МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1984

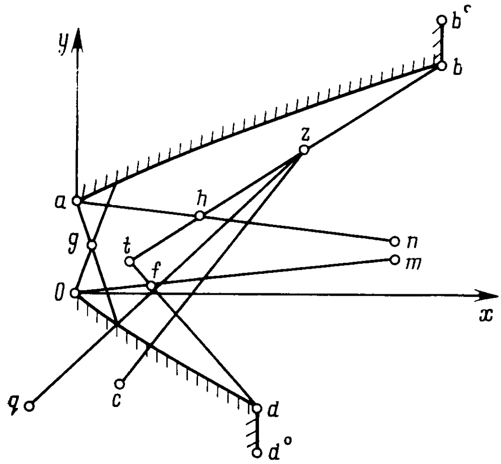
УДК 533.697.4:517.97

ПОСТРОЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ МАКСИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

РЫЛОВ А. И.

Решена вариационная задача о построении несимметричных плоских сопел, реализующих максимальный момент относительно некоторой точки. Контуры сопла предполагаются невзаимодействующими. Используется метод неопределенного контрольного контура [1]. Решение данной задачи содержит как частный случай решение задачи построения сопла максимальной тяги и в том числе при заданной подъемной силе [1–3]. Показано, что построение сопла максимального момента при дополнительных условиях на тягу и подъемную силу или на момент относительно другой точки, сводится к построению сопла максимального момента относительно некоторой вспомогательной точки.

1. Рассмотрим сверхзвуковое несимметричное плоское сопло с контурами ab и $0d$ (см. фигуру). Пусть внутри сопла реализуется сверхзвуковое безударное течение невязкого и нетеплопроводного газа. В силу этого вдоль каждой линии тока энтропия и полная энтальпия постоянны, но для разных линий тока они могут быть отличны друг от друга, т. е. течение может быть как однородным (безвихревым), так и неоднородным (вихревым). Предполагается, что контуры сопла не взаимодействуют, т. е. последние характеристики an и $0m$ начальных вееров разрежения проходят правее концевых точек обоих контуров. Внешнее давление для верхнего контура равно p_1, для нижнего — p_2, т. е. давление $p_1(p_2)$ действует на торец $bb^\circ(dd^\circ)$, если он существует, или, в противном случае, на внешнюю часть контура $ab(0d)$.



Используя интегральный закон сохранения момента количества движения и полярную систему координат с центром c (см. фигуру), момент сил m_c, создаваемый контурами сопла относительно точки c, с точностью до несущественной постоянной может быть следующим образом выражен через распределение газодинамических и геометрических параметров на неопределенном пока контуре dtb и координаты концевых точек b и d:

$$m_c=\int_d^b [prr'-wr\sin(\theta-\varphi)]\,d\psi-p_1\frac{r_b^2}{2}+p_2\frac{r_d^2}{2} \qquad (1.1)$$

Здесь и далее p — давление, ρ — плотность, w — модуль вектора скорости, θ — угол вектора скорости с осью x, r — расстояние от точки c до текущей точки z контура dtb, φ — угол, составляемый радиус-вектором $0z$ с осью x, ψ — функция тока, штрих означает производную по ψ вдоль dtb, M — число Маха, a — скорость звука.

Введя функцию тока ψ, после простых преобразований имеем

$$d\psi=\rho w(r\cos(\theta-\varphi)\,d\varphi-\sin(\theta-\varphi)\,dr) \tag{1.2}$$

$$L\equiv\varphi'-\operatorname{tg}(\theta-\varphi)\frac{r'}{r}-\frac{1}{\rho wr\cos(\theta-\varphi)}=0$$

Задача формулируется следующим образом. Для заданных ограничений на концевые точки b и d требуется так выбрать контуры ab и $0d$, чтобы момент m_c, определяемый формулой (1.1), был максимальным.

Для решения поставленной задачи воспользуемся одной из модификаций метода контрольного контура — методом неопределенного контрольного контура [1]. В соответствии с этим составим вспомогательный функционал

$$I=m_c+\int_a^b \mu(\psi)L\,d\psi$$

где $\mu(\psi)$ — переменный множитель Лагранжа.

При допускаемом варьировании $m_c=I$. В качестве управления выбираем $\varphi=\varphi(\psi)$, а функцию $r=r(\psi)$ на dtb оставляем неизменной. В дальнейшем под вариацией δg понимаем приращение функции g при фиксированном ψ, а под Δr и $\Delta\varphi$ — приращения координат точек b или d.

Вычислив вариацию δI, получим

$$\delta I=\int_d^b (W_1\delta w+W_2\delta\theta+W_3\delta\varphi)\,d\psi+\delta I_1+\delta I_2 \tag{1.3}$$

$$W_1=-\rho wrr'-r\sin(\theta-\varphi)-\mu\frac{M^2-1}{\rho w^2 r\cos(\theta-\varphi)} \tag{1.4}$$

$$W_2=-wr\cos(\theta-\varphi)-\mu\frac{\rho wr'+\sin(\theta-\varphi)}{\rho wr\cos^2(\theta-\varphi)} \tag{1.5}$$

$$W_3=-W_2-\mu'$$

$$\delta I_i=(-1)^{i+1}\left[(p-p_i)r-\mu\frac{\operatorname{tg}(\theta-\varphi)}{r}\right]\Delta r+(-1)^{i+1}\mu\Delta\varphi$$

где $i=1$ отвечает точке b, $i=2$ — точке d.

При вычислении δI учтено, что для неоднородных, т. е. вихревых, течений $\delta p=-\rho w\delta w$, $\delta\rho=-\rho w\delta w/a^2$, так как вариации берутся при постоянном ψ, а также то, что в концевых точках контуров $d\varphi/dr=\operatorname{tg}(\theta-\varphi)/r$. Также отметим, что на отрезках ft и th, лежащих вне областей влияния контуров ab и $0d$, $\delta w=\delta\theta=\delta\varphi=0$, т. е. в выражении для δI интеграл по dtb разбивается на два интеграла — по df и hb.

Следуя [1], для любого, не обязательно оптимального сопла можно так выбрать $r(\psi)$ и $\mu(\psi)$ на df и hb, что в выражении для δI W_1 и W_2 обратятся в нуль. Действительно, решая алгебраическую систему $W_1=0$, $W_2=0$, где W_1 и W_2 определены выражениями (1.4) и (1.5), находим

$$r'=\pm\frac{\cos(\alpha\pm(\theta-\varphi))}{\rho w\sin\alpha},\quad \mu=\mp r^2 q\cos^2(\theta-\varphi) \tag{1.6}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}, \quad q = \frac{\rho w^2}{\sqrt{M^2-1}}$$

Здесь и далее верхний знак отвечает отрезку hb, нижний — df. Из (1.6) вытекает, что hb — отрезок характеристики первого семейства, fd — второго. При указанном выборе r' и μ $W_1=W_2=0$, $W_3=-\mu'$. Поэтому, учитывая выражение (1.3) для δI, из необходимого условия оптимальности $\delta I \leqslant 0$ получаем следующие необходимые условия экстремума:

$$r^2 q \cos^2(\theta-\varphi) = \text{const} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\delta I_i = [q \sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi) - (-1)^i (p-p_i)] r\Delta r - \\ -q\cos^2(\theta-\varphi) r^2 \Delta\varphi = f_i \Delta x + g_i \Delta y \leqslant 0 \\ f_i = r(q\cos(\theta-\varphi)\sin\theta - (-1)^i (p-p_i)\cos\varphi), \\ g_i = -r(q\cos(\theta-\varphi)\cos\theta + (-1)^i (p-p_i)\sin\varphi)\end{gathered} \tag{1.8}$$

Условие (1.7) должно быть выполнено на отрезках характеристик hb и fd, условия (1.8) — в точках b $(i=1)$ и d $(i=2)$.

Полученных условий (1.7) и (1.8) с учетом уравнений характеристик (1.6) и условий совместности

$$dp \pm q d\theta = 0 \tag{1.9}$$

которые справедливы на характеристиках первого (hb) и второго (fd) семейств, достаточно для построения оптимального сопла.

Заметим, что все полученные выше условия, так же как и условия совместности (1.9), справедливы как для безвихревых, так и для вихревых течений. Если течение безвихревое, то уравнение (1.9) интегрируется и принимает вид

$$\theta \mp h(M) = \text{const}, \quad h(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{w} dw$$

В безвихревом случае условие оптимальности (1.7) с использованием условий совместности (1.9) и уравнений характеристик (1.6) позволит получить еще одно условие оптимальности

$$rw \sin(\varphi-\theta\pm\alpha) / \cos\alpha = \text{const} \tag{1.10}$$

Постановка данной задачи в полярных координатах и выбор в качестве управления функции $\varphi(\psi)$ на dtb (фиг. 1) оказались удачными. Конечно, в качестве управления можно взять $r(\psi)$, можно использовать и декартовы координаты, но в этих случаях требуются гораздо более сложные выкладки.

Рассмотрим один предельный случай. Пусть точка c удаляется на бесконечность вдоль прямой, проходящей через точку 0, и угол, составляемый отрезком $c0$ с осью x равен $\beta=\text{const}$. Из общих соображений ясно, что сопло максимального момента при этом переходит одновременно в сопло, реализующее максимальную силу в направлении, перпендикулярном отрезку $c0$. Это же видно из условий оптимальности. Так, (1.7) переходит в следующее условие для hb и fd:

$$q\cos^2(\theta-\beta) = \text{const} \tag{1.11}$$

Условие (1.11) можно получить из условий оптимальности, выведенных ранее в [3]. При $\beta=\pi/2$ (1.11) переходит в известное условие максимума тяги [1, 2] $q\sin^2\theta=\text{const}$. То же можно сказать и про дополнительный интеграл, отвечающий безвихревому случаю. Так, при $\beta=\pi/2$ (1.10) переходит в равенство $w\cos(\theta\mp\alpha)/\cos\alpha=\text{const}$ [1, 2].

При построении оптимального сопла необходимо так подобрать интенсивности начальных вееров разрежения gah и $g0f$ (см. фигуру) и положения точек h и f на характеристиках an и $0m$, чтобы в концевых точках b и d характеристик hb и fd, построенных с использованием соотношений (1.6), (1.7) и (1.9), были выполнены по два граничных условия. Эти условия связаны с габаритными ограничениями и условиями оптимальности (1.8). Пусть, например, в точке b $x_b \leqslant x^\circ$, $y_b \leqslant y^\circ$. Тогда возможны три варианта условий для точки b. Это либо $x_b = x^\circ$, $y_b = y^\circ$ (если $f_1 \geqslant 0$, $g_1 \geqslant 0$); либо $x_b = x^\circ$, $g_1 = 0$ (если $y_b < y^\circ$, $f_1 \geqslant 0$); либо $y_b = y^\circ$, $f_1 = 0$ (если $x_b < x^\circ$, $g_1 \geqslant 0$). Последний случай может иметь место, если точка c находится существенно правее оси y. Если концевая точка верхнего контура задана жестко и y° достаточно велико, то может иметь место решение с торцом bb°, при этом в точке b $g_1 = 0$. Аналогично рассматриваются условия и для точки d. Затем по известным характеристикам hb и fd решаются задачи Гурса для областей ahb и $0fd$ и находятся контуры ab и $0d$.

Надо отметить, что, так же как и в соплах максимальной тяги при заданной подъемной силе [3], при некоторых габаритных ограничениях реализуется более сложная картина течения, требующая привлечения общего метода множителей Лагранжа [1]. Указанные случаи аналогичны рассмотренным в [3].

2. Рассмотрим задачу о построении несимметричного сопла, реализующего максимальный момент m_c относительно точки c (см. фигуру) при заданных величинах тяги $\chi_x = X$ и подъемной силы $\chi_y = Y$. Здесь χ_x (χ_y) является горизонтальной (вертикальной) составляющей интеграла сил давления по обоим контурам.

Данная задача является изопериметрической и сводится к поиску экстремума вспомогательного функционала

$$I = m_c + \lambda\chi_x + \gamma\chi_y + \int\limits_b^d \mu(\psi) L d\psi - \lambda X - \gamma Y \qquad (2.1)$$

где λ и γ — постоянные, а $\mu(\psi)$ — переменный множители Лагранжа, L дается соотношением (1.2).

При допустимом варьировании $m_c = I$. Данная задача может быть решена стандартным способом, т. е. приравниванием нулю вариации функционала I (после записи m_c, χ_x и χ_y через интегралы по db и функции точек b и d по аналогии с выражением (1.1)) и получением в конечном итоге необходимых условий экстремума. Но, как оказывается, можно воспользоваться решенной выше задачей о построении сопла максимального момента. Для этого заметим, используя известный факт из теоретической механики, что момент m_q, создаваемый соплом относительно точки q с координатами $x_q = x_c - \gamma$, $y_q = y_c - \lambda$, равен

$$m_q = m_c + \lambda\chi_x + \gamma\chi_y$$

Поэтому, учитывая, что два последних слагаемых в (2.1) постоянны, (2.1) можно переписать в виде

$$I = m_q + \int\limits_d^b \mu(\psi) L d\psi \qquad (2.2)$$

Следовательно, сформулированная изопериметрическая задача сводится к задаче о построении сопла максимального момента относительно вспомогательной точки q. Одновременно становится ясным геометрический смысл множителей Лагранжа λ и γ: они характеризуют смещение вспомогательной точки q относительно исходной точки c.

По аналогии с полярными координатами r, φ, связанными с точкой c, введем полярные координаты s, ω, связанные с точкой q. Тогда полученные выше условия оптимальности (1.7), (1.8) для характеристик hb и fd

и точек b и d переносятся на изопериметрическую задачу, с той лишь разницей, что в (1.7) и (1.8) вместо r и φ берутся s и ω.

Чтобы переписать эти условия в исходных координатах r и φ, выпишем вспомогательные выражения, получаемые с помощью простых геометрических вычислений

$$\Phi_1 \equiv s\cos(\theta-\omega) = r\cos(\theta-\varphi)+\gamma\cos\theta+\lambda\sin\theta$$

$$\Phi_2 \equiv s\cos\omega = r\cos\varphi+\gamma, \qquad \Phi_3 \equiv s\sin\omega = r\sin\varphi+\lambda$$

Именно в таких сочетаниях s и ω войдут в условия оптимальности, как это видно из (1.7) и (1.8), при условии, что r заменено на s, а φ на ω.

Итак, условия оптимальности для изопериметрической задачи в исходных координатах r и φ, связанных с точкой c, имеют вид

$$\Phi_1^2 q = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\delta I_i = (\Phi_1 q\sin\theta-(-1)^i\Phi_2(p-p_i))\Delta x-\\ -(\Phi_1 q\cos\theta+(-1)^i\Phi_3(p-p_i))\Delta y\end{aligned} \tag{2.4}$$

Условие (2.3) должно выполняться на характеристиках hb и fd, а условие (2.4) — в точках b и d (при $i=1$, 2 соответственно).

И наконец, множители λ и γ должны быть выбраны так, чтобы выполнились два изопериметрических условия: $\chi_x = X$ и $\chi_y = Y$.

Очевидно, к решению рассмотренной задачи сводится и решение задачи о построении сопла максимальной тяги при заданной подъемной силе (или наоборот) и при заданном моменте относительно некоторой точки c. И, как оказывается, к решению задачи о построении сопла максимального момента m_t относительно некоторой точки t сводится задача о максимуме момента m_c относительно точки c при заданном моменте m_q относительно точки q. Действительно, в этом случае задача состоит в построении сопла, реализующего максимум величины $m^\circ = m_c + km_q$, где k — постоянный множитель Лагранжа. Используя вычисления, применявшиеся выше, можно показать, что $m^\circ = (1+k)m_t$ и что точка t лежит на прямой, проходящей через точки c и q, и координаты ее таковы

$$x_t = x_c - (x_c - x_q)\frac{k}{1+k}, \quad y_t = y_c - (y_c - y_q)\frac{k}{1+k}$$

Автор благодарит А. Н. Крайко за полезные обсуждения и оценку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
3. *Рылов А. И.* О построении компактных несимметричных сопл максимальной тяги при заданной подъемной силе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 132–136.

Новосибирск

Поступила в редакцию 25.III.1983