

УДК 532.516

**О ЖЕСТКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ТЕЧЕНИИ
ГАГЕНА — ПУАЗЕЙЛЯ**

НИКИТИН Н. В.

Достаточно сильная возмущенность потока при движении жидкости в круглых трубах ведет к возникновению турбулентности, начиная с чисел Рейнольдса порядка 2200–2300 [1]. Теоретически установлено [2, 3], что течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Гагена — Пуазейля) устойчиво к бесконечно малым возмущениям при всех числах Рейнольдса. Попытки получить конечно-амплитудную неустойчивость течения, учитывая лишь двумерные возмущения [4, 5], также не привели к успеху.

В данной работе обнаружена неустойчивость рассматриваемого течения к трехмерным возмущениям конечной амплитуды.

Исследование проводится в рамках нестационарных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{V}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}(r, \theta, z, t)$, $p(r, \theta, z, t)$ — вектор скорости и кинематическое давление соответственно, r, θ, z — цилиндрические координаты, t — время, $R = W_m r_0 \nu^{-1}$ — число Рейнольдса (W_m — максимальная скорость в ламинарном движении, r_0 — радиус трубы, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости).

Кроме обычных условий прилипания на стенках предполагается периодичность по z возмущений скорости и давления.

В соответствии с процедурой метода Галеркина решение системы (1) ищется в виде линейной комбинации векторных функций $\Psi_{mnk}(r, \theta, z)$, образующих базис в пространстве соленоидальных векторных полей и удовлетворяющих граничным условиям задачи

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = (1-r^2)\mathbf{k}_z + \sum_{m,n,k} a_{mnk}(t)\Psi_{mnk}(r, \theta, z) \quad (2)$$

Здесь \mathbf{k}_z — единичный вектор в направлении z .

В качестве базиса $\{\Psi_{mnk}\}$ берутся периодические по переменным θ, z собственные функции линеаризованного оператора Навье — Стокса [6], описывающие формы свободных движений малой амплитуды в покоящейся жидкости [7]

$$\Delta \Psi_{mnk} - \nabla p_{mnk} + \mu_{mnk} \Psi_{mnk} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \Psi_{mnk} = 0$$

$$|\Psi_{mnk}(1, \theta, z)| = 0, \quad |\Psi_{mnk}(0, \theta, z)| < \infty \quad (4)$$

$$\Psi_{mnk}(r, \theta, z) = \Psi_m(r, n, k) \exp[i(k\alpha z + n\theta)] \quad (5)$$

В (3), (5) μ_{mnk} — собственные значения, α — волновое число, n — азимутальное число. Метод нахождения и свойства решений задачи (3)–(5) подробно описаны в [2].

Система уравнений для коэффициентов разложения (2) получается после проведения галеркинской процедуры

$$\frac{da_{mnk}}{dt} + \frac{1}{R} \mu_{mnk} a_{mnk} = -\langle (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}, \Psi_{mnk} \rangle \quad (6)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \mathbf{f} \mathbf{g}^* r dr$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение. После задания определенных начальных значений система (6) может быть решена одним из методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При численной реализации описанной выше методики использовалось в соответствии (2), (5) выражение для вектора скорости

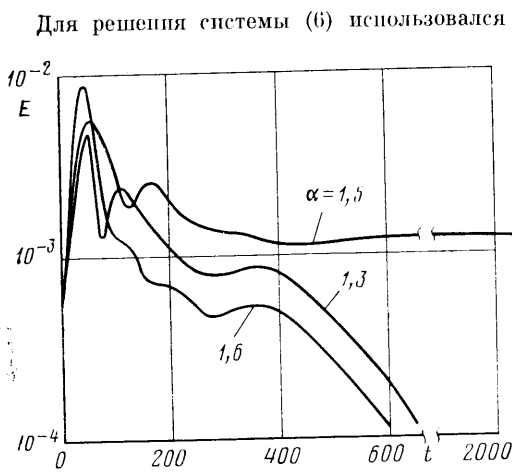
$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = (1-r^2)\mathbf{k}_z + \sum_{|k|+|n|\leq 2} \mathbf{V}_{nk}(r, t) \exp[i(k\alpha z + n\theta)] \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_{nk}(r, t) = \sum_{m=1}^M a_{mnk}(t) \Phi_m(r, n, k) \quad (8)$$

Расчеты проводились с начальными данными качественно моделирующими условия эксперимента [8]

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, 0) = (1-r^2)\mathbf{k}_z + 2\text{Re}\{\mathbf{V}_{11}^\circ(r) \exp[i(\alpha z + \theta)] + \mathbf{V}_{-11}^\circ(r) \exp[i(\alpha z - \theta)]\}$$

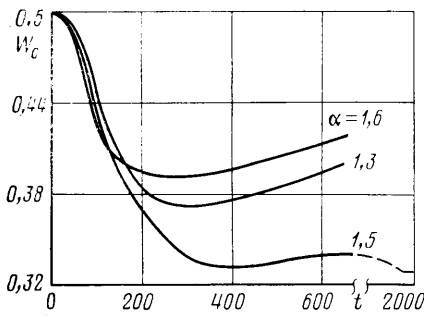
$$\mathbf{V}_{11}^\circ(r) = 0,02 \Phi_1(r, 1, 1), \quad \mathbf{V}_{-11}^\circ(r) = 0,015 \Phi_1(r, -1, 1)$$



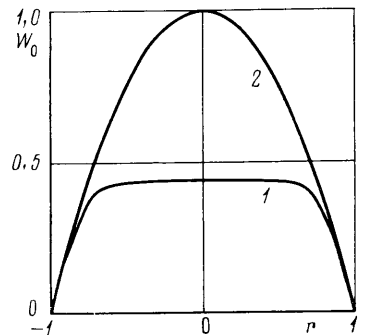
Фиг. 1

В результате проведенных исследований было получено два типа эволюции течения: а) полное затухание возмущений при $\alpha \leq 1,3$ и при $\alpha \geq 1,6$; б) переход к автоколебательному движению при $\alpha = 1,45$ и $1,5$.

На фиг. 1, 2 изображены зависимости от времени средней по пространству кинетической энергии пульсаций



Фиг. 2



Фиг. 3

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{0 < |k|+|n|\leq 2} |a_{mnk}(t)|^2$$

(фиг. 1) и средней расходной скорости W_c (фиг. 2), полученных в расчетах при $\alpha = 1,3; 1,5$ и $1,6$. Поведение течения на начальном этапе развития ($0 \leq t \leq 300$) ка-

ественно одинаково при всех значениях α : после непродолжительного периода роста возмущений на фоне почти неискаженного профиля осредненной скорости $W_0 = 1 - r^2 + V_{00}K$, наступает более длительная стадия снижения интенсивности возмущений и торможения потока. При этом профиль скорости наполняется, приобретая типично «турбулентный» вид. Дальнейшее развитие при $\alpha \leq 1,3$ и $\alpha \geq 1,6$ ведет к быстрому затуханию возмущений и постепенному возвращению профиля скорости W_0 к исходному параболическому виду.

При $\alpha = 1,45$ и $1,5$ затухания не происходит, а средние характеристики устанавливаются при $t \approx 2000$. Расчеты продолжались до $t = 5000$. Возникающее при этом автоколебательное движение характеризуется резким по сравнению с ламинарным режимом падением расхода жидкости. Число Рейнольдса, вычисленное по устанавливающейся в пределе средней скорости $R_c = 2W_{cr0}/v$, близко к экспериментальной границе устойчивости (при $\alpha = 1,5$ $R_c \approx 2630$). Профиль скорости в предельном режиме ($\alpha = 1,5$) изображен на фиг. 3 кривой 1, кривая 2 — начальный параболический профиль.

Подчеркнем, что учет ограниченного числа взаимодействующих волн позволяет правильно описать интегральные характеристики движения: предельная величина коэффициента сопротивления отличается от экспериментальных значений [1] не более чем на 10–15%.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. И. Петрову и С. Я. Герценштейну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 230 с.
2. Salwen H., Grosch C. E. The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section.— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, № 1, p. 93–112.
3. Salwen H., Cotton F. W., Grosch C. E. Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe.— J. Fluid Mech., 1980, v. 98, № 2, p. 273–284.
4. Itoh Nobutake. Nonlinear stability of parallel flows with subcritical Reynolds numbers. Pt 2. Stability of pipe Poiseuille flow to finite axisymmetric disturbances.— J. Fluid Mech., 1977, v. 82, № 3, p. 469–479.
5. Patera A. T., Orszag S. A. Finite-amplitude stability of axisymmetric pipe flow.— J. Fluid Mech., 1981, v. 112, p. 467–474.
6. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
7. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости.— ПММ, 1940, т. 4, № 3, с. 3–12.
8. Fox J. A., Lessen M., Bhat W. V. Experimental investigation of the stability of Hagen-Poiseuille flow.— Phys. Fluids, 1968, v. 11, № 1, p. 1–4.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1984

УДК 532.526.2.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СКОРОСТИ ВНЕШНЕГО ТЕЧЕНИЯ

ЛЫСЕНКО В. И., ФОМИЧЕВ В. М.

Исследованию устойчивости ламинарного пограничного слоя в присутствии периодически изменяющихся во времени возмущений скорости внешнего течения высокой частоты, в частности акустических колебаний, посвящен ряд работ, подробный обзор которых можно найти в монографии [1]. Механизм влияния таких возмущений на устойчивость и на переход к турбулентному режиму течения может быть различным. Например, они могут привести к деформации осредненного поля основного течения. Однако такой характер воздействия возмущений ранее не обсуждался, поскольку, не без определенных оснований, считалось, что изменение основного течения очень невелико даже при возмущениях большой амплитуды.

Цель настоящей работы — показать достаточно большую эффективность воздействия возмущений, или пульсаций скорости внешнего потока, посредством изменения основного течения на устойчивость ламинарного пограничного слоя газа в условиях существенной неизоотермичности и привести примеры расчетов, иллюстрирующие это утверждение.

1. **Постановка задачи.** Пусть на внешней границе плоского пограничного слоя скорость потока задана в виде $u = u_c(x) + u'(x, t)$, где $u'(x, t)$ — периодическая функция времени. Пульсации скорости сопровождаются пульсациями давления, температуры и физических свойств газа.