

УДК 532.517.3

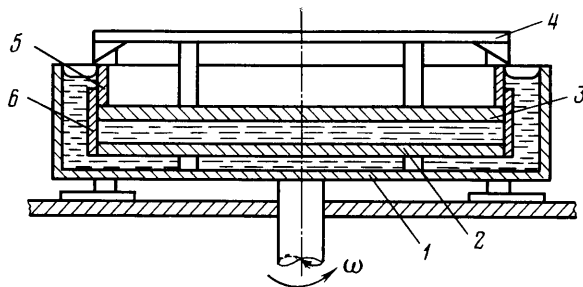
БИФУРАКЦИИ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДИСКАМИ

САНЬКОВ П. И., СМИРНОВ Е. М.

Поток в зазоре между вращающимся и неподвижным параллельными дисками является привлекательным объектом для изучения особенностей перехода во внутренних пространственных течениях. Во-первых, в данном случае большая область основного движения удовлетворительно описывается автомодельным решением уравнений Навье — Стокса [1]; во-вторых, с изменением параметра $\gamma = \omega h^2/\nu$ (ω — угловая скорость вращения одного из дисков, h — ширина зазора) происходит эволюция основного движения, благодаря чему на одной экспериментальной установке легко реализуются различные виды первичных и последующих неустойчивостей. Основной стационарный режим осесимметричного течения изучался многими авторами (см. [1, 2]). Вопросы перехода в зазоре между дисками частично затрагивались в [3, 4].

В данной работе излагаются методика и результаты экспериментального исследования различных типов первичной и последующих неустойчивостей в зазоре между дисками, закрытом цилиндрическим кожухом. Обнаружено, что в результате потери устойчивости основного режима в зависимости от значения относительной ширины зазора развивается одна из двух стационарных систем вихрей. Охарактеризованы последующие стадии «мягкого» возбуждения турбулентного режима и установлены соответствующие границы. Показано, что в очень узких зазорах возбуждение турбулентности носит «жесткий» характер по типу реализуемого в течениях Куэтта. Для относительно широких зазоров определены предел устойчивости ламинаризованного пристенного слоя на вращающемся диске и граница полной турбулизации слоя. Проведено сопоставление с известными данными для открытого вращающегося диска.

1. Установка для визуальных наблюдений представляла собой вращающуюся вокруг вертикальной оси круглую ванну 1, на днище которой закреплялся один из дисков 2 (фиг. 1). Второй (неподвижный) диск 3 монтировался на крестообразной



Фиг. 1

раме 4 на заданном расстоянии h от вращающегося. Оба диска диаметром 600 мм были изготовлены из плексигласа толщиной 12 мм, отклонение поверхности каждого из них от плоскости не превышало 0,1 мм. Погрешность установки зазора и непараллельность оцениваются в 0,15 мм. Ванна заполнялась рабочей жидкостью, температура которой контролировалась термометром с ценой деления 0,1 С. Через верхний диск проводились наблюдения и фоторегистрация картины течения в зазоре. На бортик 5 со скользящей посадкой насаживался неподвижный цилиндрический обод — кожух 6. Высота зазора h варьировалась в диапазоне 2–19 мм, угловая

скорость вращения ω изменялась плавно от 0 до 4 рад/с. В качестве рабочей жидкости при визуализации алюминиевыми чешуйками использовался авиационный керосин, при работе с краской — водопроводная вода.

Термоанемометрические исследования проводились на воздушной установке с алюминиевыми полированными дисками диаметром 204 и толщиной 14 мм. Отклонение поверхности дисков от плоскости не превышало 0,01 мм, погрешность ширины зазора и непараллельность дисков не более 0,05 мм. По внешнему радиусу зазор закрывался хорошо пригнанным цилиндрическим кожухом. Высота зазора и угловая скорость вращения изменялись соответственно в диапазонах 0,2–6 мм и 20–800 рад/с. Вводимая в зазор нить датчика термоанемометра имела длину 4 мм и диаметр 7 мкм. Державки нити диаметром 0,7 мм проходили через эбонитовую пробку, которая после наваривания нити заподлицо вставлялась в одно из посадочных отверстий, просверленных в теле неподвижного диска на радиусах $r_p=74$ и 93 мм. Для получения сигнала использовался термоанемометр постоянной температуры, для регистрации — обычные или запоминающие осциллографы.

2. Суммируем результаты известных исследований основного стационарного режима течения, наиболее существенные в плане настоящей работы.

Поместим начало цилиндрической системы координат r, θ, z (u, v, w — составляющие скорости) в точку пересечения оси симметрии с поверхностью вращающегося диска. Введем величины $\xi=z/h$ и $\delta=h/R$, где R — радиус дисков.

Характерные черты эволюции основного течения, происходящей с ростом параметра $\gamma=\omega h^2/\nu$, описываются автомодельным решением уравнений Навье — Стокса, которое находится в предположении $R \rightarrow \infty$. Для малых γ во многих работах решение ищется в виде разложения по степеням этого параметра

$$u = -\omega r \gamma [f_0'(\xi) + \gamma^2 f_2'(\xi) + \dots]$$

$$v = \omega r [(1-\xi) + \gamma^2 g_2(\xi) + \dots]$$

$$w = 2(\omega \nu)^{1/2} \gamma^{1/2} [f_0(\xi) + \gamma^2 f_2(\xi) + \dots]$$

При $\gamma \rightarrow 0$ движение в зазоре является течением Куэтта. С ростом γ развивается вторичное течение, направленное наружу у вращающегося диска и внутрь — у неподвижного. Для дальнейшего важно отметить, что при $\gamma \leq 10$ профиль v слабо отличается от линейного, а профили u при разных γ почти аффинно подобны.

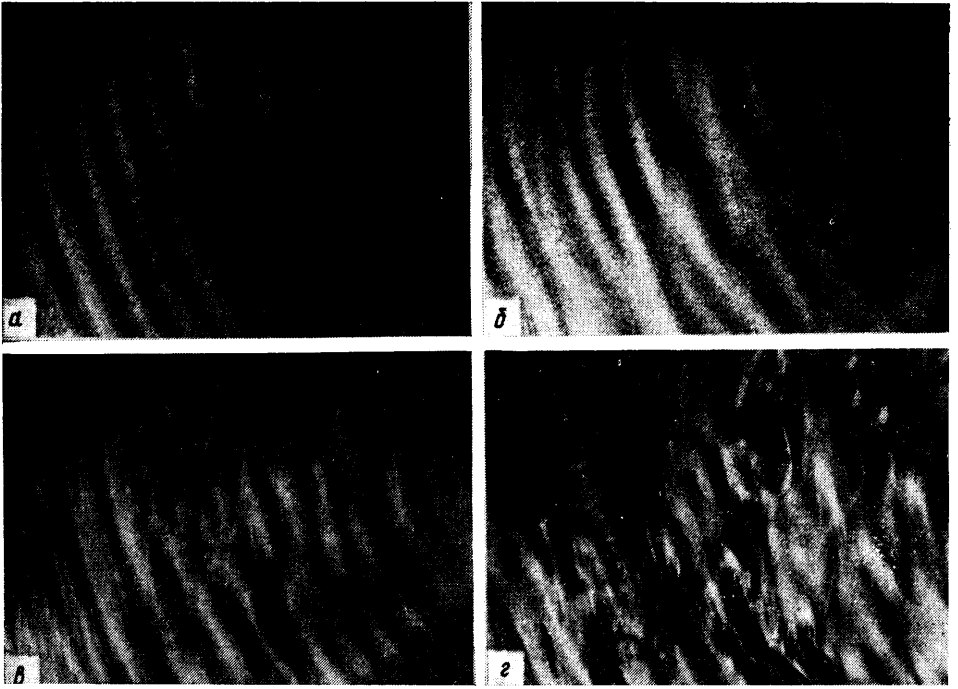
Автомодельное решение для умеренных и больших значений γ найдено численными методами [5–7]. Обнаружено, что при $\gamma_* = O(10^2)$ (точное значение γ_* пока не установлено) решение неединственно. Однако для системы дисков, закрытых цилиндрическим кожухом, эксперименты [2] указывают на устойчивую реализацию лишь поля скорости, соответствующую непрерывному продолжению решения для малых и умеренных γ [5, 6] в область больших значений этого параметра.

При $\gamma \gg 1$ поток разделяется на два тонких сдвиговых слоя, прилегающих к поверхности дисков, и ядро, которое вращается как твердое тело с угловой скоростью $0,313\omega$ [8].

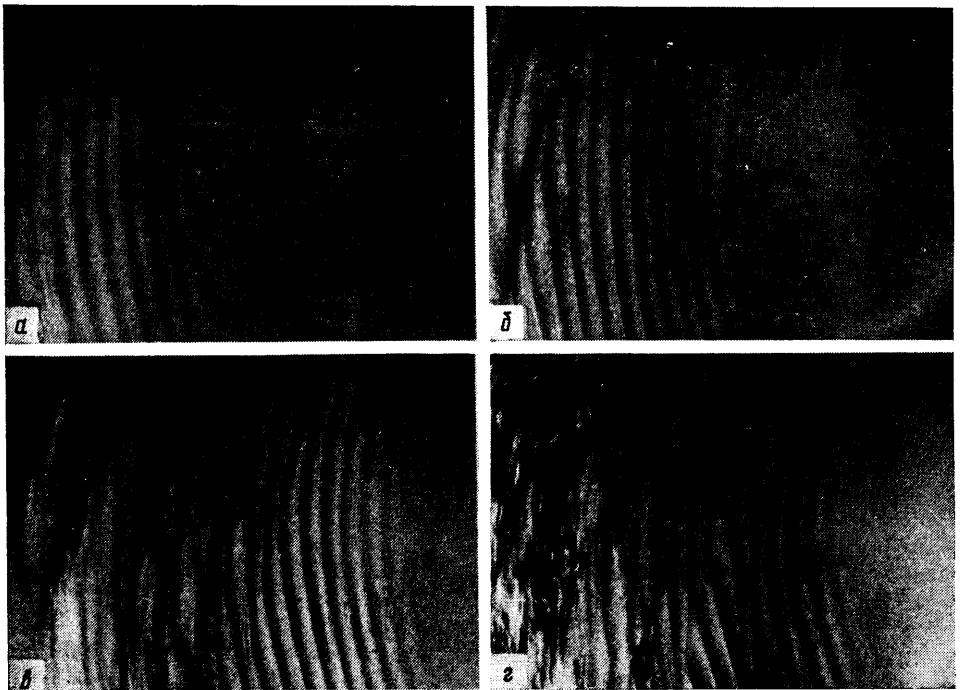
В неавтомодельной постановке основное течение в относительно узком зазоре ($\delta=0,07$) исследовалось численным методом в [1]. Установлено, в частности, что в центральной области решение уравнений в частных производных близко к автомодельному.

3. Перейдем к описанию последовательной смены режимов течения, основанному на результатах визуальных наблюдений. На фиг. 2–4 приведены фотографии картин течения в зазорах с относительной шириной $\delta=0,0267; 0,04; 0,0167$.

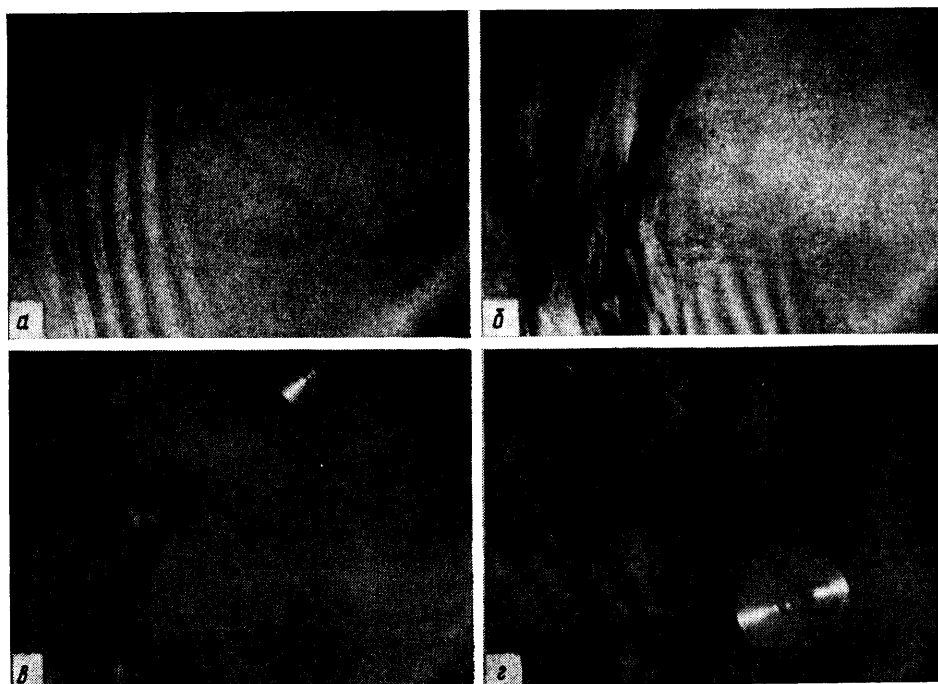
Для $\delta=0,0267$ при некотором значении $\omega=\omega_*$ развивается регулярная стационарная система вихрей, ориентированных по спирали, которые закручиваются к центру при обходе по направлению вращения (фиг. 2, а, $\gamma=63,2$), причем вид ее по завершении переходных процессов не зависит от условий разгона и восстанавливается после затухания сколь



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

угодно сильных возмущений, вносимых в поток (через открывающуюся щель между обручем и вращающимся диском). В области, прилегающей к ободу, вихри менее выражены, что, по-видимому, связано с краевыми эффектами. Этот вид нормальной закрытической бифуркации основного режима течения, в результате которой устанавливается новый стационарный ламинарный режим, описан ранее в [4], где также использована техника визуализации алюминиевыми чешуйками.

Волнистость стационарных шлейфов краски, выпущенной у поверхности неподвижного диска, которая наблюдалась в экспериментах [3] и в ходе данного исследования, является, очевидно, следствием развития системы вихрей этого типа, которые в дальнейшем будем называть вихрями (волнами) типа *B*. При обработке многочисленных фотоснимков установлено, что угол между направлением локальной ориентации вихря и касательной к окружности для всех δ , при которых реализуется система вихрей *B*, примерно постоянен и составляет $13-15^\circ$. Это находится в полном согласии со значением 14° , указанным в [4]. С ростом ω вихри заполняют все большее пространство, сокращая центральную область основного течения. Вместе с тем на периферии происходит разветвление вихрей, и далее в отдельных местах вихри начинают совершать слабые колебательные перемещения (фиг. 2, б, $\gamma=83,4$). Картина течения становится сложной, однако сохраняет регулярную структуру.

Начиная с некоторого отчетливо регистрируемого значения $\omega=\omega_3$ наблюдаются спорадические образования в периферийной области первоначально единичных изолированных сильных возмущений, которые перемещаются по спиралевидной траектории к центру, проходят всю систему вихрей *B* и очень быстро диссипируют в области основного течения (фиг. 2, в, $\gamma=88,9$). Отчетливо выраженное ядро возмущений движется, имея значительную компоненту завихренности, параллельную оси вращения, в то время как для предшествующих режимов эта компонента мала. Условимся поэтому называть рассматриваемые возмущения «роликами».

С дальнейшим ростом угловой скорости общее число этих изолированных возмущений увеличивается, при этом проявляется тенденция к объединению роликов в группы (фиг. 2, z , $\gamma=122$). Наконец, все поле течения заполняется турбулентными пульсациями, на фоне которых тем не менее отчетливо прослеживается вполне регулярная крупномасштабная структура.

Иные, ранее не описанные типы неустойчивостей обнаружены в более узких зазорах (фиг. 3). Здесь с некоторого значения $\omega=\omega_0^\circ$ также образуется регулярная стационарная система вихрей, однако теперь они ориентированы по концентрическим окружностям (фиг. 3, a , $\gamma=12,7$). Эта система вихрей (назовем их вихрями (волнами) типа A), начинаясь при $r=r_1$, заполняет почти всю область $r_1 < r < R$, за исключением весьма узкого кольца у закрывающего обода. Нечувствительность к условиям разгона и восстановление после внесения возмущений имеют место и в этом случае, поэтому развитие системы вихрей данного типа также следует отнести к нормальной бифуркации.

При $\omega=\omega_2^\circ > \omega_1^\circ$ начинается образование единичных уединенных волн (фиг. 3, b , $\gamma=13,6$). Фронты этих солитонов представляют собой спираль, раскручивающуюся при обходе по направлению вращения, и перемещаются в этом направлении со скоростью, существенно меньшей, чем местная линейная скорость поверхности вращающегося диска. Отдельные волны пересекают всю систему вихрей A , исчезая лишь в области устойчивого основного течения. С дальнейшим ростом угловой скорости число солитонов возрастает, и некоторые из них при $\omega > \omega_3^\circ$ превращаются в узкие «косы» с явно турбулентным характером движения (фиг. 3, z , $\gamma=14,6$). Постепенно число турбулизованных кос возрастает, ширина их увеличивается (фиг. 3, z , $\gamma=16,1$), затем косы начинают сливаться друг с другом, и течение в зазоре полностью турбулизуется.

Особое многообразие режимов течения наблюдается в зазорах, для которых значение $\delta \approx 0,017$ (фиг. 4). Здесь образующаяся система вихрей A не простирается до кромки дисков, а занимает внутреннюю кольцевую область (фиг. 4, a , $\gamma=20,0$). Количество вихрей, входящих в эту область, достигает 7–8, а с дальнейшим ростом ω убывает, при этом интенсивность движения в вихрях ослабевает. Затем развиваются солитоны, преобразующиеся в косы, внутри которых пульсационное движение не столь развито, как в предыдущем случае. Остатки системы вихрей A наблюдаются лишь в отдельных секторах области течения (фиг. 4, b , $\gamma=30,5$).

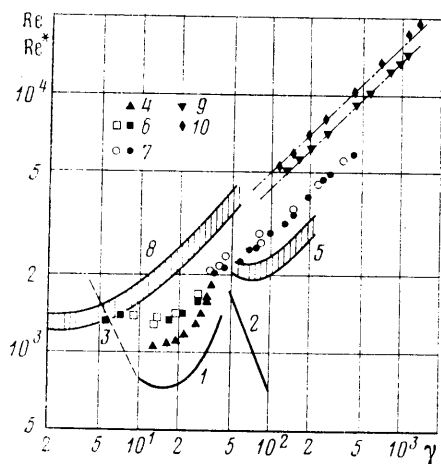
Далее некоторое увеличение угловой скорости вращения приводит к полному исчезновению вихрей и неразвившейся системы кос. Одновременно с этим, однако, начинается спорадическое образование на периферии изолированных роликов, перемещающихся к центру по спиралевидной траектории. При определенном значении угловой скорости в потоке наблюдаются только ролики (фиг. 4, z , $\gamma=43,6$). С дальнейшим ростом ω формируется система вихрей B , число изолированных возмущений продолжает увеличиваться (фиг. 4, z , $\gamma=50,0$). Последующие стадии в общих чертах совпадают с ранее описанными для случая $\delta=0,0267$.

Только после проведения визуальных наблюдений удалось расшифровать осциллограммы сигнала датчика термоанемометра, полученные на другой установке. При креплении датчика на неподвижном диске исключена возможность регистрации стационарной системы вихрей. Однако последующие смены режимов, сопровождающиеся развитием нестационарных процессов, наблюдались отчетливо.

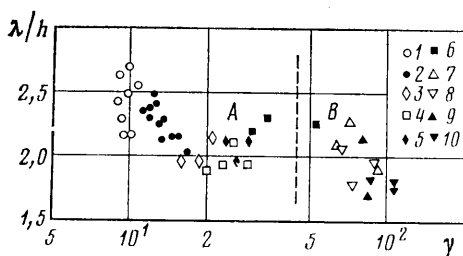
Прохождение турбулизованных кос мимо датчика приводит к появлению пакета высокочастотных колебаний большой амплитуды. Предвестником образования кос выступают низкочастотные интенсивные колебания, возникающие как реакция на солитоны. В свою очередь наличие в более широких зазорах роликов сопровождается прохождением редких острых пиков, амплитуда которых в несколько раз превышает фон различ-

ного происхождения. Предшествуют им при $\omega > \omega_2$ менее острые и интенсивные всплески, которые, по-видимому, образуются с появлением колебаний системы вихрей B в отдельных областях потока. Амплитуда указанных всплесков незначительно превышает уровень шума, и соответствующая граница по ω получалась размытой.

4. Результаты визуальных наблюдений и анализа осциллограмм были использованы для построения пределов устойчивости различных режимов течения в зазоре (фиг. 5). По оси ординат диаграммы устойчивости откладываются либо локальное значение числа Рейнольдса $Re^* = \omega r_1 h / \nu$, вы-



Фиг. 5



Фиг. 6

численное по местной скорости, либо значение $Re = \omega R h / \nu$, определяемое по линейной скорости кромки вращающегося диска.

При достаточном удалении внутренней границы r_1 системы вихрей A или B от кромок дисков комплекс γ является единственным параметром, определяющим структуру основного течения в зоне потери им устойчивости. Следовательно, и критические значения $Re_A^* = \omega_1 r_1 h / \nu$, $Re_B^* = \omega_1 r_1 h / \nu$ зависят лишь от этого параметра. Действительно, оказалось, что опытные данные, полученные путем обработки фотоснимков для разных δ , хорошо группируются в единые зависимости при условии $r_1/R \leq 0,75$. Аппроксимирующие эти данные кривые 1, 2 на фиг. 5 изображают пределы устойчивости основного режима к стоячим волнам в виде вихрей типа A и B соответственно. Поскольку, с одной стороны, в проведении аппроксимирующих кривых заключается некоторый произвол, а с другой — в принятом обобщении полностью утрачивается информация о степени влияния краевых эффектов, авторы сочли целесообразным представить в таблице полные данные к найденным значениям $Re_{A, B}^*$. Как раз вследствие неполноты информации результаты [3, 4] не могут быть использованы для сопоставления с представленными в таблице данными. Полученные результаты показывают, что при $\gamma \leq 45$ основное течение наименее устойчиво к стоячим волнам типа A , а при $\gamma \geq 45$ — к волнам типа B . При $\gamma \approx 15$ значение Re_A^* минимально.

Ограниченные возможности установки не позволили получить экспериментальных данных для значений Re_A^* при $\gamma < 10$. Характер зависимости $Re_A^*(\gamma)$ в этой области можно, однако, предсказать, исходя из следующего. Вихри типа A развиваются вследствие неустойчивости S -образных (нечетных) профилей радиальной компоненты скорости. Основной эффект сдвига окружной составляющей скорости заключается в создании неоднородности поля центробежных сил, вследствие которой и возникает вторичное радиальное движение. Отметим, что аналогичная картина наблюдается при

потере устойчивости стационарного конвективного движения в плоском вертикальном слое между параллельными изотермическими поверхностями, нагретыми до разных температур [9]. Если ввести число Рейнольдса $\alpha = u_s h / \nu$, построенное по характерной скорости именно радиального движения, то его критическое значение $\alpha_*(\gamma)$ постоянно в том диапазоне изменения γ , где профили $u(\xi)$ аффинно подобны. В области $\gamma = O(1)$ можно приближенно положить, что $u_s \sim \omega r_1 \gamma$, и тогда

$$\omega_1 \circ r_1 \frac{\gamma h}{\nu} \approx \text{const}, \quad \text{Re}_A^* = \frac{\text{const}}{\gamma} \quad (4.1)$$

Поскольку профили $u(\xi)$ аффинно подобны практически до $\gamma \approx 10$, то есть основания полагать, что продолжение кривой 1 на фиг. 5 будет опи-

$\delta \cdot 10^2$	0,67						1,0							
$\text{Re}_A^* \cdot 10^{-1}$	9,02 81	9,49 78	9,78 78	10,6 79	11,3 81	11,6 79	12,4 76	12,7 76	13,6 75	13,8 73	14,6 73	16,4 71	18,1 75	20,7 79
$\delta \cdot 10^2$	1,33						1,67							
$\text{Re}_A^* \cdot 10^{-1}$	18,2 79	19,2 79	20,7 80	23,2 81	20,0 80	23,0 81	28,1 88	30,5 92	31,1 93	33,4 93	35,5 106	37,3 116	40,4 135	
$\delta \cdot 10^2$	1,67	1,83						2,0			2,67			
$\text{Re}_{A,B}^* \cdot 10^{-1}$ Тип	50,0 190 B	24,1 83 A	26,0 85 A	28,9 89 A	43,1 167 B	48,5 176 B	52,0 170 B	44,7 167 B	48,4 157 B	53,4 154 B	55,8 140 B	63,2 134 B	83,4 99 B	88,5 94 B
$\delta \cdot 10^2$	3,33				4,0				5,0			5,67		
$\text{Re}_B^* \cdot 10^{-1}$	65,2 117	75,2 109	85,0 87	93,0 75	80,6 105	86,4 101	90,6 94	94,8 80	101 67	85,1 83	99,6 67	108 58	86,3 91	97,3 68

сываться зависимостью (4.1), где значение постоянной приближенно определено из экспериментальных данных при $\gamma \approx 10$ (пунктирная прямая 3).

На фиг. 6 приведены отнесенные к h значения длины волны λ для систем вихрей типа A (1-6) и B (6-10). В обоих случаях значение λ определялось по направлению нормали к местной ориентации вихрей. Экспериментальные точки 1-10 получены при обработке фотоснимков течения соответственно в зазорах с $\delta \cdot 10^2 = 0,667; 1,0; 1,33; 1,67; 1,83; 2,0; 2,67; 3,33; 4,0; 5,0$.

Отличительной особенностью процесса смены режимов течения в зазоре является заметное, если не определяющее, действие конвективного переноса возмущений в устойчивую область. Поскольку возникающие на периферии нестационарные возмущения пронизывают всю систему вихрей, представляется неправомерным определять пределы устойчивости стационарного течения с вихрями A или B, отвлекаясь от краевых эффектов. В данном случае границы устойчивости следует устанавливать, используя в качестве критерия величину Re.

Экспериментальные точки 4 и заштрихованная область 5 на фиг. 5 показывают границу $\text{Re} = \text{Re}_2(\gamma)$, с которой начинается развитие низкочастотных возмущений, являющихся предвестником образования соответ-

венно кос и роликов. Различие результатов, полученное при $r_p=74$ и 93 мм, укладывается в разброс значений Re_2 . Для всех δ нить датчика находилась примерно в середине зазора. Заметим, что для $\delta \approx 0,02$ точки 4 располагаются почти параллельно линии $\omega = \text{const}$. Для близких к этому значений δ определение рассматриваемой границы проводилось при поддержании $\omega = \text{const}$ и плавном изменении δ .

Далее по значениям $\omega = \omega_3^*$, $\omega = \omega_3$, соответствующим появлению в потоке единичных кос и роликов, определялись значения $Re = Re_3(\gamma)$, которые показаны на фиг. 5 точками 6 (косы) и 7 (ролики). Данные, полученные методом термоанемометра, помечены сплошными значками.

Для зазоров с $\delta < 0,012$ при анализе осциллограмм определены значения $Re = Re_4(\gamma)$ (заштрихованная область 8 на фиг. 5), соответствующие завершению процесса турбулизации течения. Датчик располагался в середине зазора, $r_p = 74$ мм. Видно, что при $\gamma \approx 6$ границы образования единичных кос и полной турбулизации сливаются. Интересно, что гипотетическая зависимость δ для предела устойчивости основного режима по отношению к волнам типа А пересекает область 8 в том же месте. Таким образом, имеет место изменение характера возбуждения турбулентности в зазоре от «жесткого» при $\gamma \leq 6$ к «мягкому» при $\gamma \geq 6$. Диапазон $Re_4 = 1200 - 1400$, полученный для $\gamma = O(1)$, хорошо согласуется со значением $Re_4 = 1500$, установленным в [10] для течения Куэтта.

5. Для относительно широких зазоров не существует единой границы, соответствующей завершению перехода к турбулентному режиму по всей ширине зазора. В выделяющихся при $\gamma = O(10^2)$ ядре и пристенных слоях процессы возбуждения турбулентности различны. В ядре, где сдвиг скорости незначителен, следует ожидать даже заметного действия стабилизирующих эффектов вращения. В слое на вращающемся диске радиальное течение сносит возмущения из устойчивой области на периферию, в то время как в слое у неподвижного диска ситуация обратная. Интерференция этих процессов обуславливает чрезвычайно сложную картину перехода.

Попытки определения верхней границы процесса турбулизации потока в слое у неподвижного диска и в ядре не увенчались успехом. Интересные результаты, однако, были получены для $\delta > 0,02$ при анализе осциллограмм с датчика, расположенного в непосредственной близости (на расстоянии $0,1 - 0,2$ мм, $r_p = 74$ мм) у поверхности вращающегося диска. При $\omega > \omega_5$ осциллограммы указывают на развитие быстро нарастающего с увеличением ω синусоидального сигнала высокой частоты ($2 - 3$ кГц), накладывающегося на сравнительно низкочастотные, существовавшие и при $\omega < \omega_5$ пульсации.

Специальные методические эксперименты, выполненные с открытым диском, результаты которых хорошо согласуются с данными [11-12], не оставили сомнения в том, что причина появления этой регулярной составляющей сигнала заключается в развитии вращающейся вместе с диском системы вихрей. В некотором интервале ω синусоидальный сигнал сохраняет почти неизменную амплитуду, а при дальнейшем увеличении угловой скорости вращения начинается его разрушение: возникают участки с еще более высокочастотными, но уже хаотическими пульсациями.

При $\omega > \omega_6$ регулярной составляющей в осциллограммах не наблюдается, что было принято в качестве признака завершения турбулизации слоя у вращающегося диска. Измеренные значения $Re_5^* = \omega_5 r_p h / \nu$ и $Re_6^* = \omega_6 r_p h / \nu$ отмечены на фиг. 5 точками 9, 10. Эти точки с хорошей степенью приближения располагаются вдоль прямых, соответствующих зависимостям $Re^* = \text{const} \gamma^{1/2}$ (штрихпунктирные линии). Таким образом, величины

$$Re_5^{**} = \frac{\omega_5 r_p^2}{\nu} = \frac{(Re_5^*)^2}{\gamma}, \quad Re_6^{**} = \frac{\omega_6 r_p^2}{\nu} = \frac{(Re_6^*)^2}{\gamma}$$

примерно постоянны для разных δ . При обработке методом наименьших квадратов получено $Re_5^{**}=1,85 \cdot 10^5$, $Re_6^{**}=2,7 \cdot 10^5$.

Последние исследования [11, 12] перехода на вращающемся открытом диске определяют значения $Re_5^{**}=(8,64-8,82) \cdot 10^4$, $Re_6^{**}=3,2 \cdot 10^5$. При сопоставлении следует, однако, иметь в виду, что эффективная величина сдвига скорости в слое на вращающемся закрытом диске за счет вращения ядра потока примерно на 30% меньше, чем на открытом диске при том же значении ω . Учет этого обстоятельства заметно сближает эффективные значения Re_5^{**} , полученные для открытого и закрытого дисков. Вместе с тем эффективное значение Re_6^{**} для закрытого диска оказывается существенно меньше, чем для открытого. Отчасти это представляется закономерным, так как проникающие через ядро возмущения из слоя на неподвижном диске облегчают достижение интенсивности пульсаций, необходимой для полной турбулизации. Для получения окончательного вывода следует проследить эволюцию спектра пульсаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dijkstra D., van Heijst G. J. F.* The flow between two finite rotating disks enclosed a cylinder.— *J. Fluid Mech.*, 1983, v. 128, p. 123–154.
2. *Гринспен X.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
3. *Conover R. A.* Laminar flow between a rotating disk and a parallel stationary wall with and without radial inflow.— *Trans. ASME, Ser. D*, 1968, v. 90, № 3, p. 325–332.
4. *Wimmer M.* Die zähe Strömung im Spalt zwischen einer rotierenden Scheibe und einem ruhenden Gehäuse.— *Z. angew. Math. und Mech.*, 1978, B. 58, № 7, S. 350–353.
5. *Lance G. N., Rogers M. H.* The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks.— *Proc. Roy. Soc., London, Ser. A*, 1962, v. 266, № 1324, p. 109–121.
6. *Greenspan D.* Numerical studies of flow between rotating coaxial disks.— *J. Inst. Maths. Applies*, 1972, v. 9, № 3, p. 370–377.
7. *Holodniok M., Kubiček M., Hlavaček V.* Computation of the flow between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions.— *J. Fluid Mech.*, 1981, v. 108, p. 227–240.
8. *Reshotko E., Rosenthal R. L.* Laminar flow between two infinite disks, one rotating and the other stationary.— *Israel J. Technology*, 1971, v. 9, № 1–2, p. 93–103.
9. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
10. *Reichardt H.* Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung.— *ZAMM*, 1956, B. 36, S. 26–29.
11. *Kobayashi R., Kohama Y., Takamada Ch.* Spiral vortices in boundary layer transition regime on a rotating disk.— *Acta Mech.*, 1980, v. 35, p. 71–82.
12. *Malik M. R., Wilkinson S. P., Orszag S. A.* Instability and transition in rotating disk flow. *AIAA Journal*, 1981, v. 19, № 9, p. 1131–1138. (Рус. перев.: *Малик М. Р., Уилкинсон С. П., Оршаг С. А.* Неустойчивость и переход течения на вращающемся диске. *Ракетная техника и космонавтика*, 1981, т. 19, № 10, с. 34–44).

Ленинград

Поступила в редакцию
9.XI.1983