

УДК 536.25

**СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ  
ИЗОТЕРМИЧЕСКИ НАГРЕТОЙ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ  
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ**

БЕРЕЗОВСКИЙ А. А., КОВКОВА А. А., СОКОВИШИН Ю. А.

Свободноконвективный пограничный слой возникает вследствие проявления сил вязкости вблизи твердой границы. Для высоковязких жидкостей вязкость существенна во всей области течения, и тепловой пограничный слой, образующийся из-за ограничения диффузии тепла от нагретой стенки конвекцией, характеризуется отношением коэффициентов вязкости и теплопроводности, т. е. числом Прандтля.

Расхождение между теоретическими [1-4] и экспериментальными данными [5, 6] для профилей скорости свободноконвективного течения около вертикальной поверхности при больших числах Прандтля обусловлено недостаточно четким разграничением указанных физических закономерностей. В связи с этим в данной работе на основе асимптотического анализа полных уравнений Навье - Стокса и энергии при числе Прандтля  $Pr \rightarrow \infty$  и числах Грасгофа порядка единицы уточняется форма профилей скорости и температуры.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассматривается свободная конвекция около изотермически нагретой вертикальной пластины. Начало координат расположено на передней кромке пластины. Ось  $x$  направлена вдоль пластины,  $y$  — по нормали к ней. Плоское установившееся течение описывается полными уравнениями Навье - Стокса и энергии в приближении Бусинеска. Предполагается, что работой сжатия и вязкой диссипацией энергии можно пренебречь [7]. В терминах безразмерных функций тока и избыточной температуры соответствующая краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi) = Gr^{-1/2} \nabla^4 \Psi + \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = Pr^{-1} Gr^{-1/2} \nabla^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad y=0, \quad x < 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi = 0, \quad \theta = 1, \quad y=0, \quad x > 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq 0$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg(y/x)$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) проводится методом сращиваемых асимптотических разложений аналогично [8].

Вводя координаты порядка единицы в тепловом пограничном слое  $y = Y Gr^{-1/2} Pr^{-1/4}$ , представим решение в виде асимптотических разложений:

внутреннего

$$\Psi(x, y, Gr, Pr) = Gr^{-1/4} Pr^{-3/4} \Phi_0(x, Y) + Gr^{-1/2} Pr^{-1} \Phi_1(x, Y) + \dots \quad (1.3)$$

$$\theta(x, y, Gr, Pr) = \theta_0(x, Y) + Gr^{-1/4} Pr^{-1/4} \theta_1(x, Y) + \dots$$

и внешнего

$$\Psi(x, y, Gr, Pr) = Pr^{-1/4} \Psi_0(x, Z) + Gr^{-1/4} Pr^{-1/2} \Psi_1(x, Z) + \dots \quad (1.4)$$

справедливых при  $Pr \rightarrow \infty$  для фиксированных  $x, Y, Z = yGr^{1/4}$ . Подстановка разложений (1.3), (1.4) в краевую задачу (1.1)–(1.2) и предельный переход при  $Pr \rightarrow \infty$  определяет ряд краевых задач для внешнего и внутреннего разложений, связанных между собой граничными условиями. Необходимо подчеркнуть, что основным параметром, по которому проводится разложение, является число Прандтля.

**2. Нулевое приближение.** Внешний поток в нулевом приближении остается невозмущенным вследствие граничных условий на бесконечности. Для теплового пограничного слоя в нулевом приближении с помощью автомодельного преобразования получим краевую задачу

$$F_0''' + H_0 = 0, \quad H_0'' + 3/4 F_0 H_0' = 0 \quad (2.1)$$

$$F_0(\infty) = F_0'(0) = F_0''(\infty) = H_0(\infty) = 0, \quad H_0(0) = 1$$

$$\Phi_0(x, Y) = x^{3/4} F_0(\eta), \quad \theta_0(x, Y) = H_0(\eta)$$

$$\eta = Yx^{-1/4}$$

Граничные условия на внешней границе теплового слоя получены сравнением с внешним разложением. Краевая задача (2.1) решается численно.

**3. Первое приближение.** Для внешнего течения в первом приближении при  $Pr \rightarrow \infty$  имеем краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\nabla^4 \Psi_1 = 0, \quad \Psi_1(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}(x, 0) = \begin{cases} x^{1/2} F_0'(\infty), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Точное решение (3.1) имеет вид

$$\Psi_1(x, Z) = -ZF_0'(\infty)r^{1/2} \sin \frac{\varphi - \pi}{2}$$

Задачу для первого приближения внутреннего разложения запишем с использованием деформирования продольной координаты

$$x = X + f(X, Y) Gr^{-1/4} Pr^{-1/4}$$

Во внешней области этому будет соответствовать координата

$$x = X + f(X, Y) Gr^{-1/4}$$

где функция деформирования имеет вид

$$f(X, Y) = a_1 Y + a_0 X^{1/4}$$

Константы  $a_1$  и  $a_0$  определяются из условия равенства нулю завихренности при  $x=0$

$$a_1 = -1, \quad a_0 = \frac{3F_0(\infty)}{2F_0'(\infty)}$$

Использование деформирования, не изменяя краевых задач для нулевого приближения внутреннего разложения и первого приближения внеш-

него разложения, позволяет уточнить относительное вертикальное положение пограничного слоя и учесть влияние передней кромки пластины.

Автомодельное преобразование

$$\Phi_1(X, Y) = f \frac{\partial \Phi_0}{\partial X} + F_1(\eta), \quad \theta_1(X, Y) = f \frac{\partial \theta_0}{\partial X} + X^{-3/4} H_1(\eta)$$

приводит к краевой задаче для первого приближения внутреннего разложения

$$F_1''' + H_1 = 0, \quad H_1'' + 3/4 (F_0 H_1)' = 0$$

$$F_1(0) = F_1'(0) = F_1''(\infty) = H_1(0) = H_1(\infty) = 0$$

которая при данных граничных условиях имеет нулевое решение.

Процесс построения решения допускает продолжение и до второго приближения включительно. Однако точность имеющихся экспериментальных данных делает рассмотрение второго приближения излишним и результаты его не приводятся.

**4. Собственные решения.** Построенное асимптотическое разложение (1.3) определено с точностью до собственных решений, удовлетворяющих нулевым граничным условиям. Дополняя внутреннее разложение членами вида

$$c_k \Gamma^{-1/4(\lambda_k+1)} \text{Pr}^{-1/4(\lambda_k+3)} f_k(\eta) X^{3/4(1-\lambda_k)}$$

$$c_k \Gamma^{-1/4\lambda_k} \text{Pr}^{-1/4\lambda_k} g_k(\eta) X^{-1/4\lambda_k}$$

получим для определения собственных функций  $f_k$  и  $g_k$

$$f_k''' + g_k = 0$$

$$g_k'' + 3/4 [g_k' F_0 + \lambda_k g_k F_0' + (1-\lambda_k) f_k H_0'] = 0$$

$$f_k(0) = f_k'(0) = f_k''(\infty) = g_k(0) = g_k(\infty) = 0$$

Решение, соответствующее первому собственному значению  $\lambda_1 = 4/3$ , имеет вид

$$f_1(\eta) = 3/4 F_0^{-1/4} F_0' \eta, \quad g_1(\eta) = -1/4 H_0' \eta$$

При этом константа при первом собственном решении связывается с коэффициентом функции деформирования  $c_1 = -2a_0$  [8].

**5. Пластина конечной длины.** Недостатком решения для случая полубесконечной пластины является неограниченность скоростей вдали от пластины. Это связано с неустранимой особенностью в бесконечно удаленной точке. Поэтому естественно перейти к изучению свободной конвекции около пластины конечной длины, используемой в экспериментах. Свободно-конвективный поток за задней кромкой пластины перестраивается и в дальнейшем следе представляет собой плоскую плавучую струю. Скорость на внешней границе плавучей струи равна нулю [9]. В переходной зоне затухание скорости можно смоделировать степенным законом, который дает асимптотически правильные значения. В результате для пластины конечной длины граничные условия для первого приближения внешнего разложения усложняются, тем не менее аналитическое решение можно получить в результате интегрирования

$$\Psi_1(x, Z) = \frac{F_0'(\infty)}{\pi i} \left\{ \int_0^1 \frac{\lambda^{1/2} d\lambda}{\lambda - t} + \int_1^\infty \frac{\lambda^{-n} d\lambda}{\lambda - t} \right\} Z$$

$$t = x + iZ$$

**6. Сопоставление с экспериментом.** Выражения для скорости и тем-

пературы в тепловом пограничном слое имеют вид

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \alpha_0 + Ra_x^{-1/4} \alpha_{10} + Ra_x^{-1/2} \alpha_{1/2} + O(Ra_x^{-3/4}) \quad (6.1)$$

$$\frac{\bar{u}\bar{x}}{a Ra_x^{1/4}} = \beta_0 + Ra_x^{-1/4} \beta_{10} + Ra_x^{-1/2} \beta_{1/2} + O(Ra_x^{-3/4}) \quad (6.2)$$

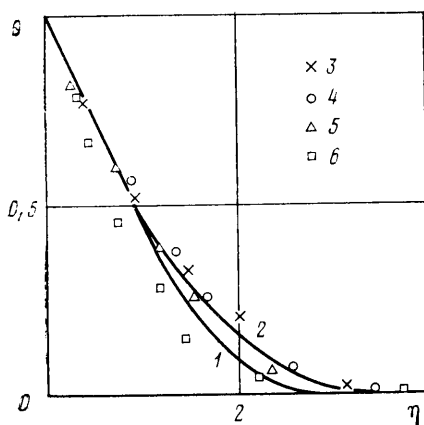
$$\alpha_0 = H_0(\eta), \quad \alpha_{10} = (a_0 - \eta) [-1/4 \eta H_0'(\eta)], \quad \alpha_{1/2} = 1/2 a_0 \eta H_0'(\eta)$$

$$\beta_0 = F_0'(\eta), \quad \beta_{10} = (a_0 - \eta) [1/2 F_0'(\eta) - 1/4 \eta F_0''(\eta)]$$

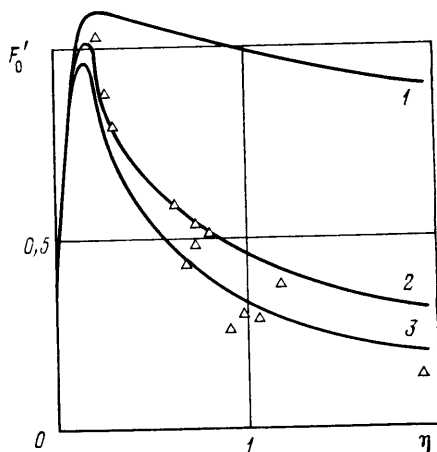
$$\beta_{1/2} = -2a_0 [1/2 F_0'(\eta) - 1/4 \eta F_0''(\eta)]$$

Первое слагаемое в выражениях (6.1), (6.2) соответствует результатам теории пограничного слоя, второе определяется деформированием продольной координаты, третье соответствует первому собственному решению.

На фиг. 1 представлено распределение температур в тепловом пограничном слое: кривая 1 — теория пограничного слоя, 2 — формула (6.1),



Фиг. 1



Фиг. 2

$Ra_x = 10^4$ . Экспериментальные данные [5]: 3 —  $x = 0,25$ ; 4 — 0,5; 5 — 0,75; 6 — 1,0.

Фиг. 2 показывает, что использование степенного закона затухания продольной скорости на внешней границе теплового слоя в ближнем следе позволяет правильно интерпретировать экспериментальные данные по распределению скорости свободноконвективного течения при  $n=2$ . При этом точное выражение для функции тока во внешнем течении имеет вид

$$\Psi_1(x, Z) = \frac{F_0'(\infty)Z}{\pi} \left\{ r^{1/2} \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \ln \frac{\sqrt{r^2+1-2r \cos \varphi}}{r+1+2r^{1/2} \cos \varphi/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1-r}{2r^{1/2} \sin \varphi/2} \right) \right] + r^{-2} \left[ \sin 2\varphi \ln \sqrt{r^2+1-2r \cos \varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + r \sin \varphi + \cos 2\varphi \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1-r \cos \varphi}{r \sin \varphi} \right) \right] \right\}$$

На фиг. 2 кривая 1 соответствует теории пограничного слоя, расчет по формулам (6.2), (5.1): 2 —  $n=1$ , 3 —  $n=2$ . Экспериментальные данные [5]:  $Gr=3$ ,  $Pr=2957$ .

Использование числа Прандтля в качестве основного параметра разложения позволяет построить асимптотическую теорию, дающую правиль-

ную форму профилей температуры и скорости свободноконвективного течения высоковязкой жидкости при числах Грасгофа порядка единицы. Толщина слоя затухания скорости во внешнем течении пропорциональна  $Gr^{-1/4}$ . Это соответствует аналогичным оценкам и в случае  $Gr \gg 1$  [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgan G. W., Warner W. H.* On heat transfer in laminar boundary layers at high Prandtl number.— J. Aeronaut. Sci., 1956, v. 23, № 10, p. 937–948.
2. *Eshghy S.* Free-convection layers at large Prandtl number.— ZAMP, 1971, v. 22, № 2, p. 275–292.
3. *Takhar H. S., Whitelaw M. H.* Non-isothermal free convection at high Prandtl number.— Теоретична и приложна механика, 1976, v. 7, № 3, p. 27–37.
4. *Kuiken H. K.* An asymptotic solution for large Prandtl number free convection.— J. Eng. Math., 1968, v. 2, № 4, p. 355.
5. *Gilmore R. J., Yelmgren K. E., Szweczyk A. A., Yang K.-T.* Experimental investigation of laminar free convection about short vertical flat plates and a horizontal discs at small Grashof numbers.— Proc. 5-th Int. Heat transfer conf. Tokyo, 1974, Tokyo, 1974, p. 25–29.
6. *Fujii T., Tanaka H.* Free convection of a paraffin oil around a vertical plate.— Repts Res. Inst. Sci. Ind. Kyushu Univ., 1979, № 70, p. 21–29.
7. *Gebhart B.* Effects of viscous dissipation in natural convection.— J. Fluid Mech., 1962, v. 14, № 2, p. 225–232.
8. *Маргыненько О. Г., Березовский А. А., Соковишин Ю. А.* Асимптотические методы в теории свободноконвективного теплообмена. Минск: Наука и техника, 1979. 168 с.
9. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
10. *Соковишин Ю. А., Маргыненько О. Г.* Введение в теорию свободноконвективного теплообмена. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 224 с.

Таллин,  
Владивосток,  
Ленинград

Поступила в редакцию  
11.VIII.1983