

УДК 532.5.031

БЕЗОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ

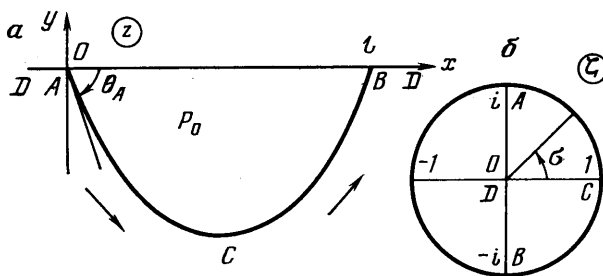
ЖИТНИКОВ В. П., ТЕРЕНТЬЕВ А. Г.

В последнее время внимание конструкторов все больше привлекают мягкие оболочки. С их помощью возводятся легкие и дешевые пневмоконструкции, различные ограждения, плотины и др. Поэтому исследование гидродинамики гибких, наполненных газом оболочек приобретает практическое значение. Внимание ученых привлекают гибкие оболочки также в связи с изучением динамики газожидкостных смесей, движения пузырьков в жидкости, обтекания пристеночных неподвижных пузырьков и др. Именно обтеканию пузырьков с учетом капиллярных сил посвящено большинство теоретических работ.

Постановка задачи об обтекании газового пузыря принадлежит Н. Е. Жуковскому [1], который получил также точное решение для частного случая движения пузыря в канале. Решение задачи об обтекании безграничным потоком газового пузыря при одном частном значении давления внутри него найдено в [2]. В работах [3, 4] были предложены различные итерационные методы, а в [5] — вариационный метод. В последних двух работах проведены также численные расчеты. Во всех рассмотренных задачах оболочку можно считать закрепленной в одной неподвижной точке. Однако на практике представляют интерес также гибкие оболочки, закрепленные в двух неподвижных точках. Эта задача в литературе пока не получила освещения.

В настоящей работе методами, изложенными в [6], подробно рассматривается плоская задача о безотрывном обтекании наполненной газом оболочки как с одной, так и с двумя точками закрепления. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая и невесомая, а оболочка нерастяжимая.

1. Пусть мягкая цилиндрическая оболочка длиной $2L$ закреплена в двух точках A и B , расположенных на расстоянии $l < L$ друг от друга. Ниже рассматривается лишь нижняя половина течения (фиг. 1). В при-



Фиг. 1

нятой постановке задачи течение симметрично относительно вертикальной прямой.

На поверхности оболочки ACB должно выполняться условие Лапласа

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{\rho v_\infty^2}{T} \left(\mu - 1 + \frac{v^2}{v_\infty^2} \right), \quad \mu = 2 \frac{P_0 - P_\infty}{\rho v_\infty^2} \quad (1.1)$$

где S — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки A , P_0 — давление внутри оболочки, P_∞ и v_∞ — давление и скорость на бесконечности, ρ — плотность

жидкости, θ — угол между вектором скорости и осью x , v — величина скорости на дуге AC , T — натяжение оболочки, μ характеризует степень наполнения оболочки. Считаются известными число μ и отношение L/l . В случае оболочки с одной закрепленной точкой вместо отношения L/l необходимо задать угол θ в точке A : $\theta_A = -\pi/2$. (Последнее условие следует из парадокса Даламбера.)

Для решения задачи область течения в физической плоскости z отображается на внутренность единичного круга вспомогательной плоскости ξ ($|\xi| \leq 1$). Соответствие точек видно из фиг. 1.

Комплексный потенциал $W = ia(\xi - \xi^{-1})$, где $a > 0$ — действительная постоянная. На дуге окружности ($\xi = e^{i\sigma}$) $W = \varphi = -2a \sin \sigma$. Отсюда производная $d\varphi/d\sigma$ и дифференциал функции $S(\sigma)$ равны

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = -2a \cos \sigma, \quad dS = -\frac{2a}{v} \cos \sigma d\sigma \quad (1.2)$$

С учетом первого равенства условие (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\lambda \left[(\mu - 1) \frac{v_\infty}{v} + \frac{v}{v_\infty} \right] \cos \sigma, \quad \lambda = \frac{\rho v_\infty a}{T} \quad (1.3)$$

Функцию Леви — Чивиты ω представим в виде суммы [6]

$$\omega = i \ln \frac{dW}{v_\infty dz} = \theta + i \ln \frac{v}{v_\infty} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \quad (1.4)$$

$$\omega_0 = 2i \ln \frac{(1+i\xi)^{2-\beta} - (1-i\xi)^{2-\beta}}{i2(2-\beta)\xi(1+\xi^2)^{-\beta/2}}, \quad \omega_1 = i \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \xi^{2m} \quad (1.5)$$

$$\omega_2 = i\xi^2 \left[B_1 \left(\frac{\xi^2+1}{2} \right)^{2-\beta} + B_2 \left(\frac{\xi^2+1}{2} \right)^{2+\beta} \right], \quad \beta = -\frac{2\theta_A}{\pi} \quad (1.6)$$

Здесь $\omega_0(\xi)$ — функция Леви — Чивиты для безотрывного обтекания сегмента [4], $\omega_1(\xi)$ — искомая аналитическая функция. Функция $\omega_2(\xi)$, которая отсутствует в обычном методе Леви — Чивиты, введена для того, чтобы учесть поведение производной $d\theta/d\sigma$ вблизи точки $\sigma = \pi/2$. Наличие $\omega_2(\xi)$ позволяет существенно сократить объем вычислений [6]. Коэффициенты B_1 и B_2 определяются из условия (1.3) в точке $\sigma = \pi/2$

$$B_1 = -\frac{1}{2^{1-\beta}} + \frac{\lambda(\mu-1)}{\gamma(2-\beta)\sin(\pi\beta/2)}, \quad B_2 = -\frac{\lambda\gamma}{(2+\beta)\sin(\pi\beta/2)} \quad (1.7)$$

$$\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \pi/2} \left(\frac{v}{v_\infty} \cos^{-\beta} \sigma \right) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m c_{2m} \right\} \frac{2^{-\beta}}{(1-\beta/2)^2} \quad (1.8)$$

С учетом функций (1.2) и (1.4) нетрудно найти угол наклона, величину вектора скорости на дуге AC и форму дуги AC , а также длины L и l

$$\begin{aligned} \theta = & -2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg}^{2-\beta} (1/2\sigma + 1/4\pi) - 1}{\operatorname{tg}^{2-\beta} (1/2\sigma + 1/4\pi) + 1} \operatorname{tg} \left(\beta \frac{\pi}{4} \right) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \sin(2m\sigma) - \\ & - B_1 \sin(4-\beta)\sigma \cos^{2-\beta}\sigma - B_2 \sin(4+\beta)\sigma \cos^{2+\beta}\sigma \\ v = & v_\infty \frac{\cos^2 \sigma}{(2-\beta)^2} \left[\operatorname{ctg}^{2-\beta} \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg}^{2-\beta} \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\pi \frac{\beta}{2} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \cos 2m\sigma + B_1 \cos(4-\beta)\sigma \cos^{2-\beta}\sigma + B_2 \cos(4+\beta)\sigma \cos^{2+\beta}\sigma \right] \end{aligned}$$

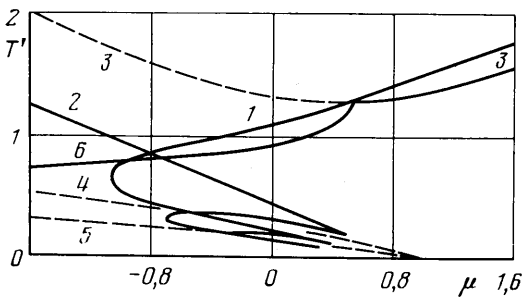
$$x=2a \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos \sigma \frac{d\sigma}{v}, \quad y=2a \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \sigma \frac{d\sigma}{v}, \quad \sigma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$L=4a \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \sigma}{v} d\sigma, \quad l=4a \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \cos \sigma}{v} d\sigma \quad (1.9)$$

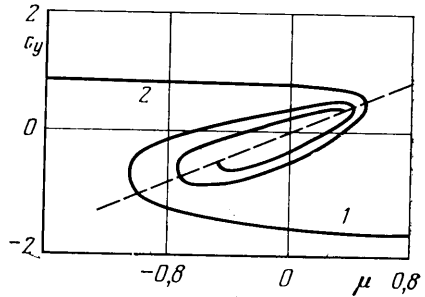
В критической точке ($\sigma=\pi/2$) условие (1.3) приводит к равенству

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2m(-1)^m c_{2m} = 0 \quad (1.10)$$

2. Численные расчеты были проведены с сохранением первых N членов в сумме (1.5). Основные результаты были получены при $N=8$. Для контроля точности проводились расчеты также при $N=15$ и 25 . Условие (1.3) удовлетворялось в отдель-



Фиг. 2



Фиг. 3

ных точках дуги AC ($\sigma_m = \pi m/2N$, $m=0, \dots, N-1$). Получаемая при этом система нелинейных уравнений (совместно с равенствами (1.9), (1.10)) относительно параметров λ , β , a , c_{2m} ($m=1, \dots, N$) решалась методом Ньютона с минимизацией суммы квадратов невязок по всем уравнениям [6].

На фиг. 2, 3 показаны зависимости коэффициента натяжения $T'(\mu)$ и коэффициента поперечной силы $c_y(\mu)$ для оболочки с двумя закрепленными точками при $L/l=\pi/2$, где

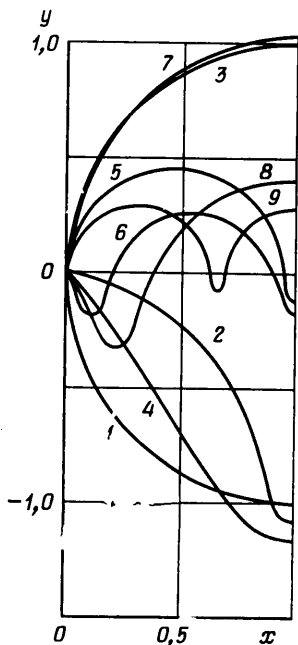
$$T'(\mu) = \frac{4T}{\rho v_{\infty}^2 l}, \quad c_y(\mu) = \frac{2}{\rho v_{\infty}^2 l} \int_{AB} (P - P_{\infty}) dx$$

Два предельных случая $\mu \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow -\infty$ соответствуют обтеканию кругового цилиндра и круговой впадины. Численные расчеты показывают, что непрерывный переход по μ от $-\infty$ к ∞ совершить нельзя, т. е. существуют две изолированные ветви решения (кривые 1 и 2). Существуют также еще две ветви решения с отрицательным натяжением, которые здесь не рассматриваются. Отрицательному натяжению соответствует обтекание тонкой струи, изгибающейся под давлением набегающего потока. Вблизи $\mu=0$ функции $T'(\mu)$ и $c_y(\mu)$ многозначные, причем при движении вдоль этих кривых угол θ_A периодически меняет знак; при $\theta_A=0$ величина $c_y=\mu$, поэтому на фиг. 3 точки, соответствующие $\theta_A=0$, лежат на одной прямой, которая показана штриховой линией.

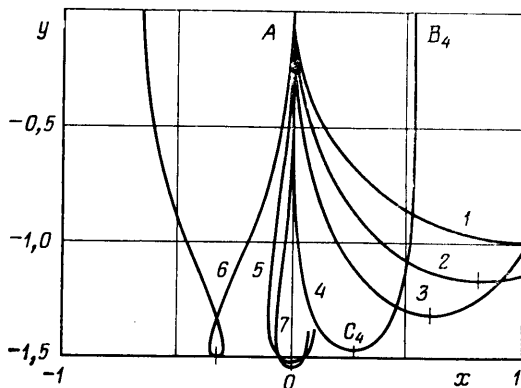
Конфигурации оболочки для некоторых значений μ показаны на фиг. 4. Кривые 1-3 соответствуют числам $\mu=\infty$; $-0,92$; $-\infty$, кривые 4-9 - числу $\mu=0$. Оболочки 4-6, изображенные на фиг. 4, отвечают точкам пересечения прямой $\mu=0$ с кривой 1 (фиг. 2) в порядке уменьшения натяжения T' ; соответственно оболочки 7-9 - с кривой 2. Видно, что с умень-

шением натяжения на оболочке появляются волны, число которых неограниченно растет, а амплитуда уменьшается. В пределе их можно трактовать как капиллярные волны на поверхности жидкости.

Все указанные на фиг. 4 конфигурации оболочки физически непротиворечивы, если рассматривать течение вдоль стенки со щелью AB , прикрытой оболочкой. Над стенкой практически можно создать любые давления. Однако с увеличением отношения L/l при отрицательных μ теоретически возможно неоднократное пересечение оболочки вертикальной оси симметрии, т. е. течение становится неоднolistным. Для того чтобы из-



Фиг. 4



Фиг. 5

бежать противоречия с физически возможным течением, необходимо в этом случае рассматривать обтекание оболочки с вертикальным прямолинейным участком соприкосновения. При этом оболочка будет содержать три криволинейных участка, разделенных прямолинейными, вследствие чего задача будет иметь иную математическую формулировку. Здесь эта задача не рассматривается.

На фиг. 5 представлены конфигурации оболочки с одной закрепленной точкой (кривые 1-6 вычислены соответственно при $\mu = \infty$; 4; 2; 1; 0,5463; 0). При уменьшении μ оболочка вытягивается в поперечном направлении, а концы A и B приближаются друг к другу. При $\mu = \mu_0 = 0,5463$ A и B совпадают; при $\mu < \mu_0$ граница оболочки AB в средней точке C образует петлю (кривая 6), так что течение происходит на двулистной поверхности¹. В пределе при $\mu \rightarrow -\infty$ оболочка приобретает форму окружности с отрицательной кривизной; в средней точке C скорость при этом обращается в бесконечность. Форма оболочки при $\mu = 1$ с точностью до 10^{-6} совпадает с точной [2] и хорошо согласуется с полученными в [4, 5].

В отличие от оболочки с двумя закрепленными точками здесь теоретически возможен непрерывный переход по μ на всем интервале $(-\infty, \infty)$ (кривая 3 на фиг. 2, где $T' = 2\pi T / \rho v_\infty^2 L$). Кроме того, численные расчеты

¹ Возможность такого двулистного течения была аналитически показана О. М. Киселевым (устное сообщение).

показывают, что на интервале $(-\infty, 1)$ теоретически возможны и другие режимы обтекания на многolistных плоскостях (фиг. 2, кривые 4 и 5).

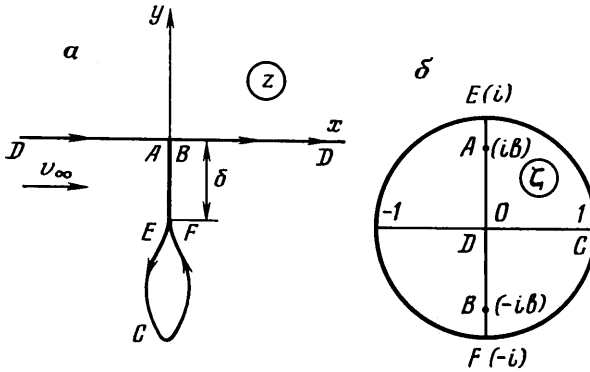
3. Для того чтобы избежать самопересечения при $\mu < \mu_0$, следует рассматривать оболочку с вертикальным прямолинейным участком соприкосновения длиной δ (фиг. 6, a). Параметрическая область и соответствие точек показаны на фиг. б, б.

Как и в п. 1, комплексный потенциал $W = ai(\zeta - \zeta^{-1})$, а условие на криволинейном участке ECF определяется соотношением (1.3). Однако в сумме (1.4) функции ω_0 и ω_2 заменены на следующие:

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \ln [(\zeta^2 + b^2) (\zeta^2 + b^{-2})] \quad (3.1)$$

$$\omega_2 = \frac{2i}{\pi} B_3 \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1 + \zeta^2}{2\zeta} \right)^2 \left(1 + \frac{\zeta^2 - 1}{2i\zeta} \ln \frac{1 + \zeta i}{1 - \zeta i} \right) \right] \quad (3.2)$$

Первая функция выбрана так, чтобы она удовлетворяла кинематическому условию на оси симметрии и на прямолинейных участках соприкос-



Фиг. 6

новения AE и BF , обращалась в ноль при $\zeta = 0$ и при $b = 1$ совпадала с соответствующей функцией (1.5), найденной при $\beta = 1$.

Функция (3.2) учитывает поведение функции $\omega(\zeta)$ вблизи точек соприкосновения E и F криволинейного участка оболочки с прямолинейными, т. е.

$$\frac{d}{d\sigma} [\operatorname{Re} \omega_2(e^{i\sigma})] = \frac{d\theta}{d\sigma} \approx -2B_3 \cos \sigma, \quad \sigma \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \quad (3.3)$$

$$B_3 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu - 1}{\gamma} + \gamma \right), \quad \gamma = \exp[\operatorname{Im} \omega(i)] \quad (3.4)$$

Здесь B_3 выбрано в соответствии с условием (1.3).

Действительная часть функции (3.2) на дуге окружности $\zeta = e^{i\sigma}$ ($-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2$) выбрана в виде $\operatorname{Re} \omega_2 = B_3(\sin \sigma - \sin^3 \sigma)$. Она удовлетворяет соотношению (3.3), имеет по крайней мере непрерывную первую производную и равняется нулю при $\sigma = \pm \pi/2; 0$. После аналитического продолжения через вертикальный диаметр, на котором $\operatorname{Re} \omega_2 = 0$, функция (3.2) восстанавливается по ее заданной действительной части на окружности.

Представление (3.2) не единственно. Можно указать и другие функции, которые удовлетворяли бы аналогичным условиям. При этом коэффициенты c_{2m} также будут иметь порядок не ниже $(2m)^{-3}$. В самом деле, действительная часть функции ω_1 , равная $\operatorname{Re}(\omega - \omega_0 - \omega_2)$, является периодической непрерывной функцией от σ и в соответствии с (3.3) имеет не-

прерывную первую производную. Поэтому коэффициенты c_{2m} , как коэффициенты ряда Фурье, будут иметь оценку $|c_{2m}| \leq M/(2m)^3$, где M — некоторое положительное число.

Здесь заранее предполагается существование решения $\omega(\zeta)$ с непрерывной действительной частью вместе со своей первой производной всюду на дуге окружности $\zeta = e^{i\theta}$, за исключением точек $\zeta = \pm i$, т. е. предполагается, что криволинейная часть оболочки имеет всюду непрерывную кривизну. В точках сопряжения E и F кривизна терпит разрыв первого рода.

Численные расчеты показали, что сходимость ряда для функции $\omega_1(\zeta)$ удовлетворительная и что при вычислениях достаточно ограничиться первыми восемью коэффициентами c_{2m} ($m=1, 2, \dots, 8$). Сохраняя в расчетных формулах первые N коэффициентов c_{2m} и удовлетворяя равенству (1.3) в $N+1$ точках $\sigma_m = \pi m/2N$ ($m=0, 1, \dots, N$), а также выполняя геометрическое условие для заданной длины L и полагая $l=0$, приходим к замкнутой системе уравнений относительно неизвестных параметров a, b, λ и c_{2m} ($m=1, 2, \dots, N$). В таблице представлены значения параметров, вычисленные при $\mu=0,3$; $N=3-23$ (Δ — максимальная невязка уравнения (1.1) на дуге ACB). Для сравнения эти же параметры были вычислены с помощью обычного метода Леви — Чивиты для $N=3-28$ (три последние колонки). Равенство (1.1) в точке A в этом случае не выполнялось ($\Delta = \infty$). Использование функции ω_2 позволило получить при $N=8$ результаты более точные, чем рассчитанные обычным методом с сохранением 28 коэффициентов c_{2m} .

N	b	$1/\lambda$	δ/L	Δ	b	$1/\lambda$	δ/L
3	0,8091	1,6749	0,3632	1,3	0,4696	2,0984	0,8026
8	0,8171	1,5956	0,3536	0,02	0,8027	1,6015	0,3784
13	0,8164	1,5958	0,3549	0,007	0,8069	1,5996	0,3713
18	0,8163	1,5958	0,3550	0,003	0,8114	1,5977	0,3635
23	0,8163	1,5958	0,3551	0,002	0,8133	1,5970	0,3603

На фиг. 5 показана конфигурация оболочки с прямолинейными участками при $\mu=0,3$ (кривая 7). Расчеты показывают, что, как и следовало ожидать, с уменьшением числа μ в интервале $(-\infty, \mu_0)$ длина прямолинейного участка δ монотонно увеличивается и в пределе при $\mu \rightarrow -\infty$ вся оболочка вырождается в отрезок прямой длины $\delta=L/2$. Зависимость $T'(\mu)$ для оболочки с прямолинейными участками показана на фиг. 2 (кривая 6).

В заключение отметим, что функции (3.1) и (3.2) можно применить также для расчета кавитационного обтекания пластины по схеме Рябушинского с учетом поверхностного натяжения. В этом случае заданными являются длина пластины δ и натяжение T , а искомой — длина каверны l .

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. — Тр. ЦАГИ, 1930, вып. 41, с. 134–144.
2. McLeod E. B., Jr. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. — J. Rational Mech. and Analysis, 1955, v. 4, № 4, p. 557–567.
3. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. — Уч. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152, с. 61–75.
4. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 13–23.
5. Лихоманов Н. И., Петров А. Г. Обтекание плоскопараллельным потоком газовой полости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 20–26.
6. Житников В. П., Терентьев А. Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 43–48.

Уфа,
Чебоксары

Поступила в редакцию
27.XII.19 3