

УДК 532.526.2.013.4

## О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА ЗВУКОМ

РУБАН А. И.

Среди различных способов генерации волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое наибольшее распространение получили два (см. [1, 2]). Первый из них заключается в возбуждении колебаний потока с помощью некоторых осциллирующих устройств, устанавливаемых на обтекаемой поверхности или около нее. Классическим примером такого устройства является вибрирующая лента, нашедшая широкое применение в экспериментальных исследованиях устойчивости пограничного слоя. Асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса для дозвукового течения газа около плоской пластины, расположенной параллельно набегающему потоку, в этих условиях был проведен в [3]. Роль осциллирующего устройства играет малый отрезок этой пластины, совершающий колебательное движение в направлении своей нормали. Решение построено для частот осциллятора, меньших критического значения, которое совпадает с нейтральной частотой на нижней ветви кривой устойчивости пограничного слоя. Оказалось, что при всех частотах из этого диапазона возмущения затухают вниз по потоку от осциллятора. Однако при стремлении частоты к своему критическому значению скорость затухания стремится к нулю, так что предельное решение описывает явление генерации волны Толлмина — Шлихтинга.

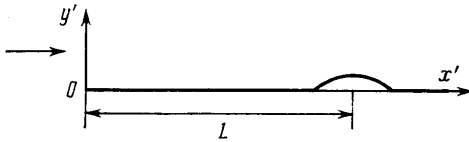
Второй способ состоит в облучении пограничного слоя звуковыми волнами. В этом случае генерация волн Толлмина — Шлихтинга происходит на локальных неоднородностях течения [2]. К их числу относится окрестность передней кромки тонкого тела и область отрыва пограничного слоя. Генераторами волн Толлмина — Шлихтинга являются также точки излома обтекаемой поверхности и шероховатости на ней. Для изучения этого явления в настоящей работе выводится асимптотическая система уравнений, описывающая процесс взаимодействия звуковой волны с неровностью на поверхности обтекаемого тела. Построено решение задачи о взаимодействии. Показано, что при частотах звуковой волны, близких к частоте нейтральных колебаний пограничного слоя, вниз по потоку от неровности распространяется незатухающая волна Толлмина — Шлихтинга.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим двумерное течение газа (фиг. 1) около плоской пластины, ориентированной вдоль скорости набегающего потока  $U_\infty$ , причем будем считать ее дозвуковой ( $M < 1$ ). Обозначим плотность газа в этом потоке через  $\rho_\infty$ , давление —  $p_\infty$ , а энтальпию —  $h_\infty$ . Введем декартову систему координат  $(x', y')$ , совмещающую ее начало с передней кромкой пластины и направляющую ось  $x'$  вдоль поверхности пластины. Составляющие вектора скорости в этой системе координат обозначим через  $u', v'$ . Давление обозначим через  $p'$ , плотность —  $\rho'$ , энтальпию —  $h'$ , а коэффициент вязкости —  $\mu'$ . Пусть рассматриваемый газ имеет адиабатическую постоянную  $\gamma$ , а его термодинамическое состояние описывается уравнением Клапейрона.

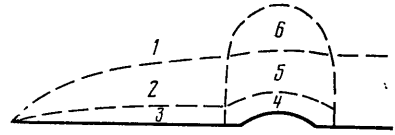
Предположим, что на расстоянии  $L$  от передней кромки пластины ее поверхность имеет локальную неровность. Продольный размер этой неровности будем считать величиной порядка  $LR^{-3/8}$ , а поперечный — порядка  $LR^{-5/8}$ , где число Рейнольдса  $R = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$  ( $\mu_\infty$  — коэффициент вязкости газа в невозмущенном потоке перед пластиной). Форма обтекаемой поверхности может быть в этом случае представлена с помощью выражения

$$y' = LR^{-5/8} g \left( \frac{x' - L}{LR^{-3/8}} \right) \quad (1.1)$$

Функция  $g$  является безразмерной и остается величиной порядка единицы при сколь угодно больших числах Рейнольдса. В зависимости от вида этой функции соотношение (1.1) может выражать собой различные формы неровности: выступ на плоской поверхности, излом этой поверхности, уступ и т. п. Стационарное обтекание таких форм описывается теорией свободного взаимодействия (см. обзоры [4–6]). Нестационарный аналог этой теории [7–9] предсказывает асимптотическую структуру волны Толлмина — Шлихтинга на нижней ветви нейтральной кривой.



Фиг. 1



Фиг. 2

Указанное обстоятельство как раз и предопределило выбор характерных размеров неровности.

Относительно акустических возмущений предположим, что их представляет монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в направлении оси  $x'$ . Теорию взаимодействия этой волны с неровностью будем строить, считая частоту звука  $\omega'$  величиной порядка  $(U_\infty/L)R^{\frac{1}{2}}$ . Это условие обычно для нестационарной теории свободного взаимодействия. В частности, оно удовлетворяется, если частота звука совпадает с нейтральной частотой на нижней ветви кривой устойчивости пограничного слоя.

Величину амплитуды  $a'$  звуковой волны будем выбирать из следующих соображений. Пусть характерное изменение давления в звуковой волне оценивается как  $\Delta p' \sim \rho_\infty U_\infty^2 a'$ . Длина волны при  $M=O(1)$  является величиной порядка  $LR^{-\frac{1}{2}}$ . Поэтому для градиента давления имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L} a' R^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

Наибольший интерес представляют такие значения амплитуды, при которых градиент давления (1.2) в звуковой волне становится соизмеримым с градиентом давления в стационарном потоке около неровности (см. [4–6]). Это требование выполняется, если  $a' = O(R^{-1/2})$ .

Задача состоит теперь в отыскании решения уравнений Навье — Стокса, описывающего данное течение. При решении этой задачи будем пользоваться методом сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [10]), применяя его к анализу уравнений Навье — Стокса при  $R \rightarrow \infty$  и  $M = O(1)$ .

**2. Течение перед неровностью.** Плоская пластина, помещенная в однородный поток газа вдоль направления его движения, возмущает этот поток лишь в непосредственной близости от своей поверхности. Поэтому стационарное течение около пластины почти всюду однородно. Исключение составляет пристеночный пограничный слой, толщина которого стремится к нулю при возрастании числа Рейнольдса по закону  $y' = O(LR^{-1/2})$ . Решение стационарных уравнений Навье — Стокса в пограничном слое на верхней поверхности пластины представляется в виде следующих асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} u' &= U_\infty u_0(X, Y) + \dots, & v' &= U_\infty R^{-1/2} v_0(X, Y) + \dots \\ \rho' &= \rho_\infty \rho_0(X, Y) + \dots, & h' &= h_\infty h_0(X, Y) + \dots \\ x' &= LX, & y' &= LR^{-1/2} Y \end{aligned} \quad (2.1)$$

Безразмерные функции  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$  удовлетворяют обычным уравнениям пограничного слоя. Решение этих уравнений может быть найдено, если известны температурные условия на поверхности пластины и зависимость безразмерного коэффициента вязкости  $\mu_0 = \mu'/\mu_\infty$  от энтальпии  $h_0$ .

Анализ нестационарного течения начнем с области 1 (фиг. 2), лежащей вне пограничного слоя. Решение уравнений Навье – Стокса представим здесь в виде

$$\begin{aligned} u' &= U_\infty + U_\infty R^{-1/2} u_1 + \dots, & p' &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/2} p_1 + \dots \\ \rho' &= \rho_\infty + \rho_\infty R^{-1/2} \rho_1 + \dots, & h' &= h_\infty + U_\infty^2 R^{-1/2} h_1 + \dots \\ t' &= (L/U_\infty) R^{-1/2} t_*, & x' &= LR^{-1/2} x_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для определения функций  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $h_1$  подставим разложения (2.2) в уравнения Навье – Стокса и произведем предельный переход при  $R \rightarrow \infty$ . В результате получим линейную систему акустических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_*} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial h_1}{\partial t_*} + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial t_*} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t_*} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} &= 0, & p_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} h_1 + \frac{1}{\gamma M^2} \rho_1 \end{aligned}$$

Решение этой системы, описывающее монохроматическую волну, бегущую вдоль поверхности пластины, имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= a_* \sin \xi, & u_1 &= M p_1, & \rho_1 &= M^2 p_1, & h_1 &= p_1 \\ \xi &= \omega_* [(1+M)t_* - Mx_1] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Постоянные  $a_*$  и  $\omega_*$  характеризуют амплитуду волны и ее частоту.

Рассмотрим процесс проникновения звуковой волны в пограничный слой. Стационарный поток во всей толще пограничного слоя описывается соотношениями (2.1). Поэтому решение уравнений Навье – Стокса для нестационарного течения в области 2 представим в виде

$$\begin{aligned} u' &= U_\infty u_0 + U_\infty R^{-1/2} M a_* u_2(X, Y) \sin \xi + \dots \\ v' &= U_\infty R^{-3/2} M^2 a_* \omega_* v_2(X, Y) \cos \xi + U_\infty R^{-1/2} v_0 + \dots \\ p' &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/2} a_* p_2(X, Y) \sin \xi + \dots \\ \rho' &= \rho_\infty \rho_0 + \rho_\infty R^{-1/2} M^2 a_* \rho_2(X, Y) \sin \xi + \dots \\ h' &= h_\infty h_0 + U_\infty^2 R^{-1/2} a_* h_2(X, Y) \sin \xi + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Форма нестационарных членов в разложениях (2.4) выбрана таким образом, чтобы условие сращивания с решением (2.3) для области 1 имело вид при  $Y = \infty$ :  $u_2 = p_2 = \rho_2 = h_2 = 1$ .

Система уравнений для нестационарных членов разложений (2.4)

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[ (1+M-u_0 M) u_2 + M v_2 \frac{\partial u_0}{\partial Y} \right] &= 1, & \frac{\partial p_2}{\partial Y} &= 0 \\ \rho_0 \left[ (1+M-u_0 M) h_2 + \frac{v_2}{\gamma-1} \frac{\partial h_0}{\partial Y} \right] &= 1+M-u_0 M \\ (1+M-u_0 M) \rho_2 - \rho_0 u_2 + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho_0 v_2) &= 0 \\ (\gamma-1) \rho_0 h_2 + h_0 \rho_2 &= \gamma \end{aligned} \quad (2.5)$$

не содержит вязких членов уравнений Навье – Стокса. Поэтому вместо

условий прилипания на поверхности пластины необходимо поставить условие непротекания газа через эту поверхность:  $v_2=0$  при  $Y=0$ . Используя это условие и учитывая, что на поверхности пластины  $u_0=0$ , из (2.5) получим

$$u_2(X, 0) = \frac{1}{(1+M)\rho_0(X, 0)}, \quad h_2(X, 0) = \frac{1}{\rho_0(X, 0)} \quad (2.6)$$

Условие прилипания на поверхности пластины не удовлетворяется. Это указывает на необходимость введения дополнительной области  $\mathcal{Z}$ , где течение газа вязкое. Из соотношений (2.6) и обычного требования о равенстве порядков нестационарного и вязкого членов в уравнениях Навье — Стокса следует, что толщина области  $\mathcal{Z}$  оценивается как  $y' = O(LR^{-5/8})$ .

Решение уравнений Навье — Стокса в этой области запишем в виде следующих асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} u' &= U_\infty R^{-1/8} u_3 + \dots, \quad v' = U_\infty R^{-1/8} v_3 + \dots, \quad p' = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/8} p_3 + \dots \\ \rho' &= \rho_\infty \rho_0(X, 0) + \rho_\infty R^{-1/8} \rho_3 + \dots, \quad h' = h_\infty h_0(X, 0) + U_\infty^2 R^{-1/8} h_3 + \dots \\ \mu' &= \mu_\infty \mu_0(X, 0) + \mu_\infty R^{-1/8} \mu_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции с индексом 3 являются функциями четырех независимых переменных:  $t_*$ ,  $x_1$ ,  $X$  и  $y_* = (y'/L)R^{5/8}$ .

Подстановка разложений (2.7) в уравнения Навье — Стокса показывает, что давление не меняется поперек области  $\mathcal{Z}$  и совпадает с давлением в областях 2 и 1:  $p_3 = a \cdot \sin \xi$ . Уравнение импульсов

$$\rho_0(X, 0) \frac{\partial u_3}{\partial t_*} = - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} + \mu_0(X, 0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_*^2} \quad (2.8)$$

отделяется от уравнения энергии и уравнения неразрывности и может рассматриваться независимо от них.

Краевыми условиями для уравнения (2.8) являются условие срачивания с решением (2.6) в области 2 и условие прилипания на поверхности пластины

$$\begin{aligned} y_* \rightarrow \infty: \quad u_3 &= \frac{\partial u_0}{\partial Y}(X, 0) y_* + \frac{Ma_*}{(1+M)\rho_0(X, 0)} \sin \xi \\ y_* = 0: \quad u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Периодическое во времени решение задачи (2.8), (2.9) имеет вид

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{\partial u_0}{\partial Y}(X, 0) y_* + d \sin \xi - de^{-\kappa y_*} \sin(\xi - \kappa y_*) \\ d &= \frac{Ma_*}{(1+M)\rho_0(X, 0)} \quad \kappa = \left[ \frac{\omega_* (1+M)\rho_0(X, 0)}{2\mu_0(X, 0)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

**3. Течение в области свободного взаимодействия.** Область взаимодействия располагается в окрестности неровности и имеет обычную трехслойную структуру (фиг. 2). Анализ течения в этой области начнем с рассмотрения вязкого пристеночного слоя (область 4), примыкающего к поверхности неровности. Характерная толщина этого слоя (см. [3—6]) является величиной порядка  $LR^{-5/8}$  и совпадает с толщиной области  $\mathcal{Z}$ . Поэтому вид асимптотического разложения решения уравнений Навье — Стокса в области 4

$$\begin{aligned} u' &= U_\infty R^{-1/8} u_4 + \dots, \quad v' = U_\infty R^{-3/8} v_4 + \dots \\ p' &= p_\infty + p_\infty U_\infty^2 R^{-1/8} p_*(t_*) + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/8} p_4 + \dots \\ \rho' &= \rho_\infty \rho_0(1, 0) + \dots, \quad \mu' = \mu_\infty \mu_0(1, 0) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

может быть получен с помощью процедуры сращивания с решением (2.7), (2.10) для области 3. Роль независимых переменных в области 4 играют переменные  $t_*$ ,  $y_*$ , введенные ранее, и  $x_* = (x'/L)R^{3/4}$ .

Анализ уравнений Навье — Стокса с использованием разложений (3.1) показывает, что давление  $p_4$  не меняется поперек области 4, а уравнения импульсов и неразрывности отделяются от остальных уравнений гидродинамики и записываются в виде

$$\rho_0(1, 0) \left( \frac{\partial u_4}{\partial t_*} + u_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_*} + v_4 \frac{\partial u_4}{\partial y_*} \right) = - \frac{\partial p_4}{\partial x_*} + \mu_0(1, 0) \frac{\partial^2 u_4}{\partial y_*^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial x_*} + \frac{\partial v_4}{\partial y_*} = 0$$

Условие прилипания газа на обтекаемой поверхности (4.1) и условие сращивания с решением для области 3 имеют вид

$$y_* = g(x_*): \quad u_4 = v_4 = 0$$

$$x_* \rightarrow -\infty: \quad u_4 = \frac{\partial u_0}{\partial Y}(1, 0) y_* + d \sin \xi_0 - d e^{-\eta y_*} \sin(\xi_0 - \eta y_*) \quad (3.3)$$

$$\xi_0 = \omega \cdot [(1+M)t_* - Mx_0]$$

Здесь  $x_0$  — значение переменной  $x_1$  в точке расположения неровности.

Среднюю область трехслойной структуры областей, лежащих в окрестности неровности, обозначим цифрой 5 (фиг. 2). Эта область включает в себя основную часть струек тока, принадлежащих пограничному слою перед неровностью, и является продолжением в область взаимодействия области 2.

Асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса в области 5, удовлетворяющее условию сращивания с решением (2.4) для области 2, имеет вид

$$u' = U_\infty u_0(1, Y) + U_\infty R^{-1/4} \left[ A_*(t_*, x_*) \frac{\partial u_0}{\partial Y}(1, Y) + M a_* u_2(1, Y) \sin \xi_0 \right] + \dots$$

$$v' = U_\infty R^{-1/4} \left[ - \frac{\partial A_*}{\partial x_*} u_0(1, Y) \right] + \dots \quad (3.4)$$

$$p' = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/4} p_*(t_*) + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/4} p_5 + \dots$$

Функция  $p_5$  не меняется поперек рассматриваемой области и тождественно совпадает с функцией  $p_4$ . Функция  $A_*$  остается произвольной; известно только, что  $A_* \rightarrow 0$  при  $x_* \rightarrow -\infty$ .

Первое из соотношений (3.4) позволяет получить недостающее краевое условие для уравнения (3.2)

$$y_* \rightarrow +\infty: \quad u_4 = \frac{\partial u_0}{\partial Y}(1, 0) (y_* + A_*) + \frac{M a_*}{(1+M) \rho_0(1, 0)} \sin \xi_0 + \dots \quad (3.5)$$

Согласно второму из соотношений (3.4) и принципу сращивания асимптотических разложений, распределение вертикальной составляющей скорости на «дне» области 6 представляется как

$$v' = - U_\infty R^{-1/4} \frac{\partial A_*}{\partial x_*}$$

Эта функция стремится к нулю при возрастании числа Рейнольдса. Поэтому для области 6 (см. фиг. 2) применима линейная теория дозвуковых течений газа. Основное отличие от классической трактовки этой теории заключается в данном случае в том, что на внешней границе области 6 поток газа неоднороден. Внешние краевые условия для области 6 определяются из сращивания с решением (2.2), (2.3) в области 1.

В частности, асимптотика давления выражается в виде

$$p' = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/2} a_* \sin \xi_0 x_* - \rho_\infty U_\infty^2 R^{-1/2} M a_* \omega_* \cos \xi_0 x_* + \dots$$

Поэтому для распределения давления вдоль пограничного слоя в области взаимодействия получаем

$$p_i = -M a_* \omega_* \cos \xi_0 x_* - \frac{1}{\pi \sqrt{1-M^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_*/\partial s}{s-x_*} ds \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) замыкает задачу о свободном взаимодействии, которая представляет собой систему уравнений (3.2), (3.6) и краевых условий (3.3), (3.5) для области 4.

Произведем замену переменных

$$t_* = \lambda^{-3/2} \mu_0^{-1/2} \beta^{-1/2} t + M x_0 (1+M)^{-1}, \quad x_* = \lambda^{-3/2} \mu_0^{-1/2} \rho_0^{-1/2} \beta^{-1/2} x \quad (3.7)$$

$$g = \lambda^{-3/2} \mu_0^{1/4} \rho_0^{-1/2} \beta^{-1/4} f, \quad y_* = \lambda^{-3/2} \mu_0^{1/4} \rho_0^{-1/2} \beta^{-1/4} [y + f(x)]$$

$$u_i = \lambda^{1/4} \mu_0^{1/4} \rho_0^{-1/2} \beta^{-1/4} u, \quad v_i = \lambda^{3/4} \mu_0^{3/4} \rho_0^{-1/2} \beta^{1/4} \left( v + u \frac{df}{dx} \right)$$

$$p_i = -M a_* \omega_* \cos \xi_0 x_* + \lambda^{1/2} \mu_0^{1/2} \beta^{-1/2} p$$

$$A_* = \lambda^{-3/2} \mu_0^{1/4} \rho_0^{-1/2} \beta^{-1/4} [A - f(x)]$$

Здесь  $\beta = \sqrt{1-M^2}$ ; через  $\lambda$  обозначена производная  $\partial u_0 / \partial Y$ , вычисленная в точке (1,0);  $\rho_0, \mu_0$  — значения этих функций, взятые также в точке (1,0). Замена переменных (3.7) кроме аффинных преобразований включает в себя переход к ортогональной системе координат, ось  $x$  которой проведена по поверхности неровности. В результате этой замены задача о свободном взаимодействии принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = a \cos \omega t - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f / \partial s - \partial A / \partial s)}{s-x} ds$$

$$x = -\infty: u = y + \frac{a}{\omega} \left[ \sin \omega t - e^{-\sqrt{\omega/2} y} \sin \left( \omega t - \frac{\omega^{1/2}}{\sqrt{2}} y \right) \right] \quad (3.8)$$

$$y \rightarrow +\infty: u = y + A + \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \dots, \quad y = 0: u = v = 0$$

$$a = \frac{M a_* \omega_*}{\lambda^{1/4} \mu_0^{3/4} \rho_0^{1/2} \beta^{1/4}}, \quad \omega = \frac{\omega_* (1+M)}{\lambda^{3/2} \mu_0^{1/2} \beta^{1/2}}$$

Постоянные  $a, \omega$  являются параметрами подобия течений рассматриваемого класса.

**4. Решение задачи о свободном взаимодействии.** Решение задачи о свободном взаимодействии будем строить в предположении, что амплитуда звуковой волны  $a$  и высота неровности малы по сравнению с единицей. Положим в связи с этим  $f(x) = bF(x)$  и представим искомые функции в виде разложений по степеням  $a$  и  $b$ :

$$u = y + (a u_a + b u_b) + (a b u_c + b^2 u_d) + \dots, \quad v = b v_b + (a b v_c + b^2 v_d) + \dots \quad (4.1)$$

$$A = b A_b + (a b A_c + b^2 A_d) + \dots, \quad p = b p_b + (a b p_c + b^2 p_d) + \dots$$

Линейные члены этих разложений удовлетворяют принципу суперпозиции между нестационарным решением для звуковой волны, движущейся вдоль плоской поверхности

$$u_a = \frac{1}{\omega} \left[ \sin \omega t - e^{-\sqrt{\omega/2}y} \sin \left( \omega t - \frac{\omega^{1/2}}{\sqrt{2}} y \right) \right] \quad (4.2)$$

и решением стационарной задачи об обтекании неровности малой высоты

$$y \frac{\partial u_b}{\partial x} + v_b = -\frac{\partial p_b}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_b}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} = 0$$

$$p_b = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial F/\partial s - \partial A_b/\partial s)}{s-x} ds \quad (4.3)$$

$$x = -\infty: u_b = 0; \quad y = +\infty: u_b = A_b; \quad y = 0: u_b = v_b = 0$$

Ясно поэтому, что в процессе генерации волн Толлмина — Шлихтинга существенная роль принадлежит нелинейным эффектам. Для изучения этого процесса необходимо рассмотреть члены второго порядка в разложениях (4.1). Относительно функций с индексом  $d$  заметим, что они представляют собой нелинейную поправку к решению стационарной задачи об обтекании неровности. Эти функции, очевидно, также не имеют отношения к генерации волн Толлмина — Шлихтинга. Что касается функций с индексом  $c$ , то они определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} + y \frac{\partial u_c}{\partial x} + v_c = -\frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} - u_a \frac{\partial u_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial v_a}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial y} = 0, \quad p_c = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_c/\partial s}{s-x} ds \quad (4.4)$$

$$x = -\infty: u_c = 0; \quad y = +\infty: u_c = A_c; \quad y = 0: u_c = v_c = 0$$

Следуя работе [11], представим искомые функции  $u_c$ ,  $v_c$ ,  $A_c$ ,  $p_c$  как

$$u_c(t, x, y) = 2\text{Re} \{ e^{i\omega t} u_c'(x, y) \} \quad (4.5)$$

Применяя далее к амплитудам  $u_c'$ ,  $v_c'$ ,  $A_c'$ ,  $p_c'$  преобразование Фурье

$$u_c^*(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_c'(x, y) e^{-ikx} dx$$

и вводя новую независимую переменную  $z = (ik)^{1/2}y + z_0$ , где  $z_0 = (ik)^{1/2}\omega/k$ , преобразуем задачу (4.4) к

$$\frac{d^3 u_c^*}{dz^3} - z \frac{du_c^*}{dz} = F^*(k) g(k, \omega, z), \quad z = \infty: u_c^* = A_c^*$$

$$z = z_0: u_c^* = 0, \quad \frac{d^2 u_c^*}{dz^2} = (ik)^{1/2} p_c^*, \quad p_c^* = |k| A_c^* \quad (4.6)$$

Однородная часть уравнения для  $du_c^*/dz$  представляет собой уравнение Эйри. Через  $F^*(k)$  обозначен фурье-образ функции  $F(x)$ . Функция  $g(k, \omega, z)$ , входящая в правую часть рассматриваемого уравнения, универсальна в том смысле, что она не зависит от формы обтекаемой поверхности. Эта функция выражается через амплитуду  $u_a'$  звуковой волны (4.2), которая связана с  $u_a$  соотношением типа (4.5), и через фурье-образ решения (см. [12]) задачи (4.3).

Общее решение уравнения (4.6), ограниченное при  $z \rightarrow \infty$ , может быть записано в виде

$$\frac{du_c^*}{dz} = F^*(k) \varphi(k, \omega, z) + B(k, \omega) Ai(z)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - z\varphi = g, \quad \varphi(z_0) = \varphi(\infty) = 0$$
(4.7)

Здесь  $Ai(z)$  — функция Эйри. Значение постоянной  $B(k, \omega)$  находится из краевых условий системы (4.6). Эта процедура позволяет, в частности, определить функцию  $p_c^*$ :

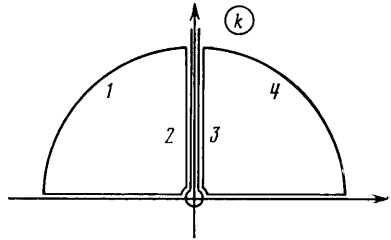
$$p_c^* = F^*(k) |k| \frac{I_\varphi A' i(z_0) - I \varphi'(z_0)}{A' i(z_0) - (ik)^{1/2} |k| I}$$
(4.8)

$$I_\varphi(k, \omega) = \int_{z_0}^{\infty} \varphi(k, \omega, z) dz, \quad I(k, \omega) = \int_{z_0}^{\infty} Ai(z) dz$$

Здесь  $Ai'(z_0)$ ,  $\varphi'(z_0)$  — производные по  $z$  от функций  $Ai$  и  $\varphi$ , вычисленные в точке  $z=z_0$ .

Распределение давления вдоль области свободного взаимодействия может быть теперь восстановлено с помощью обратного преобразования Фурье

$$p_c(t, x) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_c^*(k) e^{ikx} dk \right\}$$
(4.9)



Фиг. 3

В задаче о генерации волн Толлмина — Шлихтинга основной интерес представляет асимптотическое поведение этого интеграла вниз по потоку от неровности. Следуя работе [3], рассмотрим полную комплексную плоскость переменной  $k$  с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси (фиг. 3). Интегрирование в (4.9) производится по действительной оси. Разобьем интеграл на два: первый по отрицательной полуоси, а второй — по положительной. Изменим далее путь интегрирования. Первый интеграл будем вычислять по дуге окружности 1 и левому берегу разреза 2 (фиг. 3), второй интеграл — по лучу 3 и дуге 4. Тогда, согласно теореме о вычетах

$$p_c(t, x) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{6\pi i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^*(k_n) k_n [I \varphi'(z_0) - I_\varphi A i'(z_0)]}{(ik_n)^{1/2} [2I + z_0 A i(z_0) (1 - \omega/k_n^2)]} e^{i(\omega t + k_n x)} + e^{i\omega t} (I_2 + I_3) \right\}$$

Здесь  $I_1$ ,  $I_2$  — интегралы по берегам разреза. Суммирование производится по точкам  $k_n$  плоскости  $k$ , которые являются корнями дисперсионного соотношения линейной теории устойчивости [8]. В этих точках знаменатель выражения (4.8) для  $p_c^*$  обращается в нуль.

Расположение корней дисперсионного соотношения на плоскости  $k$  зависит от частоты колебаний  $\omega$ . Согласно работе [3], при  $\omega < \omega_0 = 2,298$  все корни лежат во втором квадранте этой плоскости. И только один из них перемещается по мере возрастания  $\omega$  из верхней полуплоскости в нижнюю. Его траектория пересекает действительную ось в точке  $k = k_0 = -1,0005$  при  $\omega = \omega_0$ . Этот корень как раз и описывает волну Толлмина — Шлихтинга.

Таким образом, при  $\omega < \omega_0$  все возмущения, индуцируемые в потоке взаимодействием звуковой волны с неровностью, затухают по мере уда-



ления от неровности, как этого и требует метод Фурье-преобразований. Однако скорость затухания стремится к нулю по мере приближения частоты  $\omega$  к частоте нейтральных колебаний  $\omega_0$ . В итоге за неровностью образуется волна Толлмина — Шлихтинга

$$p_c(t, x) = \operatorname{Re} \{ \kappa e^{i(\omega_0 t + k_0 x)} \}$$

$$\kappa = \kappa_0 F^*(k_0), \quad \kappa_0 = 0,3884 + i0,0277$$

Коэффициент пропорциональности  $\kappa_0$  в амплитуде этой волны определяется посредством численного решения уравнения (4.7).

Если, например, обтекаемая поверхность имеет точку излома и описывается в окрестности этой точки как

$$x < 0: F(x) = 0; \quad x > 0: F(x) = -\alpha x$$

тогда  $F^*(k_0) = \alpha / (k_0^2 \sqrt{2\pi})$ . Волна Толлмина — Шлихтинга имеет в этом случае амплитуду  $\kappa = \alpha(0,155 + i0,011)$ .

Автор глубоко признателен А. В. Зубцову за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary-layer oscillations and transition of a flat plate. NASA, Rept., 1948, № 909.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 152 с.
3. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое. — ПММ, 1981, т. 45, № 6, с. 1049—1055.
4. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений. — Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529, 124 с.
5. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. In: Adv. Appl. Mech., v. 14, New York: Acad. Press, 1974, p. 145—239.
6. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Усп. механики, 1979, т. 2, № 4, с. 57—95.
7. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1979, v. 366, № 1724, p. 91—109.
8. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1326—1329.
9. Михайлов В. В. Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 5, с. 39—46.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
11. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О колебаниях, возбуждаемых гармоническим осциллятором в течении Пуазейля. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 4, с. 837—841.
12. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, v. 23, № 2, p. 137—152.

Москва

Поступила в редакцию  
30.XI.1982