

УДК 532.592:612.13

**ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБКАХ  
ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА. ВЫНУЖДЕННЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ**

**КИРЕЕВА Е. Е., РЕГИРЕР С. А.**

Для малых кровеносных и лимфатических сосудов характерна способность стенки к изменению ее реологических свойств и просвета сосуда в результате активных сокращений кольцевых мышечных клеток, содержащихся в стенке [1-3]. Модель течения в сосудах, учитывающая эту особенность, была предложена в работах [4, 5], где приведен также линейный анализ устойчивости. Следствием активности стенки является существование автоколебательных режимов течения [6-8], обнаруживаемых и в численных решениях соответствующих задач [9, 10].

До настоящего времени были исследованы течения только при стационарных условиях на концах сосуда и в окружающей среде<sup>1</sup>. Стенка реального кровеносного сосуда подвержена различным воздействиям, часто имеющим периодический характер: пульсовым колебаниям давления на входе, ритмически меняющимся внешним силам, действующим со стороны окружающих тканей. Имеются данные о чувствительности сосудов к нестационарности воздействий [11-13], в частности о зависимости их гидравлического сопротивления от частоты и амплитуды воздействия. Неоднократно обсуждалась гипотеза о том, что сосуд за счет сокращений мышц в его стенке или сжатия внешними силами может выполнять роль бесклапанного насоса [14, 15]. Ниже в рамках квазиодномерного приближения [4] изучается движение жидкости по вязкоупругой трубке при внешних периодических воздействиях малой амплитуды. Построено общее решение задачи и приведены конкретные примеры, иллюстрирующие особенности вынужденных волновых движений в трубке с пассивными и активными свойствами.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости по деформируемой трубке длиной  $L$ , подверженной действию однородного внешнего давления  $p^e = p^e(t)$ . Предположим, что применимо квазиодномерное безынерционное приближение [4]; тогда давление  $p(x, t)$  внутри трубки и ее радиус  $R(x, t)$  связаны уравнением типа Рейнольдса и реологическим соотношением, постулируемым в виде [4]

$$R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{16\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p - p^e) + \Psi(p - p^e, R) = \Lambda \frac{\partial R}{\partial t} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Psi$  — функция, изображающая статическую характеристику трубки,  $\Lambda = \text{const}$  — мгновенная жесткость, прочие обозначения — общепринятые. Промежуточные обозначения соответствуют [4].

Пусть давления на концах трубки и вне ее представлены в виде

$$p^\pm = p|_{x=0,L} = \sum_{k=0} p_k^\pm(t) \varepsilon^k, \quad p^e = \sum_{k=0} p_k^e(t) \varepsilon^k \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Исключение составляют работы: Киреева Е. Е. Вынужденные колебания малой амплитуды в трубке с многократно-активной стенкой. — В кн.: Тез. докл. 3-й Всес. конф. по проблемам биомеханики. Т. 1. Рига, 1983, с. 218-219; Скобелева И. М. О следствиях пульсовых колебаний давления в малом кровеносном сосуде. — Там же, с. 234-235.

Предположим, что  $\varepsilon \ll 1$ ,  $p_0^+ = p_0^- = \text{const}$ ,  $p_0^e = \text{const}$  и что  $p_n^\pm(t)$ ,  $p_n^e(t)$  — разложимые в ряд Фурье периодические функции с общим периодом  $T = 2\pi/\omega$ . Таким образом, перепад давлений на концах трубки есть малая величина того же или меньшего порядка ( $\ll \varepsilon$ ), что и амплитуда колебаний давления.

В задаче (1.1)–(1.3) отыскиваются периодические по  $t$  решения с точностью до слагаемых, дающих в средний за период  $T$  расход  $\langle g \rangle$  главный вклад от колебаний  $p^\pm(t)$  или  $p^e(t)$ ; как правило, это слагаемые порядка не выше  $\varepsilon^2$ . Расход определяется по формулам

$$g(x, t) = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad g^\pm(t) = g(x, t) \Big|_{x=0, L}, \quad \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Последнее равенство непосредственно следует из уравнения (1.1). Здесь и далее угловые скобки означают осреднение за период.

Для сетей из трубок функции  $p^\pm(t)$  в узлах сети (кроме входных и выходных) подлежат определению из соотношений типа законов Кирхгофа. В силу нелинейности системы в узлах сети будут происходить колебания во всем спектре частот, кратных основной, а амплитуда окажется сложной функцией  $\varepsilon$ , даже если на входе в сеть задано простое синусоидальное колебание. Поэтому в (1.3) введена общая запись функций  $p^\pm(t)$ ,  $p^e(t)$ , фактически же основную роль играют слагаемые до порядка  $\varepsilon^2$  включительно.

2. Будем строить решение системы (1.1)–(1.3) в виде разложений

$$q \equiv p - p^e = \sum_{j=0} q_j \varepsilon^j, \quad R = \sum_{j=0} R_j \varepsilon^j, \quad g = \sum_{j=0} g_j \varepsilon^j \quad (2.1)$$

В нулевом приближении  $q_0 = q_0^+ = \text{const}$ ,  $R_0 = \text{const}$ ,  $g_0 = 0$ ,  $\Psi(q_0, R_0) = 0$ . В первом и последующих приближениях

$$\begin{aligned} R_0 \frac{\partial R_n}{\partial t} - \frac{R_0^4}{16\mu} \frac{\partial^2 q_n}{\partial x^2} &= Q_n, \quad \left(1 - \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) q_n - G \left(1 + \theta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{R_n}{R_0} = S_n \\ q_n(0, t) &= q_n^+(t), \quad q_n(L, t) = q_n^-(t) \\ g_n &= -\frac{\pi R_0^4}{8\mu} \frac{\partial q_n}{\partial x} - \frac{\pi R_0^3}{2\mu} R_1 \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - G_n \\ q_n &= p_n - p_n^e, \quad q_n^\pm = p_n^\pm - p_n^e \\ \lambda &= -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\right)^{-1}, \quad \theta = -\Lambda \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right)^{-1}, \quad G = -\frac{R_0 \lambda \Lambda}{\theta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Частные производные от  $\Psi$  вычисляются при  $q = q_0$ ,  $R = R_0$ . Функции  $Q_n$ ,  $S_n$ ,  $G_n$  — многочлены степени не выше  $n$  от  $R_m$ ,  $q_m$  и их производных с  $m < n$ . В частности,  $Q_1 = 0$ ,  $S_1 = 0$ ,  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = 0$ .

Формулы для среднего расхода следуют из (1.4), (2.3). В частности,

$$\begin{aligned} \langle g_1 \rangle &= \frac{1}{Z_0} (\langle q_1^+ \rangle - \langle q_1^- \rangle), \quad Z_0 = \left(\frac{\pi R_0^4}{8\mu L}\right)^{-1} \\ \langle g_2 \rangle &= \frac{1}{Z_0} (\langle q_2^+ \rangle - \langle q_2^- \rangle) - \frac{4}{Z_0 R_0} \int_0^L \left\langle R_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \right\rangle dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, определение  $\langle g_2 \rangle$  сведено к вычислению интеграла, зависящего от решения системы первого приближения. При расчете сетей, когда не все  $q_n^\pm$  заданы заранее, средние за период  $\langle g_2 \rangle$ ,  $\langle g_2^\pm \rangle$  все равно можно найти, не прибегая к полному решению уравнений второго приближения.

В зависимости от знаков коэффициентов линеаризованного реологического уравнения в (2.2) возможны следующие ситуации [4]:  $G > 0, \lambda < 0, \theta > 0$  — пассивная вязкоупругая трубка,  $G < 0, \lambda > 0, \theta > 0$  — активная трубка  $S$ -типа.

Третья возможность ( $G < 0, \lambda < 0, \theta < 0$ ) не реализуется вследствие неустойчивости стационарных состояний [4] и далее не рассматривается.

3. Пусть функции  $q_n^\pm$  ( $n \geq 1$ ) заданы своими фурье-разложениями и в виде подобных же разложений ищется решение (2.2)

$$q_n^\pm = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re}[\mathbf{q}_{nm}^\pm e^{im\omega t}], \quad q_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re}[\mathbf{q}_{1m}(x) e^{im\omega t}]$$

$$R_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re}[\mathbf{R}_{1m}(x) e^{im\omega t}], \quad g_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re}[\mathbf{g}_{1m}(x) e^{im\omega t}]$$

Величины  $q_{n0}^\pm, q_{10}, R_{10}$  здесь считаем вещественными. Функцию, входящую под знак интеграла в (2.4), можно выразить непосредственно через  $\mathbf{q}_{1m}, \mathbf{R}_{1m}$  (черта — знак комплексного сопряжения)

$$\int_0^L \left\langle R_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \right\rangle dx = \int_0^L R_{10} \frac{\partial q_{10}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \int_0^L \mathbf{R}_{1m} \frac{\partial \overline{\mathbf{q}_{1m}}}{\partial x} dx \right] = I_0 + \frac{1}{2} I_1 \quad (3.1)$$

Из (2.2) следует простая краевая задача, определяющая  $\mathbf{q}_{1m}(x)$ ; ее решение имеет вид

$$q_{10} = \left[ q_{10}^+ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + q_{10}^- \frac{x}{L} \right], \quad R_{10} = \frac{R_0}{G} \xi_0 q_{10} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{q}_{1m} = \frac{1}{\sin k_m} \left[ \mathbf{q}_{1m}^+ \sin k_m \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \mathbf{q}_{1m}^- \sin k_m \frac{x}{L} \right]$$

$$\mathbf{R}_{1m} = \frac{R_0}{G} \xi_m \mathbf{q}_{1m}, \quad \xi_m = \frac{1 - m^2 \omega^2 \lambda \theta - im \omega (\lambda + \theta)}{1 + m^2 \omega^2 \theta^2}$$

$$k_m^2 = im \omega \xi_m L / \eta, \quad \eta = -GR_0^2 / 16 \mu$$

В первом приближении расход определяется по (2.3), (2.4), причем

$$\langle g_1 \rangle = g_{10} = \frac{1}{Z_0} (q_{10}^+ - q_{10}^-), \quad \mathbf{g}_{1m} |_{x=0,L} = \mathbf{g}_{1m}^\pm = \frac{k_m}{Z_0 \sin k_m} (\mathbf{q}_{1m}^\pm \cos k_m - \mathbf{q}_{1m}^\mp) \quad (3.3)$$

Согласно (2.4), (3.1), определению расхода  $\langle g_2 \rangle$  предшествует вычисление интегралов  $I_0, I_1, \dots$ . Используя решение (3.2), находим

$$I_0 = \frac{R_0}{2G} [(q_{10}^-)^2 - (q_{10}^+)^2], \quad I_m = -\frac{R_0 |\xi_m|}{2|G| |\sin k_m|^2} (-A_m a_m + B_m b_m)$$

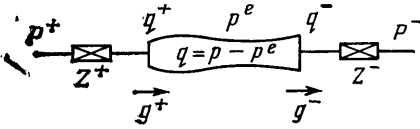
$$a_m = \frac{k_m'}{k_m''} \operatorname{sh}^2 k_m'' + \frac{k_m''}{k_m'} \sin^2 k_m', \quad b_m = \left( \frac{k_m'}{k_m''} - \frac{k_m''}{k_m'} \right) \sin k_m' \operatorname{sh} k_m'' \quad (3.4)$$

$$A_m = |\mathbf{q}_{1m}^+|^2 - |\mathbf{q}_{1m}^-|^2, \quad B_m = -i(\mathbf{q}_{1m}^+ \overline{\mathbf{q}_{1m}^-} - \overline{\mathbf{q}_{1m}^+} \mathbf{q}_{1m}^-), \quad k_m = k_m' + ik_m''$$

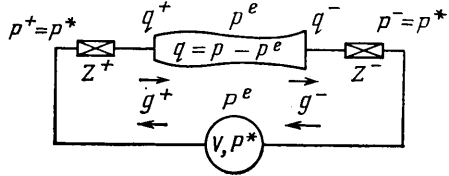
Заметим, что  $A_m, B_m$  обращаются в нуль при совпадении соответственных модулей и фаз комплексных  $\mathbf{q}_{1m}^\pm$ : если  $\mathbf{q}_{1m}^\pm = |\mathbf{q}_{1m}^\pm| \exp(i\varphi_{1m}^\pm)$ , то  $B_m = 2|\mathbf{q}_{1m}^+ \mathbf{q}_{1m}^-| \sin(\varphi_{1m}^+ - \varphi_{1m}^-)$ . Таким образом, в (3.4) и в общей формуле (2.4) содержатся «амплитудные» и «фазовые» слагаемые, причем наличие сдвига фаз  $\varphi_{1m}^+ - \varphi_{1m}^- \neq 0, \pi$ , вообще говоря, обеспечивает нетривиальный вклад колебаний в расход при совпадении средних и амплитудных значений давления на концах. Формулы (2.4), (3.1), (3.4) полностью опреде-

ляют связь среднего расхода с характеристиками перепада давления на концах трубки.

Укажем некоторые особенности поведения  $I_m$  как функции частоты  $m\omega$  при  $m \geq 1$ . Пусть  $m\omega = (\theta\lambda)^{-1/2}$ , тогда  $a_m = b_m = 0$  и, следовательно,  $I_m = 0$ . Этот случай соответствует распространению консервативных волн в линейной системе [4]. Пусть теперь  $m\omega \ll 1$ . Тогда  $\xi_m \approx \xi_0 = 1$ ,  $k_m = L(\pm 1/2 m\omega/\eta)^{1/2}(\pm 1 + i)$  при  $\eta > 0$  и  $\eta < 0$  соответственно, т. е.  $k_m'/k_m'' \approx \approx \text{sign } \eta$ ,  $|\sin k_m| \approx \sqrt{2}|k_m'|$ . В противоположном случае очень высоких



Фиг. 1



Фиг. 2

$m\omega$  будем иметь [4]  $\xi_m = \xi_\infty = -\lambda/\theta$ ,  $|\xi_\infty| < 1$ ,  $k_m = L(1/2 m\omega|\xi_\infty/\eta|)^{1/2}(-1+i)$  и, следовательно,  $k_m' \approx -k_m''$ ,  $\text{sh}^2 k_m'' \approx 1/4 \exp(2k_m'')$ ,  $|\sin k_m|^2 \approx \approx 1/4 \exp(2k_m'')$ . В результате получаем из (3.3)

$$I_m \approx \frac{R_0 A_m}{2|G|} \text{sign } \eta (|m\omega\theta| \ll 1), \quad I_m \approx -\frac{R_0 |\xi_\infty| A_m}{2|G|} (|m\omega\lambda| \gg 1)$$

4. В качестве примера рассмотрим вначале трубку, которая соединена посредством постоянных сопротивлений  $Z^\pm$  с резервуарами, где поддерживаются давления  $P^\pm(t) + p^e(t)$  (Фиг. 1). Тогда приведенные давления  $q^\pm$  должны быть определены из условий

$$P^+ - q^+ = Z^+ g^+, \quad q^- - P^- = Z^- g^- \quad (4.1)$$

После разложения по степеням  $\varepsilon$  и по гармоникам получим

$$P_{1m}^+ - q_{1m}^+ = Z^+ g_{1m}^+, \quad q_{1m}^- - P_{1m}^- = Z^- g_{1m}^- \quad (4.2)$$

Из формул (3.3), (4.2) находим

$$q_{10}^\pm = \frac{1}{\Delta_0} [(Z_0 + Z^\mp) P_{10}^\pm + Z^\pm P_{10}^\mp], \quad \Delta_0 = Z_0 + Z^+ + Z^-$$

$$q_{1m}^\pm = \frac{1}{\Delta_m} [(Z_m + Z^\mp \cos k_m) P_{1m}^\pm + Z^\pm P_{1m}^\mp] \quad (4.3)$$

$$Z_m = \frac{Z_0 \sin k_m}{k_m}, \quad \Delta_m = Z_m + (Z^+ + Z^-) \cos k_m - \frac{Z^+ Z^-}{Z_m} \sin^2 k_m$$

Эти формулы позволяют определить  $q_1$ ,  $R_1$ ,  $g_1$  и входящие в  $\langle g_2 \rangle$  интегралы  $I_m$ . Полностью  $\langle g_2 \rangle$  находится после вычисления средних  $\langle g_2^\pm \rangle$ . Для этого из (4.1) получаем

$$\langle P_n^+ \rangle - \langle q_n^+ \rangle = Z^+ \langle g_n^+ \rangle, \quad \langle q_n^- \rangle - \langle P_n^- \rangle = Z^- \langle g_n^- \rangle$$

и поскольку  $\langle g_n^\pm \rangle = \langle g_n \rangle$ , то  $\langle g_n^+ \rangle - \langle g_n^- \rangle = \langle P_n^+ \rangle - \langle P_n^- \rangle - (Z^+ + Z^-) \langle g_n \rangle$ . Из (2.4) тогда следует

$$\langle g_1 \rangle = \frac{1}{\Delta_0} (\langle P_1^+ \rangle - \langle P_1^- \rangle)$$

$$\langle g_2 \rangle = \frac{1}{\Delta_0} \left[ \langle P_2^+ \rangle - \langle P_2^- \rangle - \frac{4}{R_0} \left( I_0 + \frac{1}{2} I_1 + \dots \right) \right] \quad (4.4)$$

Пусть, в частности,  $P^+(t) = P_0 + \varepsilon P_1^+$ ,  $P^-(t) = P_0$ ,  $P_1^+ = P_{10}^+ + P_{11}^+ \cos \omega t$ . Тогда, согласно (2.4), (3.1), (4.4), получаем

$$\langle g_1 \rangle = \frac{P_{10}^+}{\Delta_0}, \quad \langle g_2 \rangle = -\frac{4}{R_0 \Delta_0} \left( I_0 + \frac{1}{2} I_1 \right), \quad I_0 = -\frac{R_0 (P_{10}^+)^2}{2G \Delta_0^2} (Z_0^2 + 2Z_0 Z^-) \quad (4.5)$$

$$I_1 = \frac{R_0 |\xi_1| (P_{11}^+)^2}{2|G| |\Delta_1|^2} \left\{ \left( \frac{k_1''}{k_1'} \sin^2 k_1' + \frac{k_1'}{k_2''} \text{sh}^2 k_1'' \right) \frac{Z_0^2}{|k_1|^2} + \dots \right\}$$

$$+ (k_1' \operatorname{sh} 2k_1'' + k_1'' \sin 2k_1') \frac{Z_0 Z^-}{|k_1|^2} + \left( \frac{k_1'}{k_1''} \operatorname{sh}^2 k_1'' - \frac{k_1''}{k_1'} \sin^2 k_1' \right) (Z^-)^2 \Big\} \quad (4.6)$$

Формула для  $\langle g_2 \rangle$  в (4.5) показывает, что в деформируемой трубке постоянная составляющая перепада давления  $P_{10}^+$  дает положительный вклад в расход при пассивной податливости ( $G > 0$ ) и отрицательный — при активной ( $G < 0$ ) (эффект Бейлисса). Нетрудно установить, что  $\operatorname{sign} I_1 = \operatorname{sign} k_1' k_1''$ . Тогда, учитывая связь  $k_1^2$  с  $\omega$  (3.2), будем иметь  $I_1 < 0$  при пассивной податливости для всех  $\omega$ , а в случае активной податливости  $I_1 < 0$  при  $\omega > (\lambda\theta)^{-1/2}$ ,  $I_1 > 0$  при  $\omega < (\lambda\theta)^{-1/2}$  и  $I_1 = 0$  при  $\omega = (\lambda\theta)^{-1/2}$ .

Рассматривая предельные случаи малых и больших частот, получаем

$$I_1 \approx \frac{R_0 (P_{11}^+)^2}{2|G||\Delta_0|^2} (Z_0^2 + 2Z_0 Z^-) \operatorname{sign} \eta \quad (\omega \rightarrow 0), \quad I_1 \approx 0 \quad (\omega \rightarrow \infty, Z^+ Z^- = 0)$$

$$I_1 \approx - \frac{R_0 |\xi_\infty| (P_{11}^+ Z^-)^2}{2|G| (Z^+ + Z^-)^2} \quad (\omega \rightarrow \infty, Z^+ Z^- \neq 0)$$

Различие в поведении решений при  $Z^+ Z^- \neq 0$  и  $Z^+ Z^- = 0$  легко объяснимо: с ростом частоты во втором случае величины  $q_{1m}^\pm$  стремятся к нулю (см. (4.3)), т. е. граничные сечения трубки плохо воспринимают внешние высокочастотные колебания давления при наличии двух конечных сопротивлений.

В качестве второго примера рассмотрим трубку с сопротивлениями  $Z^\pm$ , замкнутую (фиг. 2) через переменный объем  $V$ , зависящий от трансмурального давления  $q^* = P^* - P^e$ . В этом случае  $P_n^+ = P_n^-$  для всех  $n$  и  $dV/dt = q^- - q^+$ .

После разложений отсюда получаем

$$im\omega V_0' (P_{1m}^* - P_{1m}^e) = g_{1m}^- - g_{1m}^+, \quad V_0' = \partial V / \partial q^*|_0 \quad (4.7)$$

$$P_{1m}^* = P_{1m}^+ + P_{1m}^e$$

С учетом (3.3), (4.2), (4.3), (4.7) находим

$$g_{1m}^\pm = \mp \frac{P_{1m}^\pm}{\Delta_m} \left( 1 - \cos k_m + \frac{Z^\pm}{Z_m} \sin^2 k_m \right), \quad P_{1m}^\pm = \frac{im\omega (P_{1m}^e - P_{1m}^e) V_0'}{im\omega V_0' + \delta_m} \quad (4.8)$$

$$\delta_m = - \frac{1}{\Delta_m} \left[ 2(1 - \cos k_m) + \frac{Z^+ + Z^-}{Z_m} \sin^2 k_m \right]$$

$$q_{1m}^\pm = \frac{P_{1m}^\pm}{\Delta_m} (Z_m + Z^\pm + Z^\mp \cos k_m)$$

Расход в данной ситуации определяется формулами (4.5), причем  $\langle g_1 \rangle = 0$ ,  $\langle g_2 \rangle = -2I_1 / (R_0 \Delta_0)$ . Пусть, в частности,  $p^e = p_0^e + \epsilon p_{11}^e \cos \omega t$ ,  $P^e = p_0^e$ . Тогда для  $I_1$  получаем

$$I_1 = \frac{R_0 |\xi_1| |P_{11}^\pm|^2}{2|G||\Delta_1|^2} \left\{ \frac{2(Z^- - Z^+)}{|k_1|^2} (k_1' \operatorname{sh} k_1'' - k_1'' \sin k_1') (\operatorname{ch} k_1'' - \cos k_1') + \right.$$

$$\left. + [(Z^-)^2 - (Z^+)^2] \left( \frac{k_1'}{k_1''} \operatorname{sh}^2 k_1'' - \frac{k_1''}{k_1'} \sin^2 k_1' \right) \right\}$$

Зависимость  $I_1$  от  $\omega$  качественно схожа с рассмотренной в предыдущей задаче, поскольку  $\operatorname{sign} I_1 = \operatorname{sign} k_1' k_1'' \operatorname{sign} (Z^- - Z^+)$ . Анализ предельных случаев показывает, что  $\langle g_2 \rangle \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow 0$  или  $\omega \rightarrow \infty$  (последнее верно, если  $Z^+ Z^- \neq 0$ , в противном случае  $\langle g_2 \rangle$  имеет конечный предел, положительный при  $Z^- > Z^+$ ). Следует еще отметить, что  $\langle g_2 \rangle$  обращается также в нуль при  $Z^- = Z^+$  или при стремлении одного из этих сопротивлений к бесконечности. Это означает, что существует зависящее от частоты оптимальное отношение сопротивлений, при котором расход достигает наибольшего значения.

5. Представленные выше результаты показывают, что средний расход через деформируемую трубку складывается из трех величин: первая (в рассмотренных примерах равная  $\langle q_1 \rangle$ ) отвечает пуазейлевскому течению по трубке среднего радиуса под действием среднего перепада давлений, вторая ( $\sim I_0$ ) представляет собой поправку на деформацию стенки при среднем по времени распределении давления; третья ( $\sim I_1$ ) учитывает влияние нестационарности формы трубки и давления в ней. Слагаемое с  $I_0$  имеет положительный или отрицательный знак соответственно для

пассивной и активной трубок. Слагаемое с  $I_1$  ведет себя так же при малых частотах, а при больших частотах оно всегда положительно (это согласуется с результатами численного расчета; см. цит. выше работу И. М. Скобелевой).

Когда средний перепад давления отсутствует, средний расход тем не менее отличен от нуля. Физически это означает, что в результате внешнего воздействия стенка трубки деформируется неоднородным по  $x$  образом и эта нестационарная деформация выполняет роль перистальтической волны. При этом несимметрия условий на концах трубки обеспечивает несимметрию этих волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях.

При наличии среднего перепада названный насосный эффект мал (порядка  $\epsilon$  в сравнении с  $\langle g_1 \rangle$ ) и проявляется в зависимости эффективного сопротивления трубки  $(\langle q^+ \rangle - \langle q^- \rangle) / \langle g \rangle$  от частоты воздействия.

Полученные здесь решения могут послужить основой для дальнейшего исследования и, в частности, для выяснения связи амплитуды колебаний расхода с частотой колебаний давления, анализа чувствительности активного сосуда к изменению среднего давления на входе и т. п. Следует иметь в виду, однако, что в экспериментах с искусственно созданными высокочастотными пульсациями давления на результат могли оказывать влияние инерционные эффекты, которые не учитываются данной теорией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров С. М., Рогоза А. Н. Миогенный тонус и механика кровеносных сосудов.— В кн.: Физиология человека и животных. М.: 1979, с. 3–45. (ВИНИТИ. Итоги науки и техники, т. 23).
2. Johnson P. C. The myogenic response — In: Handbook of Physiology. Sect. 2. The cardiovascular system. Vol. II. Vascular smooth muscle. Bethesda, Md, 1980.
3. Ohhashi T., Azuma T., Sakaguchi M. Active and passive mechanical characteristics of bovine mesenteric lymphatics.— Amer. J. Physiol., 1980, v. 239, № 1, p. H88.
4. Регирер С. А., Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 45–53.
5. Регирер С. А., Руткевич И. М., Усик П. И. Модель сосудистого тонуса.— Механика полимеров, 1975, № 4, с. 585–589.
6. Руткевич И. М. Волновые движения в трубках из вязкоупругого материала. Стационарные нелинейные волны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 86–95.
7. Киреева Е. Е., Клочков Б. Н. Нелинейная модель сосудистого тонуса.— Механика композитных материалов, 1982, № 5, с. 887–894.
8. Клочков Б. Н. Автоволновые процессы в кровеносных сосудах мышечного типа.— В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький, 1981, с. 233.
9. Скобелева И. М. Модель сосудистого тонуса. (Численный эксперимент) — Механика композитных материалов, 1980, № 1, с. 107–112.
10. Скобелева И. М. О некоторых режимах течения жидкости в трубках из вязкоупругого материала.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 564–566.
11. Осадчий Л. И., Пуговкин А. П., Сергеев И. В., Малякко Р. П. Системные сосудистые реакции на увеличение объемной скорости кровотока.— Физиол. ж. СССР, 1980, т. 66, № 10, с. 1481–1487.
12. Basar E., Weiss C. Vasculature and circulation: the role of myogenic reactivity in the regulation of blood flow. Amsterdam e.a.: Elsevier, North-Holland Biomed. press, 1981. 272 p.
13. Grände P.-O., Borgström P., Mellander S. On the nature of basal vascular tone in cat skeletal muscle and its dependence on transmural pressure stimuli.— Acta Physiol. Scand., 1979, v. 107, № 4, p. 365–376.
14. Mahrenholtz O. Biologische Strömungen.— Z. angew. Math. und Mech., 1975, Bd. 55, № 4, S. T27 – T38.
15. Rath H. J., Teipel I. Der Förderereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen.— Z. angew. Math. und Phys., 1978, Bd. 29, № 1, S. 123–133.

Москва

Поступила в редакцию  
19.VII.1983