

УДК 538.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИОННОЙ СТРУИ ВБЛИЗИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КУРЯЧИЙ А. П.

Трудности экспериментального определения локальных электрических параметров униполярно заряженных струй обуславливают интерес к теоретическому исследованию электрогазодинамических (ЭГД) течений. Свободные ЭГД-струи рассматривались, например, в работах [1–3]. Для управления зарядом диэлектрических участков поверхностей летательных аппаратов, являющимся результатом их статической электризации и приводящим к некоторым негативным явлениям [4], а также в целях воздействия на течение в пограничном слое используются униполярно заряженные струи, распространяющиеся вблизи диэлектрика [5, 6]. В работе [6] рассматривалась ионная струя вблизи диэлектрической поверхности, обладающей поверхностной проводимостью. В этом случае можно пренебречь диффузией заряда, что существенно упрощает задачу. Учет диффузии объемного заряда проводился в работе [7], но при некоторых весьма существенных упрощениях.

В данной работе рассчитаны электрические параметры униполярно заряженной струи, распространяющейся в вязком несжимаемом газе вблизи идеальной диэлектрической пластины, с учетом поверхностного и поляризационного зарядов, а также диффузионных процессов около поверхности. Получено асимптотическое решение уравнений диффузионного ионного слоя при стремлении к нулю отношения толщины диффузионного слоя к толщине гидродинамического пограничного слоя.

1. Рассматривается обтекание плоской пластины с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_w потоком вязкого несжимаемого газа. На расстояниях x_1 и x_2 от передней кромки пластины перпендикулярно вектору скорости набегающего потока установлены бесконечные сетчатые электроды Γ_1 и Γ_2 , не возмущающие течение газа. Расстояние между ними l . Внутри пластины на расстоянии y_c от ее поверхности расположен электрод Γ_3 (фиг. 1). На электродах Γ_3 и Γ_2 задан потенциал $\varphi=0$, а на электроде-эмиттере Γ_1 задается плотность электрического заряда q_* и потенциал φ_* . Величины q_* и φ_* рассматриваются как модельные распределения параметров, так как они, вообще говоря, должны определяться из решения ЭГД задачи для области слева от Γ_1 , где расположены источники электрического заряда [8].

Отметим, что в ЭГД-течениях, реализуемых при использовании коронного разряда, параметр ЭГД взаимодействия $N=\epsilon/\rho b^2$, где ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха, ρ — его плотность, b — подвижность ионов, много меньше единицы. По этой причине в главном приближении газодинамика течения не зависит от его электрических параметров, а последние могут определяться на известном газодинамическом «фоне» [8]. Это означает, что уравнения, описывающие электрические параметры течения, отделяются от общей системы электрогазодинамики и имеют в безразмерной форме следующий вид:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = -q, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = q(\mathbf{V} + \mathbf{E}) - \lambda \operatorname{Re}^{-1} \nabla q \quad (1.1)$$

При обезразмеривании уравнений (1.1) напряженность электрического поля \mathbf{E} отнесена к u_∞/b , электрический потенциал φ — к $u_\infty l/b$, плотность объемного заряда q — к $\epsilon u_\infty/b l$, плотность электрического тока \mathbf{j} — к $\epsilon u_\infty^2/b l$, где u_∞ — скорость газа. В качестве характерной длины использо-

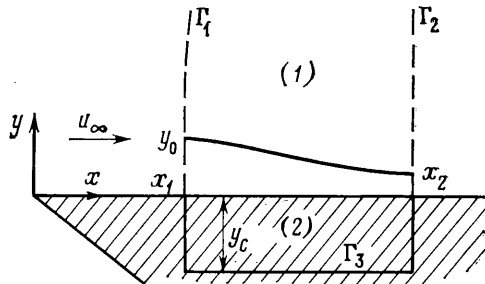
вана l . В (1.1) входят $Re = u_\infty l / \nu$ — число Рейнольдса, и $\lambda = D / \nu$ — отношение коэффициента диффузии ионов к кинематической вязкости газа. В электрогазодинамических течениях, создаваемых коронными источниками, $\lambda \sim 1$ [9].

Решение системы уравнений (1.1) помимо указанных выше граничных условий на электродах должно также удовлетворять следующим условиям на поверхности диэлектрической пластины:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad E_{y1} - \varepsilon_w E_{y2} = \sigma \quad (1.2)$$

$$E_{y1} q - \lambda Re^{-1} \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся соответственно к области между поверхностью пластины и электродами Γ_1 и Γ_2 (область 1) и области между электродами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ внутри пластины (область 2), индексом y обозначена нормальная к пластине



Фиг. 1

электрического поля, σ — плотности поверхностного заряда на пластине.

В области с характерными размерами $x \sim 1, y \sim 1$ эффекты вязкости и диффузии несущественны, поэтому здесь имеем невозмущенное газодинамическое течение, а для электрических параметров на основании (1.1) получаем систему уравнений в области 1

$$\Delta \varphi = -q, \quad \left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} + q^2 = 0 \quad (1.4)$$

и уравнение Лапласа в области 2

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Граничные условия для системы уравнений (1.4)–(1.5) имеют вид

$$\varphi(x_1, y) = \varphi_*, \quad \varphi(x_2, y) = 0, \quad \varphi(x, -y_c) = 0 \quad (1.6)$$

$$\varphi(x, +\infty) = \varphi_*(x_1 - x), \quad q(x_1, y) = q_*$$

Основные трудности решения системы уравнений (1.4)–(1.5) с граничными условиями (1.6) связаны с необходимостью удовлетворения условиям (1.2) на границе областей.

2. Вблизи поверхности пластины в области течения с характерными размерами $x \sim 1, y \sim Re^{-1/2}$ существенную роль играют эффекты вязкости и диффузии. Гидродинамический пограничный слой описывается уравнением Блазиуса.

Из уравнения $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ следует, что с точностью δ_d / l , где δ_d — толщина диффузионного слоя, можно пренебречь изменением продольной составляющей поля E_x поперек слоя. Уравнение Пуассона также упрощается [5] и имеет вид $\partial E_y / \partial y = q$.

В установившемся режиме, когда суммарный электрический ток, текущий на поверхность, равен нулю, для плотности поверхностного заряда имеем соотношение $\sigma = \beta q_w$ [10], где q_w — значение объемного заряда у поверхности, а коэффициент β , зависящий от параметров течения и свойств поверхности и газа, должен определяться на основе теории адсорбции.

Переходя к безразмерным переменным $x, z = y (Re/x)^{1/2}$, $E_x, E_z = E_y (Re/x)^{1/2}$ и вводя в рассмотрение функцию f — решение уравнения Блазиуса, на основе (1.1) получим следующее уравнение неразрывности тока диффузионного слоя:

$$\lambda E_z''' + \frac{1}{2} (f + z E_x) E_z'' = x \left[(f' + E_x) \frac{\partial E_z'}{\partial x} + E_z E_z'' + (E_z')^2 \right] \quad (2.1)$$

Граничные условия для уравнения (2.1) с учетом (1.2)–(1.3) и условия срачивания на внешней границе диффузионного слоя имеют вид

$$z=0: xE_z E_z' = \lambda E_z'', \quad E_z = (\text{Re}/x)^{1/2} (\epsilon_w E_{y2} + \beta E_z') \quad (2.2)$$

$$z \rightarrow \infty: E_z' \rightarrow q_e$$

В (2.1), (2.2) штрихом обозначено дифференцирование по z , q_e — заряд на внешней границе диффузионного слоя.

Начальные условия для уравнения (2.1) задаются в виде

$$E_z(x_1, z) = 0, \quad E_z'(x_1, z) = q_*, \quad E_z''(x_1, z) = 0 \quad (2.3)$$

Следует отметить, что уравнение (2.1) несправедливо в узких приэлектродных зонах, где нарушается условие $\partial E_x / \partial x \ll \partial E_y / \partial y$, а также имеются значительные градиенты заряда вдоль поверхности. Но можно надеяться, что, так же как и в теории пограничного слоя, особенности, возникающие вблизи электродов, не оказывают влияния на интегральные характеристики ЭГД-течения и влияние задаваемых на эмиттере начальных условий быстро затухает при удалении от него.

Входящие в задачу о диффузионном слое (2.1)–(2.3) величины $E_x(x)$, $q_e(x)$, $E_{y2}(x)$ должны определяться на основе решения внешней задачи (1.4)–(1.6), которое в свою очередь зависит от диффузионного решения. Эта связь заключается в следующем. При заданном распределении по поверхности пластины величины E_{y2} легко найти решение в области 2. Для решения уравнений (1.4) в области 1 кроме имеющихся граничных условий (1.6) нужно задать условие для ϕ при $y=0$.

В масштабе $x \sim 1$, $y \sim 1$ диффузионный слой эквивалентен поверхностно-

му заряду с плотностью $\sigma_q = \int_0^{y_2} (q - q_e) dy$, где q — распределение заряда в диффузионном слое. Поэтому при $y=0$ можно задать условие $\partial \phi / \partial y = -E_{y0} - \sigma_q$ (здесь E_{y0} — истинное значение напряженности поля на поверхности пластины в области течения), которое в переменных диффузионного слоя принимает вид

$$E_y(x, 0) = (x/\text{Re})^{1/2} \left[E_z(x, 0) + \int_0^{\infty} (E_z' - q_e) dz \right] \quad (2.4)$$

После построения решения в области 1 проверяется выполнение первого условия (1.2), в случае его нарушения подбирается новое распределение E_{y2} .

3. Согласно экспериментальным данным [5], при длине разрядного промежутка около 0,25 м вблизи системы коронирующих электродов, расположенных на поверхности диэлектрической пластины, обдуваемой потоком воздуха, толщина ионной струи превосходит толщину пограничного слоя и имеет порядок 1 см. При удалении от коронирующих игл струя утоньшается вследствие «прижимающего» действия электродов, расположенных внутри пластины.

Источники заряда, расположенные левее электрода Γ_1 , в данной постановке моделируются заданием на всем Γ_1 постоянного значения $\phi_* > 0$, а на его участке $0 < y < y_0$ задается постоянное значение плотности заряда $q_* > 0$.

Для характерных значений напряженности поля $E_x^0 \sim 10^6$ В/м, скорости $u_\infty = 100$ м/с, плотности заряда $q_*^0 = 10^{-4}$ К/м² и $l = 0,1$ м имеем $E_x \sim 1$, $\phi \sim 1$, $q \sim 1$.

Параметры ионной струи рассчитывались на основе следующего алгоритма. Области 1 и 2 разбивались разностной сеткой с постоянным шагом по x и y в области 2 и переменным по y в области 1 (шаг уменьшается

в районе струи). Во всех узлах сетки на границе $y=0$ задаются значения $E_{y2}(x, 0) < 0$. При решении задачи (1.4), (1.6), (2.4) в области 1 граничное условие (2.4) в нулевом приближении заменялось на условие $E_y(x, 0) = \varepsilon_w E_{y2}$ и на основе решения системы уравнений (1.4) с указанными граничными условиями находилось первое приближение для $q_e(x)$, $E_x(x, 0)$. Эти распределения и заданное $E_{y2}(x, 0)$ используются при решении задачи о диффузионном слое (2.1)–(2.3), из которой находится первое приближение для граничного условия (2.4). Рассчитывается следующее приближение в области 1. Процесс продолжается до тех пор, пока не совпадут значения q во всех узлах сетки в области 1, полученные в двух последовательных приближениях.

Заданное распределение E_{y2} используется для расчета потенциала в области 2, и определяется функция $F(x) = \varphi_1(x, 0) - \varphi_2(x, 0)$. Описанная процедура повторяется для второго заданного распределения $E_{y2}(x, 0)$, а последующие значения этой функции в каждом узле границы $y=0$ определяются по формуле секущих

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - (\alpha_n - \alpha_{n-1}) F_n / (F_n - F_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\alpha = E_{y2}(x, 0)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа (1.4), (1.5) решались методом переменных направлений [11], уравнение неразрывности тока (1.4) – методом характеристик [12]. При этом граница ионной струи рассчитывалась по методу прямых характеристик, а величина плотности объемного заряда в узлах сетки определялась методом обратных характеристик. При решении параболической задачи (2.1)–(2.3) использован численный метод 4-го порядка точности [13].

Точность численного решения задачи определяется степенью выполнения условия постоянства полного электрического тока в ионной струе. В проведенных вычислениях ошибка в выполнении этого условия не превышала 3%.

Расчеты проводились при постоянных значениях $x_1=0,5$, $y_e=1$, $y_0=0,05$, $\lambda=1$, $\varepsilon_w=3$, $\beta=0$, $Re=10^5$ и различных значениях q_* и φ_* : $q_*=0,5$, $\varphi_*=0,5$ (кривые 1); $q_*=1$, $\varphi_*=0,5$ (кривые 2); $q_*=1$, $\varphi_*=1$ (кривые 3).

Влияние начальной плотности заряда и разности потенциалов на толщину ионной струи Y отображает фигура 2 (сплошные кривые). Толщина струи возрастает при увеличении плотности заряда и уменьшении разности потенциалов. Последнее связано с уменьшением по абсолютной величине «прижимающей» струю компоненты поля E_y , что отражено на фиг. 2 (пунктирные кривые).

Распределения плотности объемного заряда на внешней границе диффузионного слоя q_e (пунктир) и на поверхности пластины q_w (сплошные кривые) представлены на фиг. 3. Увеличение разности потенциалов при постоянном q_* ведет к возрастанию как q_e , так и q_w .

Плотность заряда увеличивается на 2–3 порядка в узком диффузионном слое толщиной $z \sim 0,1$, что отражено на фиг. 4, где показаны распределения заряда поперек слоя в сечении $x=1$. При дальнейшем увеличении z объемный заряд медленно уменьшается вследствие наличия переменного профиля скорости, выходя на заданное на внешней границе значение. С ростом φ_* и q_* толщина диффузионного слоя уменьшается и возрастает максимальное значение плотности заряда, достигаемое на поверхности пластины.

Параметры ионной струи весьма чувствительны к величине заряда, адсорбированного на поверхности пластины. На фиг. 2–3 показаны результаты расчета для случая $\varphi_*=0,5$, $q_*=0,5$, $\beta=10^{-4}$ и неизменных остальных параметрах задачи (кривые 4). Наличие поверхностного заряда почти не влияет на значение плотности заряда на внешней границе диффузионного слоя q_e , но ведет к уменьшению плотности заряда у поверхности q_w и

к уменьшению по абсолютной величине компоненты поля $E_y(x, 0)$, вследствие чего толщины ионной струи и диффузионного слоя возрастают.

4. Малая толщина диффузионного слоя позволяет надеяться на упрощение уравнений, описывающих поведение заряда в этой области, при $\delta_d/\delta \rightarrow 0$, где δ — толщина пограничного слоя.

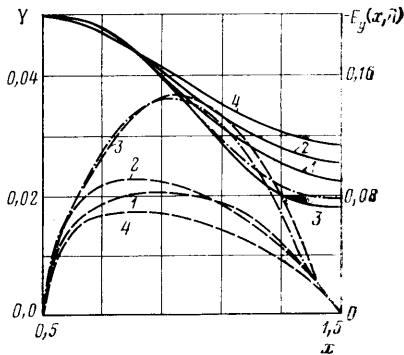
Взяв в качестве характерной величины плотности заряда в диффузионном слое его значение на поверхности q_w° , из уравнений неразрывности тока и Пуассона определим характерную толщину слоя и значение компоненты поля E_y в нем

$$\delta_d = \left(\frac{D\varepsilon}{bq_w^\circ} \right)^{1/2}, \quad E_d = \left(\frac{Dq_w^\circ}{b\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

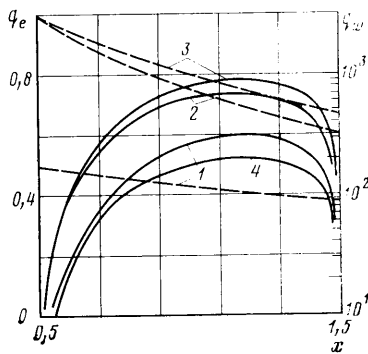
Используя оценку $\delta \sim (vl/u_\infty)^{1/2}$, найдем

$$\frac{\delta_d}{\delta} \sim \left(\lambda \frac{u_\infty \varepsilon}{blq_w^\circ} \right)^{1/2} \sim \left(\lambda \frac{q_e^\circ}{q_w^\circ} \right)^{1/2}$$

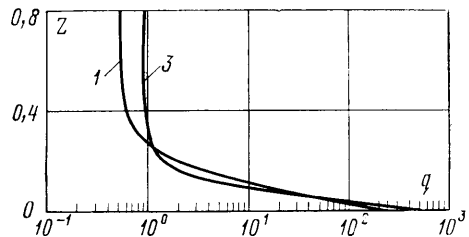
где q_e° — размерная величина плотности заряда на внешней границе слоя. При $\lambda = \text{const}$ из условия $\delta_d/\delta \rightarrow 0$ следует, что $q_e^\circ/q_w^\circ \rightarrow 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Переходя к новым переменным, используя в качестве характерных значений выражения (4.1), в рассматриваемой асимптотике вместо (2.1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с краевыми условиями

$$E''' - EE'' - (E')^2 = 0 \quad (4.2)$$

$$E'(0) = 1, \quad E''(0) - E(0) = 0, \quad E'(\infty) = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) интегрируется, и с учетом условий (4.3) его решение имеет вид

$$E(\eta) = E_\infty [1 + \alpha \exp(E_\infty \eta)] / [1 - \alpha \exp(E_\infty \eta)] \quad (4.4)$$

$$\alpha = 1 + E_\infty^2 [1 - (2 + E_\infty^2)^{1/2}]$$

где $\eta = y/\delta_d$ — новая переменная, $E_\infty = E(\infty)$.

Краевые условия задачи таковы, что решение (4.4) определено с точностью до функции $E_\infty(x)$, которая находится из условий сращивания с решением в масштабе $x \sim 1$, $y \sim 1$.

Граничное условие внешней задачи (2.4) в рассматриваемой асимптотике принимает вид

$$E_y(x, 0) = E_\infty(x) b E_d(x) / u_\infty \quad (4.5)$$

а второе условие (2.2) при $z=0$ в частном случае $\beta=0$ дает

$$E_{y2}(x, 0) = E(0) bE_d(x) / \varepsilon_w u_\infty \quad (4.6)$$

Для определения неизвестной функции $bE_d(x)/u_\infty$ необходимо использовать дополнительное условие. В рассматриваемой асимптотической постановке объемный заряд «заперт» в диффузионном слое, так как на его внешней границе $q=0$. В то же время ясно, что в диффузионный слой заряд попадает из внешней области течения. На основании этих соображений в качестве дополнительного условия для замыкания задачи следует взять условие сохранения электрического тока в интегральной форме: ток, текущий в диффузионном слое через сечение x , равен току, текущему на стенку до этого сечения во внешней задаче, т. е.

$$E_x(x, 0) \frac{bE_d}{u_\infty} [E(\infty) - E(0)] = - \int_{x_1}^x q_e(t) E_y(t, 0) dt \quad (4.7)$$

На основании (4.5)–(4.7) для определения $E_y(x, 0)$ получим интегральное уравнение

$$E_y(x, 0) = \varepsilon_w E_{y2}(x, 0) - E_x^{-1}(x, 0) \int_{x_1}^x q_e(t) E_y(t, 0) dt \quad (4.8)$$

а функция $E_{y2}(x, 0)$ определяется, как и раньше, из условия непрерывности потенциала на границе раздела сред.

Таким образом, в рассматриваемой асимптотике электрические параметры струи в масштабе $x \sim 1$, $y \sim 1$ определяются независимо от структуры диффузионного слоя.

Были проведены расчеты при значениях параметров задачи, соответствующих кривым 3 на фиг. 3–4. Уравнение (4.8) при заданном распределении $E_{y2}(x, 0)$ решалось методом последовательных приближений. Асимптотическое решение хорошо согласуется с численным, описанным в пункте 3. Например, распределение $q_e(x)$ совпадает с точностью графического изображения. На фиг. 2 штрихпунктиром показаны распределение $E_y(x, 0)$ и толщина ионной струи, рассчитанные в асимптотической постановке.

В заключение следует отметить, что наличие большого объемного заряда в узком пристеночном слое ведет к появлению в этой области течения кулоновских сил, соизмеримых с силами вязкости. В результате электрогидродинамического воздействия должна значительно измениться кривизна профиля скорости пограничного слоя вблизи стенки, что может отразиться на его устойчивости.

Автор признателен В. В. Михайлову и А. В. Казакову за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагажин А. Б., Грабовский В. И. Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, с. 57–64.
2. Грабовский В. И. Взаимодействие плоских электрогидродинамических струй. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 6, с. 131–136.
3. Ушаков В. В., Гузий Н. Н. Двухкомпонентные электрогазодинамические струи. — В кн.: Прикладная аэродинамика. Межвуз. сб. науч. тр. Киев, 1979, с. 94–102.
4. Имянитов И. М. Электризация самолетов в областях и осадках. Л.: Гидрометеоиздат, 1970. 211 с.
5. Касьянов В. А. Исследование электрогидродинамических течений с приложением к задачам управления пограничным слоем и преобразования энергии: Дис. на соискание уч. ст. докт. техн. наук. Киев: КИИГА, 1970. 604 с.
6. Ушаков В. В. Электрогазодинамические струи и системы управления электростатическим зарядом летательных аппаратов: Дис. на соискание уч. ст. докт. техн. наук. Киев: КИИГА, 1978. 550 с.
7. Ушаков В. В. Распространение ионной струи вдоль диэлектрической поверхности при $R_0 \ll 1$. — В кн.: Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики. Киев, 1970, с. 104–119.

8. *Варенцов О. К., Ватажин А. Б., Грабовский В. И.* Обтекание тел сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком с образованием ударного электропроводного слоя газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 6, с. 135–146.
9. *Ватажин А. Б.* Сглаживание разрывов электрического заряда в электрогидродинамике в результате диффузионных процессов.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 59–67.
10. *Ушаков В. В.* О кинетике накопления поверхностного заряда и граничных условиях в электрогидродинамике.— В кн.: Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики. Вып. 3. Киев, 1968, с. 103–113.
11. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
12. *Верецака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* Метод характеристик для расчета сверхзвуковых течений газа с инородными частицами в плоских и осесимметричных соплах.— В кн.: Сообщения по прикладной математике. Вып. 1. М.: ВЦ АН СССР. 1969. 46 с.
13. *Пегухов И. В.* Алгоритм общего решения системы двухточечных разностных уравнений и его приложение к численному решению уравнений в частных производных.— Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1692, с. 28–66.

Москва

Поступила в редакцию
9.III.1983