

УДК 532.59+537.84

ОБ УЕДИНЕННЫХ ВОЛНАХ И ВОЛНАХ СТОКСА НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОЛБА НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

БАШТОВОЙ В. Г., ФОЙГЕЛЬ Р. А.

Появление намагничивающихся жидкостей открыло интересные возможности для экспериментального моделирования нелинейных волновых процессов на поверхности неподвижных цилиндрических слоев жидкости, например в условиях гидроневесомости, когда жидкость располагается цилиндрическим слоем вокруг проводника с током. Процессы распада таких слоев изучались теоретически и экспериментально в работах [1–3].

Нелинейные уединенные волны типа горбов на поверхности цилиндрического столба жидкости, стабилизированного неоднородным магнитным полем проводника с током, были исследованы на основе уравнения Кортевега — Де Вриза [4]. Подобные явления рассматривались также на осесимметричных струях обычной жидкости, но в силу неустойчивости последних эти исследования имели чисто теоретическое значение [5].

В настоящей работе получены уравнения, отличные от уравнения Кортевега — Де Вриза, описывающие уединенные магнитокапиллярные волны на поверхности цилиндрического столба намагничивающейся жидкости типа горбов и впадин, форма и скорость движения которых зависят от магнитного числа Бонда Bo_m . Показано существование критической скорости нелинейных волн (магнитного числа Fr_m), совпадающей с предельной скоростью линейных магнитокапиллярных волн на поверхности цилиндрического столба намагничивающейся жидкости [2]. Исследовано влияние непостоянства магнитной силы на уединенные волны и предельные волны Стокса на плоском слое жидкости. Рассмотрение проводится приближенным методом квазиконформных отображений узких полос М. А. Лаврентьева [6].

1. Пусть на поверхности цилиндрического столба намагничивающейся жидкости в магнитном поле линейного проводника с током распространяются прогрессивные безвихревые осесимметричные волны. Ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) совпадает с осью столба жидкости.

Магнитное поле проводника с током, обеспечивающее при определенных условиях устойчивость цилиндрической свободной поверхности намагничивающейся жидкости [2, 3], из-за сохранения осевой симметрии задачи касательно к свободной поверхности, что исключает магнитный скачок давления и возмущения поля в ней. Жидкость считается изотермической, невязкой, неэлектропроводной, для намагниченности принимается линейный закон $M = \chi H$ ($\chi = \text{const}$), сила тяжести полагается отсутствующей.

Математическая постановка задачи представлена в [3, 4]. Задача определения установившихся волн на поверхности цилиндрического столба намагничивающейся жидкости сводится к следующей [6]: построить все кривые $r = \xi(z)$ — сечения свободной поверхности плоскостью (r, z) , такие, что квазиконформные отображения $W(w)$ области $0 < r < \xi(z)$ на полюсу $0 < r^0 < q$ заданной ширины q в каждой точке $\xi(z)$ удовлетворяют условию

$$\sigma(k_1 + k_2) + 1/2\rho |W'(w)|^2 - \psi = c, \quad \psi = \mu_0 \chi I^2 / 8\pi^2 r^2 \quad (1.1)$$

Соотношение (1.1) выражает требование постоянства давления на сво-

бодной поверхности жидкости в магнитном поле проводника с током I , создающем в жидкости радиальную объемную силу $F_m = d\psi/dr$ [3, 4].

Здесь ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ψ — потенциал магнитной силы, k_1, k_2 — кривизны главных нормальных сечений поверхности $r = \xi$. Разыскиваются периодические четные кривые $\xi(z)$, мало отличающиеся от прямой $r = R$, где R — радиус столба жидкости в некоторой точке, положение которой будет определено ниже.

Если для определения кривизны возмущенной поверхности столба использовать выражение, справедливое в линейном приближении ([7, с. 109])

$$k_1 + k_2 = -[(k_1^\circ)^2 + (k_2^\circ)^2](\xi - R) - \Delta(\xi - R)$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на поверхности $r = R$, k_1°, k_2° — кривизны главных нормальных сечений этой поверхности, то условие (1.1) запишется в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} |W_1'(w_1)|^2 - \frac{v}{\xi_1^2} + 2\delta(1 - \xi_1 - \xi_1'') &= c \\ w_1 = \frac{w}{R}, \quad W_1 = \frac{WR}{2q}, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{R}, \quad z_1 = \frac{z}{R} & \quad (1.2) \\ \delta = \frac{\sigma}{\rho R v^2}, \quad v = \frac{\mu_0 \chi I^2}{4\pi^2 \rho v^2}, \quad v = \frac{2q}{R^2} & \end{aligned}$$

где c — произвольная постоянная, штрих означает дифференцирование по координате z_1 , v — скорость волн.

Выражение для модуля граничной производной отображающей функции $W_1(w_1)$ представим в виде [6]

$$|W_1'(w_1)| = \frac{1}{\xi_1^2} \left(1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_1'' \right) + O(\gamma^{3/2}) \quad (1.3)$$

где γ — малый параметр задачи, определение которого будет дано ниже. Представление модуля граничной производной на кривой $r_1 = \xi_1$ в виде (1.3) связано с некоторыми априорными оценками производных функции $r_1 = \xi_1(z_1)$, предложенными М. А. Лаврентьевым и справедливыми для длинных волн в идеальной жидкости: $\xi_1' = O(\gamma^{3/2})$, $\xi_1'' = O(\gamma^2)$, $\xi_1''' = O(\gamma^{3/2})$.

С учетом этих оценок и выражения (1.3) условие (1.2) с точностью до малых порядка $O(\gamma^{3/2})$ принимает вид

$$\frac{1}{\xi_1^4} (1 + \xi_1 \xi_1'') - \frac{v}{\xi_1^2} + 2\delta(1 - \xi_1 - \xi_1'') = c \quad (1.4)$$

Дальнейшие вычисления можно значительно упростить, положив $\xi_1 = 1 + \eta$ и удержав в условии (1.4) несколько первых членов разложений. Качественная картина явления при этом не изменится [5]. С точностью до членов порядка $O(\eta^2)$ выражение (1.4) дает

$$\begin{aligned} \eta'' + 3\alpha\eta + \frac{1}{2}\beta\eta^2 &= 0 \\ \alpha = \frac{2}{3} \frac{1 - \text{Bo}_m^{-1} - 2 \text{Fr}_m}{\text{Fr}_m - 2 \text{Bo}_m^{-1}}, \quad \text{Bo}_m = \frac{\mu_0 \chi I^2}{4\pi^2 R \sigma} & \quad (1.5) \\ \beta = \frac{2}{9} \frac{3 - 6 \text{Bo}_m^{-1} - 2 \text{Fr}_m}{\text{Fr}_m - 2 \text{Bo}_m^{-1}}, \quad \text{Fr}_m = \frac{4\pi^2 R^2 \rho U^2}{\mu_0 \chi I^2} & \end{aligned}$$

где отношение α/β и есть малый параметр γ — амплитуда волны, Bo_m — магнитное число Бонда, Fr_m — магнитное число Фруда. Значение числа Бонда $\text{Bo}_m = 2\text{Fr}_m^{-1}$ является бифуркационным.

До сих пор скорость волны (расход потока) фигурировала в качестве

задаваемого параметра волны. Удобнее, однако, задавать число Bo_m и амплитуду γ , используя определение параметра γ для установления зависимости скорости волны (числа Fr_m) от ее амплитуды и магнитного числа Бонда.

Уравнение длинных волн (1.5) отличается от своего классического аналога с ([8, с. 400]) переопределением параметра α и наличием множителя β при η^2 . Уравнение (1.5) допускает, очевидно, первый интеграл

$$(\eta')^2 = 3\beta\eta_0^2(\gamma + \eta_0) - 3\alpha\eta^2 - 3\beta\eta^3 \quad (1.6)$$

Постоянная определена из условия: в точке $z_1=0$ $\eta(0)=\eta_0$. Для существования периодических решений уравнения (1.5) необходимо, чтобы нашлось такое значение $\eta=\eta_1$, модуль которого меньше модуля η_0 и для которого $d\eta/dz_1=0$. В силу уравнения (1.6) это требование приводит к условию $D=(\gamma+\eta_0)(\gamma-3\eta_0) \geq 0$, где D — дискриминант квадратного уравнения

$$\eta^2 + \eta(\gamma + \eta_0) + \eta_0(\gamma + \eta_0) = 0 \quad (1.7)$$

Случай равенства дискриминанта нулю соответствует уединенной волне, в этом случае уравнение (1.6) упрощается

$$\eta' = (\eta_1 - \eta) \sqrt{3\beta(\eta_0 - \eta)} \quad (1.8)$$

где η_1 — кратный корень уравнения (1.7), и его решения выражаются в элементарных функциях. При фиксированной амплитуде волны γ эти решения имеют вид

$$\eta = \gamma [\text{sign } \alpha \text{sech}^2 ({}^{1/2}z_1 \sqrt{3|\alpha|}) - {}^{1/3}(1 - \text{sign } \alpha)] \quad (1.9)$$

2. Решение уравнения (1.9) при $\alpha > 0$ соответствует уединенной волне типа горба, ордината которого $\eta_0 = \gamma/3$, а горизонтальная асимптота $\eta_1 = -2\gamma/3$. Условие $\alpha > 0$ ограничивает область допустимых значений магнитного числа Bo_m :

$$1 \leq Bo_m < 2,5, \quad Bo_m > 5(3-2\gamma)/3(1-\gamma) \quad (2.1)$$

Зависимость скорости волны (числа Fr_m) от ее амплитуды γ и числа Bo_m имеет вид

$$Fr_m = \frac{3}{2} \frac{1-\gamma-(1-2\gamma)Bo_m^{-1}}{3-\gamma} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что при значениях числа Bo_m из первого интервала (2.1) скорость волны уменьшается с уменьшением ее амплитуды и при $\gamma=0$ становится равной предельной скорости линейных магнитокапиллярных волн $Fr_{m*} = {}^{1/2}(1-Bo_m^{-1})$ [2], а при значениях числа Bo_m из второго интервала (2.1) скорость волны увеличивается с уменьшением амплитуды и при $\gamma=0$ $Fr_m = Fr_{m*}$. Таким образом, в первом случае скорость уединенной волны больше скорости линейных волн: $Fr_m > Fr_{m*}$ (сверхкритический поток), а во втором меньше: $Fr_m < Fr_{m*}$ (докритический поток). Число Fr_{m*} естественно назвать критической скоростью потока, классическим аналогом которой является гравитационное число Фруда $Fr_* = c^2/gh = 1$.

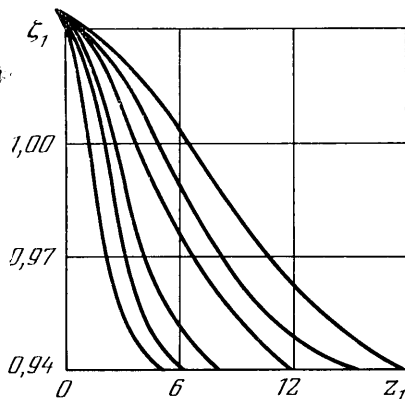
Решение уравнения (1.9) при $\alpha < 0$ соответствует уединенной волне типа впадины, ордината которой $\eta_0 = -\gamma$, а горизонтальная асимптота $\eta_1 = 0$. Чтобы выполнялось условие $\alpha < 0$, необходимо, чтобы число Bo_m принадлежало интервалу

$$2,5 < Bo_m < 5(3-2\gamma)/3(1-\gamma) \quad (2.3)$$

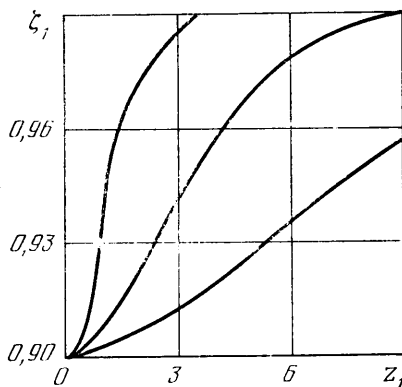
что соответствует докритическому потоку $Fr_m < Fr_{m*}$.

Значения числа Бонда Bo_m на границах интервалов (2.1) и (2.3) являются бифуркационными: при $Bo_m = 2,5$ и $5(3-2\gamma)/2(1-\gamma)$ решений, отвечающих установившимся волнам на поверхности столба намагничивающейся жидкости, нет.

На фиг. 1 и 2 изображены формы свободной поверхности столба жидкости $\xi_1=1+\eta$ для различных значений числа Bo_m , рассчитанные по формуле (1.9) при фиксированной амплитуде волн $\gamma=0,1$ (на фиг. 1 кривым 1–6 соответствуют значения числа $Bo_m=1,0; 1,5; 2,0; 7,2; 9,2; \infty$; на фиг. 2 кривым 1–3 соответствуют числа $Bo_m=3,01; 4,01; 5,01$). Легко видеть, что для уединенных волн типа горбов характерный размер R есть



Фиг. 1



Фиг. 2

радиус столба жидкости в точке z_0 , для которой $\eta(z_0)=0$. Это так называемый средний радиус столба $\langle R \rangle$, определяемый выражением

$$\langle R \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \xi(z) dz$$

Для всех волн, профили которых показаны на фиг. 1 и 2, эта величина различна. Для уединенных волн типа впадин характерный размер R есть радиус столба жидкости на бесконечности.

На фиг. 1 заметно увеличение длины уединенных волн типа горбов (под длиной понимается расстояние между точками, в которых подъем поверхности жидкости равен 3% своего максимального значения [9]) и уменьшение кривизны волны на гребне при увеличении числа Bo_m . В случае уединенных волн типа впадин ситуация обратная (фиг. 2).

Характерной особенностью рассмотренных выше нелинейных волн является то, что действующая на жидкость радиальная магнитная сила $F_m = -d\psi/dr$ зависит от координат. Представляет интерес получить для описания нелинейных волн уравнение вида (1.5), в коэффициентах которого выделен параметр, характеризующий степень непостоянства магнитной силы, как это было сделано в [4] для уравнения Кортевега – Де Вриза. Это можно сделать, разложив потенциал магнитной силы ψ в ряд Тейлора в окрестности точки $r=R$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1(r-R) + \psi_2(r-R)^2 + \dots \quad (2.4)$$

где $\psi_k = \psi^{(k)}/k!$ – коэффициенты ряда, и повторив выкладки п. 1. При этом действительно получается уравнение вида (1.5), но с другим значением множителя $\beta = 2[3(1-Bo_m^{-1}) + F - Fr_m]/9(Fr_m - 2Bo_m^{-1})$. Здесь безразмерный параметр $F = \psi_2 R / \psi_1$ (для проводника с током $F = -3/2$) и есть параметр, связанный с непостоянством магнитной силы. Поскольку коэффициент α , входящий в выражении для определения формы уединенных волн (1.9), не изменится при таком представлении потенциала ψ , то при фиксированной амплитуде волн непостоянство магнитной силы не будет влиять на форму уединенных волн, но изменит скорость их распро-

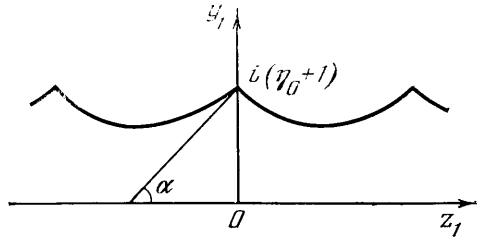
странения, определяемую выражением

$$\text{Fr}_m = \frac{3(1-\gamma)(1-\text{Bo}_m^{-1})-\gamma F}{6-\gamma} \quad (2.5)$$

Вычисления показывают, что скорость уединенных волн, определяемая выражением (2.2), строго меньше скорости, рассчитанной по формуле (2.5), при числах Bo_m из первого интервала (2.1), и больше нее при $\text{Bo}_m > 2,5$.

Непостоянство магнитной силы приводит к тому, что для предельных волн Стокса на плоском слое намагничивающейся жидкости полный угол при вершине волн может, равняться 120° [6], как и в обычной жидкости, так и 90° .

Рассматривается плоский слой намагничивающейся жидкости при тех же предположениях, что и в п. 1 (фиг. 3). Полагается, что потенциал магнитной силы есть некоторая убывающая функция $\psi(y)$, такая, что обеспечивается устойчивость свободной поверхности и отсутствие возмущений поля на ней. При этом математическая постановка задачи аналогична п. 1. Обезразмеривание проводится по некоторой характерной глубине h : $w = hw_1$, $W = qW_1$, $\zeta = h\zeta_1$, $z = hz_1$. Потенциал ψ представляется рядом Тейлора в окрестности точки $y = h$. Условие постоянства давления на свободной поверхности имеет вид (поверхностное натяжение не учитывается, так как оно не влияет на величину предельного угла)



Фиг. 3

на ней. При этом математическая постановка задачи аналогична п. 1. Обезразмеривание проводится по некоторой характерной глубине h : $w = hw_1$, $W = qW_1$, $\zeta = h\zeta_1$, $z = hz_1$. Потенциал ψ представляется рядом Тейлора в окрестности точки $y = h$. Условие постоянства давления на свободной поверхности имеет вид (поверхностное натяжение не учитывается, так как оно не влияет на величину предельного угла)

$$|W_1'(w_1)|^2 - 2\nu\eta - 2\nu F\eta^2 = c, \quad \nu = \frac{\psi_1 h}{\rho v^2}, \quad F = \frac{\psi_2 h}{\psi_1} \quad (2.6)$$

Величину угла на гребнях предельных волн можно найти, воспользовавшись условием (2.6) и свойствами конформных отображений. Если угол наклона касательной к волновой поверхности в точке $z_1 = 0$ равен α (полный угол на гребне равен $\pi - 2\alpha$), то уравнение поверхности намагничивающейся жидкости в окрестности этой точки представляется в виде

$$\eta = \eta_0 - |z_1| \text{tg } \alpha + bz_1^2 + o(z_1^2) \quad (2.7)$$

где b — положительный коэффициент, зависящий от отношения амплитуды волны к ее длине.

По свойству конформного отображения в угловых точках в окрестности точки $w_0 = i(\eta_0 + 1)$ отображающая функция $W_1(w_1)$ имеет разложение [6]

$$W_1 = a(w_1 - w_0)^\beta + o(|w_1 - w_0|^\beta), \quad \beta = (1 - 2\alpha/\pi)^{-1}, \quad 0 < \alpha < \pi/2 \quad (2.8)$$

где a — комплексная постоянная. Подставив выражения (2.7) и (2.8) в условие (2.6), можно получить

$$\frac{|a|^2 \beta^2}{\cos^2 \alpha} z_1^{2(\beta-1)} + 2\nu \text{tg } \alpha (1 + 2F\eta_0) |z_1| - 2\nu [b(1 + 2F\eta_0) + F \text{tg}^2 \alpha] z_1^2 = o(z_1^2)$$

Из последнего соотношения видно, что на поверхности плоского слоя жидкости могут существовать предельные волны Стокса с углом на гребнях как 120° (для этого коэффициент при z_1^2 должен быть малой величиной порядка $o(z_1^2)$), так и 90° (когда малой порядка $o(z_1^2)$ является коэффициент при $|z_1|$). Таким образом, непостоянство магнитной силы проявляется только во втором приближении по $|z_1|$.

В заключение следует отметить, что аналогично солитонным решениям

могут быть исследованы и периодические решения уравнения (1.5), соответствующие кноидальным волнам на поверхности цилиндрического столба намагничивающейся жидкости, предельным случаем которых и являются описанные уединенные волны. Не представляет также труда рассмотрение этих волн на поверхности плоского слоя жидкости.

Авторы выражают искреннюю благодарность И. Е. Тарапову и членам его семинара за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости.— ПМТФ, 1978, № 4, с. 147—153.
2. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость цилиндрической свободной поверхности намагничивающейся жидкости.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 4, с. 341—343.
3. Баштовой В. Г., Полевиков В. К. Нелинейный распад тонкого цилиндрического слоя жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 70—76.
4. Баштовой В. Г., Фойгель Р. А. Уединенные и кноидальные волны в намагничивающейся жидкости.— Магнитная гидродинамика, 1983, № 2, с. 55—60.
5. Моисеев Н. Н. О некоторых особенностях течения жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения.— ПММ, 1965, т. 29, № 6, с. 1015—1022.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
7. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976, 504 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973, 736 с.
9. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981, 598 с.

Минск,
Краснодар

Поступила в редакцию
10.II.1983