

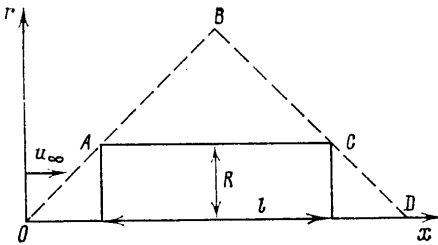
УДК 533.6.011.5

О ПРОПУЛЬСИВНОМ К.П.Д. ВИБРИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

УСТИНОВ М. В.

В работе [1] найден максимальный к.п.д. вибрирующего крыла бесконечного размаха в сверхзвуковом потоке. В настоящей статье метод, разработанный в [1], применен для решения задачи о максимальном к.п.д. цилиндра с вибрирующей внешней или внутренней поверхностью.

1. Рассмотрим обтекание цилиндра длины l и радиуса R равномерным сверхзвуковым потоком с числом Маха M , скоростью U , плотностью ρ и скоростью звука a . Пусть внешняя поверхность цилиндра меняет свою форму периодически по времени с периодом T так, что цилиндр все время остается осесимметричным телом. Внутри цилиндра находится канал с неподвижными стенками или цилиндр является частью бесконечного тела. Задача рассматривается в рамках линейной теории и течение газа считается потенциальным.



Фиг. 1

Взяв за контрольную поверхность поверхность характеристических конусов AB и BC (см. фиг. 1) и перейдя к характеристическим переменным μ, ν , получим выражения для средней силы сопротивления и мощности, подводимой к телу (см. [1])

$$\langle X \rangle = \frac{\pi \rho}{T} \int_0^T dt \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 - \frac{1}{4a^2 \beta^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] (b - \mu) d\mu \quad (1.1)$$

$$\langle N \rangle = \frac{\pi \rho}{T} \int_0^T dt \int_0^l \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (b - \mu) d\mu + \frac{\pi \rho U}{2\beta^2 a^2 T} \int_0^T dt \int_0^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 (b - \mu) d\mu$$

$$\mu = x - \beta r; \quad \nu = x + \beta r$$

Вводя безразмерные переменные, получим выражения для C_x и C_N

$$C_x = 2 \int_0^1 dt' \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \mu'} \right)^2 - B \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \right)^2 \right] (\varepsilon - \mu') d\mu' \quad (1.2)$$

$$C_N = \frac{2l}{UT} \int_0^1 dt' \int_0^1 \left[C \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\partial \varphi'}{\partial \mu'} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \right] (\varepsilon - \mu') d\mu' \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\mu}{l}; \quad t' = \frac{t}{T}; \quad \varphi' = \frac{\varphi}{Ul}; \quad C_x = \frac{2\langle X \rangle}{\rho U^2 \pi l^2}; \quad C_N = \frac{2\langle N \rangle}{\rho U^3 \pi l^2} \\ C &= \frac{Ml}{2\beta^2 a T}; \quad B = \frac{l^2}{4a^2 \beta^2 T^2}; \quad \varepsilon = 1 + 2\beta \frac{R}{l} \end{aligned}$$

В дальнейшем штрих над безразмерными переменными опускаем. Представив потенциал в виде ряда Фурье по времени, получим

$$\begin{aligned} \varphi &= A_0(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(\mu) \sin 2\pi n t + B_n(\mu) \cos 2\pi n t) \\ C_x &= C_x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_x(n); \quad C_N = \sum_{n=1}^{\infty} C_N(n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$C_x(n) = \int_0^1 [A_n''^2 + B_n''^2 - 4\pi^2 D^2 (A_n^2 + B_n^2)] (\varepsilon - \mu) d\mu$$

$$C_N(n) = 4 \int_0^1 \left[2\pi^2 D^2 (A_n^2 + B_n^2) + \frac{\pi\beta}{M} D (A_n B_n' - B_n A_n') \right] (\varepsilon - \mu) d\mu$$

$$D = n\sqrt{B}$$

В выражении для C_x член $C_x(0)$ описывает сопротивление тела постоянной формы и поэтому в дальнейшем учитываться не будет.

Рассмотрим задачу о нахождении минимума $C_N(n)$ при заданном отрицательном $C_x(n)$. Так как на переднем характеристическом конусе $\varphi = 0$, то получаем краевые условия $A_n(0) = B_n(0) = 0$.

2. Сделаем замену $A_n(\mu) = R(\mu) \cos \theta(\mu)$; $B_n(\mu) = R(\mu) \sin \theta(\mu)$, при этом выражение для C_x и C_N и краевые условия примут вид

$$C_x(n) = \int_0^1 [R'^2 + R^2(\theta'^2 - 4\pi^2 D^2)] (\varepsilon - \mu) d\mu \quad (2.1)$$

$$C_N(n) = 4 \int_0^1 R^2 \left[2\pi^2 D^2 + \frac{\pi\beta}{M} D \theta' \right] (\varepsilon - \mu) d\mu \quad (2.2)$$

$$R(0) = 0$$

Уравнения Эйлера и граничные условия для задачи (2.1), (2.2) будут

$$8\pi^2 D^2 (2 + \lambda) R + \frac{8\pi\beta}{M} D R \theta' - 2\lambda \theta'^2 R + 2\lambda R'' - \frac{2\lambda R'}{\varepsilon - \mu} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{8\pi\beta}{M} D R R' - 2\lambda R^2 \theta'' - 4\lambda \theta' R R' - \frac{4\pi\beta}{M} D \frac{R^2}{\varepsilon - \mu} + \frac{2\lambda R^2 \theta'}{\varepsilon - \mu} = 0 \quad (2.4)$$

$$R'(1) = 0; \quad R(0) = 0; \quad \theta'(1) = \frac{2\pi\beta D}{\lambda M} \quad (2.5)$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. Разделив (2.4) на R и обозначая $\ln R = y$, получим

$$\left(2y' - \frac{1}{\varepsilon - \mu} \right) \left(\frac{4\pi\beta D}{M} - 2\lambda \theta' \right) - 2\lambda \theta'' = 0$$

Предположив, что $4\pi\beta D/(M\lambda) - 2\theta' \neq 0$, получим первый интеграл системы (2.3), (2.4)

$$R = \frac{C_1}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)(2\pi\beta D/(M\lambda) - \theta')}}.$$

Условие $R(0) = 0$ приводит к $R \equiv 0$, но в этом случае $C_x(n)$ и $C_N(n)$ равны нулю. Нетривиальное решение системы (2.3), (2.4) получается, если $\theta' = 2\pi\beta D/(\lambda M)$. Подставляя это значение θ' в (2.3), получим для R следующее уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + R = 0; \quad R = R(z); \quad z = 2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2}} (\varepsilon - \mu)$$

Его решение имеет вид

$$R = C_1 J_0 \left(2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2}} (\varepsilon - \mu) \right) + C_2 Y_0 \left(2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2}} (\varepsilon - \mu) \right) \quad (2.6)$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя решение (2.6) в краевые условия (2.5), получим систему двух линейных однородных уравнений для нахождения C_1 и C_2 . Приравнявая ее определитель нулю, получим уравнение для определения λ

$$J_0(l\varepsilon) Y_1(l(\varepsilon - 1)) - J_1(l(\varepsilon - 1)) Y_0(l\varepsilon) = 0 \quad (2.7)$$

$$l = 2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2}} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) имеет бесконечное множество корней, которые обозначим l_n . Выражая λ из (2.8), получим

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \beta^2(1 - \chi^2)/M^2}}{1 - \chi^2}; \quad \chi = \frac{l_n}{2\pi D}$$

В этой задаче можно найти максимальный к.п.д., не вычисляя C_1 и C_2 . Для этого преобразуем выражение для $C_x(n)$ (2.1), проинтегрировав член с R'^2 по частям и подставив R'' и R' , выраженные из (2.3). В результате получим

$$C_x = \frac{1}{\lambda} C_N; \quad \eta = -\frac{C_x}{C_N} = -\frac{1}{\lambda} \quad (2.9)$$

Из условия отрицательности сопротивления найдем, что создание тяги возможно только при $\chi < 1$ и $\lambda = \lambda_-$. При этом максимальный к.п.д. равен

$$\eta_{\max} = \frac{M^2}{\beta^2} - \frac{M}{\beta^2} \sqrt{1 + \beta^2 \chi^2} \quad (2.10)$$

Это выражение отличается от соответствующей формулы для пластинки только коэффициентом при $1/D$ в выражении для χ .

Для плоской пластинки $\chi = (1 + 2m)/(4D)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, а для цилиндра $\chi = l_n/(2\pi D)$. Как и для пластинки, по мере увеличения частоты колебаний ($D \rightarrow \infty$) к.п.д. стремится к максимальному значению $M/(M+1)$. Поскольку к.п.д. растет монотонно с ростом частоты, то в рядах (1.4) целесообразно оставить только члены с наибольшей частотой (наибольшим D). При этом полный к.п.д. будет определяться формулой (2.10).

3. Сложность выражения для R (2.6) и необходимость находить корни трансцендентного уравнения (2.7) не позволяют получить явный вид

потенциала на заднем характеристическом конусе. Для избежания этих трудностей найдем приближенное решение задачи. Предположим, что ε такой, что $l(\varepsilon-1) \gg 1$. Тогда, используя асимптотику функций Бесселя на бесконечности

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

из уравнения (2.7) получим $l = \pi(l/2 + m)$. Так как при $l = \pi/2$ к.п.д. максимален при заданной частоте D , будем рассматривать только $l = \pi/2$. Находя C_1 и C_2 из граничных условий и подставляя их в (2.6), получим

$$R = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \mu}} \sin \frac{\pi}{2} \mu \quad (3.1)$$

Далее можно, выразив λ из (2.8) и подставив ее в формулу для к.п.д. (2.9), получить решение задачи. Однако такое решение будет близко к точному только при $\pi(\varepsilon-1)/2 \gg 1$. Реально оно годится при $\varepsilon \geq 10$. Для получения решения, верного при меньших ε , поступим следующим образом. Подставив в (2.1) и (2.2) R из (3.1), найдем $\theta(\mu)$, дающее максимальный к.п.д., т. е. решим следующую вариационную задачу о минимуме C_N при заданном C_x :

$$C_x = c^2 K_0 + c^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2} \mu (\theta'^2 - 4\pi^2 D^2) d\mu$$

$$C_N = 4c^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2} \mu \left(2\pi^2 D^2 + \frac{\pi\beta}{M} D\theta' \right) d\mu$$

$$K_0 = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^1 \left(\frac{\sin^2(\pi\mu/2)}{4(\varepsilon - \mu)} + \frac{\pi}{4} \frac{\sin \pi\mu}{(\varepsilon - \mu)} \right) d\mu$$

Уравнение Эйлера этой задачи и краевое условие имеют вид

$$-\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \mu \theta'' - \pi \theta' + \frac{2\pi^2 \beta}{\lambda M} D = 0; \quad \theta'(1) = \frac{2\pi\beta D}{\lambda M}$$

Его решение $\theta' = 2\pi\beta D / (\lambda M)$. Подставляя это в уравнение Эйлера и выражая λ , получим

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\beta}{M} \frac{1}{\sqrt{k - \chi^2 + 1}}; \quad k = \frac{C_x}{2\pi^2 c^2 D^2}; \quad \chi^2 = \frac{K_0}{2\pi^2 D^2}$$

Подставляя θ' и λ в формулы для C_x и C_N , получим

$$\eta = -\frac{C_x}{C_N} = -\frac{k/2}{1 \pm \beta \sqrt{k - \chi^2 + 1}/M}$$

Из условия $C_x < 0$ найдем, что создание тяги возможно только при $\chi < 1$. Максимум η как функции k при заданном χ достигается при

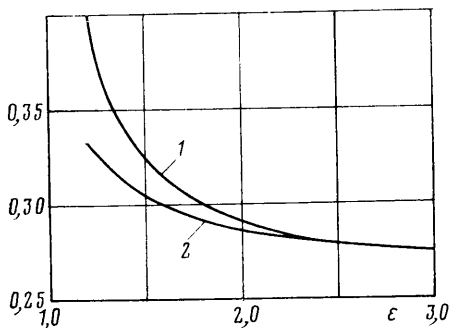
$$k = \frac{2(\beta^2 \chi^2 + 1) - 2M\sqrt{1 - \beta^2 \chi^2}}{\beta^2}$$

Выражая отсюда c , получим $c = \sqrt{C_x / (kK_0)}$. Зная c , можно легко найти значение потенциала на заднем характеристическом конусе.

Выражения для к.п.д. в точном и приближенном решениях различаются только коэффициентом при $1/D$ в выражении для χ . Сравнив эти

коэффициенты, можно оценить точность приближенного решения. На фиг. 2 цифрой 1 обозначен график зависимости $l_0/(2\pi)$ от ϵ (точное решение), 2 — график $\sqrt{K_0}/2/\pi$ (приближенное решение). Из этих графиков видно, что при $\epsilon > 2$ к.п.д. в точном и приближенном решениях практически совпадают.

4. Рассмотрим теперь задачу об обтекании цилиндра, внешние стенки которого неподвижны, а внутренние периодически по времени деформируются так, что внутренний канал все время остается осесимметричным.



Фиг. 2

Решение этой задачи во многом аналогично решению внешней задачи, рассмотренному в пунктах 1 и 2, поэтому здесь остановимся только на некоторых особенностях внутренней задачи. Принимая за контрольную поверхность S характеристические конусы OA и CD (см. фиг. 1), переходя к характеристическим координатам $\mu = x - l - \beta r$, $\nu = x + \beta r$ и используя обозначения п. 1, получим выражения для $\langle X \rangle$ и $\langle N \rangle$, отличающиеся от (1.1) только тем, что в них вместо l стоит $2\beta R$. Для C_x и C_N получаются формулы, полностью идентичные (1.2), (1.3) при $\epsilon = 1$. При этом определение безразмерных параметров несколько отличается от п. 1, а именно

идентичные (1.2), (1.3) при $\epsilon = 1$. При этом определение безразмерных параметров несколько отличается от п. 1, а именно

$$C_x = \frac{\langle X \rangle}{2\pi\beta^2 R^2 \rho U^2}; \quad C_N = \frac{\langle N \rangle}{2\pi\beta^2 R^2 \rho U^3}; \quad D = \frac{nR}{aT}$$

Внутренняя задача отличается от внешней также отсутствием условия $R(0) = 0$. Это вызвано тем, что передний и задний характеристические конусы здесь не пересекаются.

Уравнениями Эйлера для задачи о нахождении минимума C_N при заданном C_x будут (2.3), (2.4) с граничными условиями

$$\theta'(1) = \frac{2\pi\beta D}{\lambda M}; \quad R'(0) = 0$$

Их нетривиальное решение имеет вид

$$R = C_1 J_0 \left(2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2} (1-\mu)} \right) + \\ + C_2 Y_0 \left(2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2} (1-\mu)} \right)$$

Если в этом выражении $C_2 \neq 0$, то C_x получается бесконечным. Значит, физический смысл имеет только решение с $C_2 = 0$

$$R = C J_0 \left(2\pi D \sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2 M^2} (1-\mu)} \right)$$

Подставив его в граничное условие $R'(0) = 0$, получим уравнение для λ

$$\sqrt{\frac{2+\lambda}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda^2 M^2}} = \frac{\mu_m}{2\pi D} = \chi \quad (4.1)$$

где μ_m — m -й корень уравнения $J_1(\mu) = 0$. Для к.п.д. получается выражение (2.10), только χ определяется формулой (4.1).

Таким образом, показано, что в случаях внешнего и внутреннего обтекания колеблющегося цилиндра к.п.д., как и к.п.д. вибрирующей пластинки, выражается формулой (2.10). Можно предполагать, что для любого колеблющегося тела при $M > 1$ к.п.д. имеет вид (2.10) с каким-то коэффициентом при $1/D$ в выражении для χ . В [2] получено, что максимальный к.п.д. колеблющихся тел при $M < 1$ равен $M/(M+1)$ и максимум достигается при $D \rightarrow \infty$. Такая же ситуация имеет место при $M > 1$. Значит, можно предполагать, что для любых симметрично колеблющихся тел $\eta_{\max} = M/(M+1)$ как при дозвуковой, так и при сверхзвуковой скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н., Устинов М. В. О пропульсивном к.п.д. вибрирующего крыла в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 132–139.
2. Коган М. Н., Устинов М. В. О пропульсивном к.п.д. вибрирующих тел в дозвуковом потоке газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 128–132.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1983