — газ в случае постоянной пористости насадки  $\epsilon$  уравнения неразрывности и импульса фаз имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [(1-q)\mathbf{v}_1] &= \partial q / \partial t \\ (1-q)\rho_1^{\circ} d_1 \mathbf{v}_1 / dt &= -(1-q) \nabla p + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{21} - \rho_1^{\circ} (1-q) g \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \partial q / \partial t + \operatorname{div} (q \mathbf{v}_2) &= J / \epsilon \\ -q \nabla p + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $F_{ij}$  — сила, действующая со стороны  $i$ -й фазы на  $j$ -ю фазу, причем значения индексов 1, 2, 3 обозначают жидкую, газовую и твердую фазы соответственно,  $v_i$  — скорость  $i$ -й фазы,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $J$  — источник газосодержания,  $q$  — газосодержание (объемная доля газа в газожидкостной смеси),  $\rho_1^\circ$  — истинная плотность жидкости,  $\mathbf{v}$  — единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Предполагая, что при взаимодействии жидкой и газовой фаз с неподвижной твердой фазой выполняется линейный закон Дарси, имеем:  $F_{31} = K_{13}v_1$ ,  $F_{32} = -qK_{32}v_2$ . Силу взаимодействия газовой и жидкой фаз представим в виде  $F_{12} = F_{12}^u + F_{12}^m$ , где  $F_{12}^u = qK_{12}(v_1 - v_2)$  — силы трения,  $F_{12}^m = q\rho_1^\circ\chi(d_1v_1/dt - d_2v_2/dt)$  — сила присоединенной массы,  $K_{ij} = K_{ij}(\varepsilon)$ .

**2. Невозмущенное стационарное состояние.** Предположим, что невозмущенное газосодержание  $q_0$  мало

$$q_0 \ll 1 \quad (2.1)$$

При этом стационарное решение системы уравнений (1.2), (1.3), соответствующее механическому равновесию, имеет вид

$$v_1 = 0, \quad q = q_0, \quad v_2 = [V_2^\circ + O(q_0)]\mathbf{v} \quad (2.2)$$

$$p = p_0 + \rho_1^\circ q(H - z) + O(q_0)$$

Здесь  $V_2^\circ$  — среднее значение скорости всплытия одиночного пузыря вдали от входа в слой,  $O(q_0)$  — члены порядка  $q_0$ ,  $H$  — высота слоя.

Пусть  $v_1 = 0$ ,  $q \rightarrow 0$ , тогда из (1.2), (1.3) следует уравнение относительно скорости всплытия одиночного пузыря  $V_2^\circ$ .

$$d_2 V_2^\circ / dt + (K_{23} + K_{12}) V_2^\circ / \rho_1^\circ \chi - g / \chi = 0$$

Решением этого уравнения является

$$V_2^\circ = V_2^\circ + (U - V_2^\circ) \exp(-\kappa t)$$

где  $V_2^\circ = \rho_1^\circ g / (K_{12} + K_{23})$ ,  $U$  — скорость всплытия пузыря на входе в слой,  $\kappa = g / \chi V_1^\circ$ . Длина входного участка  $l$ , на которой происходит релаксация скорости всплытия пузыря к  $V_2^\circ$ , имеет порядок  $l \sim (V_2^\circ)^2 / g$ , если  $U \sim V_2^\circ$ . Поскольку обычно  $l \sim \delta$ , где  $\delta$  — размер элемента насадки, а  $V_2^\circ$  в каждой точке слоя получается в результате осреднения по объему, содержащему большое число элементов насадки, то скорость всплытия одиночного пузыря всюду в слое следует положить равной  $V_2^\circ$ .

**3. Нормальные возмущения.** Рассмотрим малые нестационарные возмущения равновесия (линейная теория устойчивости)  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $q'$ ,  $p'$ . При этом из (1.2), (1.3) с учетом (2.1), (2.2) следуют линейные уравнения

$$\operatorname{div} v_1' = \partial q' / \partial t + O(q_0) \Phi$$

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1^\circ} \nabla p' - \frac{K_{13}}{\rho_1^\circ} v_1' + \frac{K_{12}}{K_{23} + K_{12}} g q' \mathbf{v} - q_0 \frac{K_{23}}{\rho_1^\circ} v_2' + O(q_0) \Phi$$

$$\partial q' / \partial t + V_2^\circ \partial q' / \partial z = J' / \varepsilon + O(q_0) \Phi \quad (3.1)$$

Здесь  $\Phi$  — линейные комбинации малых возмущений.

Для определения явного вида  $J$  запишем уравнение сохранения массы растворенного в жидкости газа

$$\partial [\rho_{2l}(1 - q)] / \partial t + \operatorname{div} [\rho_{2l}(1 - q) v_1] = -\rho_2^\circ J / \varepsilon$$

Здесь  $\rho_2^\circ$  — истинная плотность газа при давлении  $p$ .

В приближении малого относительного изменения давления поперек слоя  $\alpha = \rho_1^\circ g H / p_0 \ll 1$ , благодаря чему можно пренебречь сжимаемостью газа, из полученных уравнений следует выражение для возмущения источ-

ника газовой фазы  $J'$

$$\frac{J'}{\varepsilon} = -K_p \left\{ \frac{\partial(p'/p_0)}{\partial t} - \frac{\alpha}{H} v_{1z}' \right\} + O(q_0) \Phi \quad (3.2)$$

Введем новые единицы: расстояния  $H$ , времени  $H/V_2^{\circ\circ}$ , скорости  $V_2^{\circ\circ}$ , давления  $K_{13}V_2^{\circ\circ}H$ . При этом последнее уравнение системы (3.1) с учетом (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} &= \alpha K_p V_{1z} - \frac{M \partial p}{\partial t} + O(q_0) \Phi \\ M &= K_{13} V_2^{\circ\circ} H K_p / p_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предположим, что  $M/\alpha K_p \ll 1$ , тогда вторым членом в правой части (3.3) можно пренебречь в сравнении с первым. Заметим, что членом  $\alpha K_p V_{1z}$  пренебрегать нельзя даже при малых  $\alpha K_p$ , поскольку именно этот член ответствен за неустойчивость. Поэтому в случае  $\alpha K_p \ll 1$  дальнейший вывод будет справедлив при более жестких ограничениях, накладываемых на  $q_0$ :  $q_0 \ll \alpha K_p$ .

Пренебрегая малыми членами в (3.1), с учетом (3.3) получим в безразмерном виде систему уравнений с граничными условиями, следующими из предположения о невозмущенности потока газа на входе в слой и непроницаемости границ слоя для жидкой фазы

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_1 = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{1}{S} \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = -\nabla P - \mathbf{V}_1 + \frac{K_{12}}{K_{13}} q \mathbf{v} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = \alpha K_p V_{1z}$$

$$z=0, \quad q=0, \quad V_{1z}=0, \quad z=1, \quad V_{1z}=0$$

$$s = \frac{H K_{13}}{V_2^{\circ\circ} \rho_1^{\circ\circ}}$$

Здесь  $S$  — модифицированное число Струхалия. Заметим, что возмущение скорости газа  $\mathbf{V}_2$  не входит в (3.4), и, таким образом, отпадает необходимость анализа уравнения (1.3), в частности несущественной оказывается сила присоединенной массы.

Применяя операцию  $\operatorname{rot rot}$  к обеим частям второго уравнения системы (3.4), можно исключить  $P, \mathbf{V}_1$ . Вводя далее нормальные возмущения, зависящие от времени и координат по закону  $q = Q(z) \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$ , получим следующее уравнение и краевые условия для амплитуды  $Q(z)$ :

$$Q''' - \lambda Q'' - (k^2 - \alpha K_p \lambda) Q' + \left[ \lambda + \frac{\operatorname{Ar}}{1 + \lambda/S} \right] k^2 Q = 0$$

$$z=0, \quad Q=0, \quad Q'=0; \quad z=1, \quad Q' - \lambda Q = 0$$

$$\operatorname{Ar} = \alpha K_p K_{12} / K_{13} \quad (3.5)$$

Здесь  $(') = d/dz$ ,  $\lambda$  — декремент возмущений,  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $k_1, k_2$  — вещественные волновые числа,  $\operatorname{Ar}$  — модифицированное число Архимеда.

**4. Нейтральная кривая устойчивости.** Условием нейтральности монотонных возмущений является  $\lambda = 0$ . При этом дискретный спектр собственных значений  $\operatorname{Ar}_n k^2$  задачи (3.5) определяет зависимости критических значений  $\operatorname{Ar}_n$  от  $k$ , где  $n$  — номер уровня неустойчивости.

Для явного определения нейтральной кривой устойчивости выпишем характеристический многочлен уравнения (3.5) при  $\lambda = 0$

$$L(r) = r^3 + mr + D, \quad m = -k^2, \quad D = \operatorname{Ar} k^2$$

В случае кратных корней этого многочлена можно показать, что однородная краевая задача (3.5) собственных значений не имеет. Вид корней зависит от знаков величин  $R=(m/3)^3+(D/2)^2$  и  $m$ . При  $R<0$  задача (3.5) также не имеет собственных значений.

Рассмотрим случай  $0 \leq R$ . Поскольку  $m < 0$ , корни характеристического многочлена имеют вид [8]

$$r_{1,2} = -2 \sqrt{-\frac{m}{3}} \frac{1}{\sin 2\gamma}, \quad r_{2,3} = \sqrt{-\frac{m}{3}} \left( \frac{1}{\sin 2\gamma} \pm i\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\gamma \right)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}, \quad \sin \beta = \frac{2}{D} \sqrt{\left(-\frac{m}{3}\right)^3}, \quad |\gamma| \leq \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.1)$$

Здесь  $|\gamma| = \pi/4$  соответствует уже рассмотренному случаю кратных корней, поэтому далее предположим, что  $|\gamma| < \pi/4$ . Из соотношений (4.1) и вида  $m$  и  $D$  следует:

$$0 < \beta < \pi/2, \quad 0 < \gamma < \pi/4, \quad \operatorname{Ar} = (2\sqrt{3}/9)k/\sin \beta$$

Приравнивая к нулю характеристический определитель задачи (3.5), с учетом (4.1) получим

$$\operatorname{tg}(k \operatorname{ctg} 2\gamma) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\cos 2\gamma}{1 + \cos^2 2\gamma} \left\{ 1 - \frac{\exp(-\sqrt{3}k/\sin 2\gamma)}{\cos(k \operatorname{ctg} 2\gamma)} \right\} \quad (4.2)$$

Из полученных выше соотношений следует, что при фиксированном  $k$  минимальное критическое значение  $\operatorname{Ar}$  соответствует максимальному значению  $\sin \beta$ . Поскольку  $\gamma$  зависит монотонно от  $\beta$ , то корнем  $\gamma_1$  уравнения (4.2), соответствующим первому уровню неустойчивости, является ближайший слева к  $\pi/4$  корень; второй слева от  $\pi/4$  корень  $\gamma_2$  соответствует второму уровню неустойчивости и т. д.

Из (4.2) следует, что для каждого  $n$ , при  $k \rightarrow \infty$   $\gamma_n \rightarrow \pi/4$  и в силу (4.1)  $\beta_n \rightarrow \pi/2$ . Таким образом, имеем асимптотику

$$k \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Ar}_n \rightarrow (2\sqrt{3}/9)k \quad (4.3)$$

Из (4.2) следует, что при  $k \rightarrow 0$   $\gamma_n \rightarrow 0$ , вследствие чего, пренебрегая вторым членом в правой части (4.2), получим  $k/2\gamma = -\pi/6 + n$ , где  $n$  — по-прежнему номер уровня неустойчивости. При этом из (4.1) следует приближенная асимптотика

$$k \rightarrow 0, \quad \operatorname{Ar}_n \rightarrow \pi^3 3^{-9/2} 2(6n-1)^3/k^2$$

Нетрудно убедиться в том, что пренебрежение вторым членом в правой части (4.2) допустимо

$$\left| \frac{\exp(-\sqrt{3}k/\sin 2\gamma)}{\cos(k \operatorname{ctg} 2\gamma)} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}(6n-1)\right\} \ll 1$$

Минимальное значение критического числа Архимеда и соответствующее ему волновое число равны  $\operatorname{Ar}_m = 4,679$ ,  $k_m = 6,068$ .

На фиг. 1 показано поведение критических чисел Архимеда для трех нижних уровней неустойчивости горизонтального слоя с непроницаемыми для жидкости границами. Из фиг. 1 следует, что горизонтальный масштаб наиболее опасного возмущения, соответствующего уровню неустойчивости номера  $n$ , уменьшается с ростом  $n$ . Выпишем при  $\lambda=0$  собственную функцию однородно-краевой задачи (3.5)  $Q_n(z)$ , принадлежащую собст-

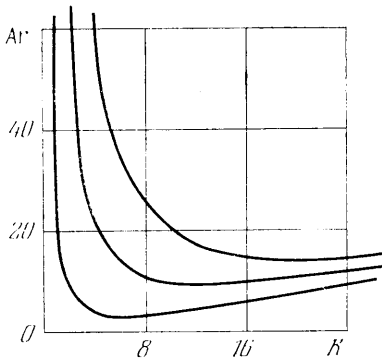
венному числу  $Ag_{*n}k^2$

$$Q_n(Z) = \exp\left\{\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{k}{\sin 2\gamma_n} Z\right\} \left[ \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}k}{\sin 2\gamma_n} Z\right\} - \cos\left\{(k \operatorname{ctg} 2\gamma_n)Z\right\} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 2\gamma_n} \sin\left\{(k \operatorname{ctg} 2\gamma_n)Z\right\} \right]$$

Здесь  $\gamma_n$  —  $n$ -й слева от  $\pi/4$  корень уравнения (4.2). Поскольку с ростом  $n$   $\gamma_n$  убывает, видно, что с увеличением номера уровня неустойчивости  $n$  уменьшается вертикальный масштаб критических возмущений.

**5. Связь модифицированного числа Архимеда  $Ag$  с неустойчивостью.** Рассмотрим в плоскости  $(k, Ag)$  точку  $T$  с координатами  $k_0, Ag_0$ , расположенную вблизи  $n$ -го уровня неустойчивости, но не принадлежащую ему, т. е.

$$0 < |\Delta Ag| \ll 1, \quad \Delta Ag = Ag_0 - Ag_{*n}(k_0) \quad (5.1)$$



Фиг. 1

имеют место соотношение  $Ag(k_0)/(1-\lambda^*) = Ag_{*n}$  и вытекающая отсюда связь  $\operatorname{sign} \lambda = -\operatorname{sign} \Delta Ag$ .

Таким образом, если  $T$  расположена над кривой, описывающей  $n$ -й уровень неустойчивости, то система неустойчива относительно возмущений этого уровня спектра, и, наоборот, если  $\Delta Ag < 0$ , то возмущения указанного типа затухают. В частности, если  $Ag > 4,679$ , то барботажный слой неустойчив.

Покажем, что полученный вывод о связи величины  $Ag$  с неустойчивостью справедлив при произвольных значениях числа Струхала  $S$ . Пусть для определенности  $0 < \Delta Ag$  и тем не менее при некотором  $S < \lambda$ , тогда в силу непрерывной зависимости  $\lambda(Ag)$  существует промежуточное значение  $S' < S_0$ , при котором  $\lambda = 0$ , однако точка  $T$  по определению не принадлежит нейтральной кривой устойчивости. Полученное противоречие доказывает отсутствие  $S_0$ , при котором  $0 < \lambda$ .

**6. Неустойчивость слоя при различных граничных условиях.** Рассмотренные граничные условия, выражающие непроницаемость границ слоя для жидкости, реализуются, например, когда над трехфазным слоем расположен слой сухой насадки.

Однако возможна постановка граничных условий другого типа, когда поверх трехфазного слоя (соответственно под слоем) расположен слой жидкости без насадки. В этом случае граничное условие получается из требования обращения в нуль на границе горизонтального градиента давления, при этом проток жидкости через границу возможен [9, 10]. С помощью (3.4) рассматриваемое граничное условие может быть представлено для нейтральных монотонных возмущений либо в виде  $P=0$ , либо  $Q''=0$ .

Рассмотрим задачу об определении спектра критических значений чис-

ла Архимеда  $Ar_n$  в случае, когда на одной границе задано условие  $Q'=0$ , а на другой  $Q''=0$  (при  $z=0$  по-прежнему полагаем  $Q=0$ ). Приравнявая к нулю характеристический определитель, получим уравнение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(k \operatorname{ctg} 2\gamma) = & -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2\gamma (5+3 \cos^2 2\gamma) \sin^{-2} 2\gamma \times \\ & \times \left[ 1+4 \exp\left(-\frac{k\sqrt{3}}{\sin 2\gamma}\right) (5+3 \cos^2 2\gamma)^{-1} \cos^{-1}(k \operatorname{ctg} 2\gamma) \right] \end{aligned}$$

Можно показать, что вид этого уравнения не зависит от порядка постановки краевых условий  $Q'=0$  и  $Q''=0$  на нижней и верхней границах слоя.

При каждом  $0 < k$  в интервале  $0 < \gamma < \pi/4$  это уравнение имеет счетное множество корней  $\gamma_n$ , связанных с  $Ar_n$  формулами (4.1). В результате вычислений, аналогичных предыдущим, можно показать, что при  $k \rightarrow \infty$  имеет место асимптотика (4.3), однако при  $k \rightarrow 0$  асимптотика отличается от соответствующей в предыдущей задаче и выражается приближенной формулой

$$Ar_{n \rightarrow 0} \rightarrow \pi^3 3^{-n/2} (2n-1)^3 / k^2$$

Минимальное значение критического числа Архимеда и соответствующее ему волновое число равны:  $Ar_m = 3,566$ ,  $k_m = 3,942$ .

Таким образом, «ослабление» краевого условия приводит к понижению устойчивости и увеличению горизонтального масштаба наиболее опасного возмущения. Аналогичные результаты получены в теории конвективной устойчивости [9, 10].

Наконец, рассмотрим задачу, когда на обеих границах выполняется условие  $P=0$ . В этом случае в системе уравнений (3.4) удобнее перейти к давлению. При этом получим уравнение, которое при  $\lambda=0$  имеет тот же вид, что и в (3.5), но с другими краевыми условиями

$$\begin{aligned} P''' - k^2 P' + Ar k^2 P = 0 \\ z=0, \quad P=0, \quad P'' + Ar P = 0 \\ z=1, \quad P=0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Нетрудно показать, что второе условие при  $z=0$  эквивалентно  $Q=0$ .

Приравнявая к нулю характеристический определитель задачи, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(k \operatorname{ctg} 2\gamma) = & \left[ Ar + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k}{\sin 2\gamma} \right] \left[ Ar - \frac{(1+\cos^2 2\gamma)k}{\sqrt{3} \sin 2\gamma} \right]^{-1} \times \\ & \times \frac{\cos 2\gamma}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{\exp(-\sqrt{3} k / \sin 2\gamma)}{\cos(k \operatorname{ctg} 2\gamma)} \right] \end{aligned}$$

При  $k \rightarrow \infty$  для всех уровней неустойчивости справедлива асимптотика (4.3). При  $k \rightarrow 0$  рассмотрим два случая:  $Ar \rightarrow \infty$  и  $Ar \rightarrow \text{const}$ . В первом случае, пренебрегая экспоненциальным членом, имеем асимптотику  $k/2\gamma \rightarrow \pi(-5/6+n)$ ; используя далее (4.1), получим

$$Ar_{n \rightarrow 0} \rightarrow \pi^3 3^{-n/2} (6n-5)^3 / k^2$$

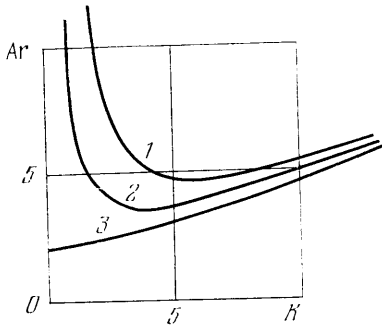
Заметим, что найденная асимптотика справедлива при  $2 \leq n$ , в то время как при  $n=1$  экспоненциальный член достаточно велик и в окрестности  $k/2\gamma = \pi/6$  уравнение корней не имеет.

Асимптотика первого уровня неустойчивости получается при рассмотрении второго случая. Представим функции, составляющие фундамен-

ную систему решений уравнения (6.1), в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $k$ :  $P_1 = z^2 + (k^2/60)z^4(5 - \text{Ar} z) + O(k^4)$ ,  $P_2 = z + (k^2/24)z^3(4 - \text{Ar} z) + O(k^4)$ ,  $P_3 = 1 - (\text{Ar}/6)k^2z^3 + O(k^4)$ .

Приравнявая к нулю характеристический определитель задачи (6.1), получим для нижнего уровня неустойчивости асимптотику

$$\text{Ar}_{,1} \rightarrow 2 + k^2/15$$



Фиг. 2

На фиг. 2 показаны нейтральные кривые устойчивости, соответствующие следующим условиям: 1) обе границы непроницаемы для жидкости; 2) одна из границ разделяет трехфазный слой с жидкостью без насадки, другая граница непроницаема для жидкости; 3) обе границы разделяют трехфазный слой с жидкостью без насадки.

Из фиг. 2 следует, что влияние типа граничных условий на устойчивость горизонтального слоя существенно лишь в области возмущений, горизонтальный масштаб которых  $H/2 < L$ .

Автор благодарит В. П. Мясникова и В. В. Дильмана за внимание к работе, М. М. Розенберга за помощь в программировании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Об устойчивости слоя жидкости при барботаже. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 47–53.
2. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Конвективная неустойчивость однородного взвешенного слоя. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 39–46.
3. Налегова В. А. Стабилизация барботажных процессов электрическим полем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 5–12.
4. Дильман В. В., Зеленко В. Л. Влияние газораспределительного устройства на крупномасштабное движение в трехфазном неподвижном слое. — Хим. пром-сть, 1981, № 11, с. 673–675.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976, с. 299.
6. Стромберг А. Г., Семченко Д. П. Физическая химия. М.: Высш. школа, 1973, с. 215.
7. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
8. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers. N. Y. а. о.: McGraw – Hill, 1961, p. 47. (Рус. перев.: Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике. М.: Наука, 1970, с. 47.)
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, с. 296.
10. Larwood E. R. Convection of a fluid in porous medium. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1948, v. 44, № 4, p. 508–521.

Москва

Поступила в редакцию  
15.II.1983