

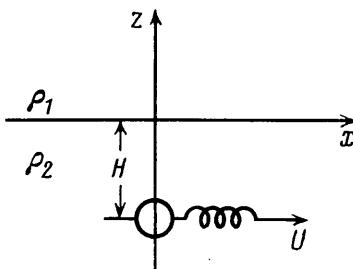
УДК 532.59.011

## УСИЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

• ДОЛИНА И. С.

Движение в жидкости тела, обладающего колебательной степенью свободы, может сопровождаться неустойчивостью — раскачкой колебаний за счет энергии поступательного движения [1]. Возможность такой неустойчивости существенно связана с излучением колебательной компоненты в область «корабельного» угла  $\theta_s$ , удовлетворяющего условию  $\cos \theta_s = U_\phi/U$ , где  $U$  — скорость поступательного движения,  $U_\phi$  — фазовая скорость волны на данной частоте. В [1] рассматривалось движение малой сферы (на упругой пружине параллельно границе раздела двух жидкостей) и отмечалась важность учета вязкости и нелинейных эффектов. Учет этих факторов необходим для того, чтобы сделать сколько-нибудь реальные выводы о порогах и характере упомянутой неустойчивости.

В настоящей работе этот вопрос рассматривается применительно к двумерной модели движения круглого цилиндра перпендикулярно его образующей и параллельно границе раздела двух жидкостей разной плотности (фиг. 1) под действием заданной силы, приложенной к цилиндру через двумерную упругую пружину. Такая модель позволяет продвинуться дальше и дать аналитическое рассмотрение указанных выше вопросов.



Фиг. 1

В данном случае движущееся тело эквивалентно дипольному источнику вида

$$q = -Q(U + U_v \cos \Omega t) \delta(z + H) \delta'(x - Ut - a \sin \Omega t)$$

где  $U_v = a\Omega$ ,  $Q = 2\pi R^2$ , так что  $QU$  — дипольный момент, соответствующий равномерному движению цилиндра. Это выражение справедливо для волн с длинами, много большими  $R$ .

**1. Влияние вязкости на движение цилиндра.** Наличие вязкости сложным образом влияет на структуру гидродинамического поля, созданного источником, и тем самым на радиационную силу (действующую на источник со стороны создаваемого им волнового поля). Чтобы выделить этот эффект «в чистом виде», будем считать вязкость отличной от нуля только в верхнем слое, тогда как цилиндр движется в нижнем слое. Отметим, что плоская задача о возмущениях, создаваемых колебаниями линейного источника, движущегося под свободной поверхностью жидкости, без учета вязкости решена, например, в [2]. На поверхности раздела двух слоев жидкости должно выполняться условие равенства каса-

тельных и нормальных напряжений и вертикальных компонент скорости.

Решая уравнение для скалярного и (в верхнем слое) для векторного потенциала с помощью фурье-разложения получим

$$\begin{aligned}\varphi_2 = & \frac{iQ}{2\pi U} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{h} \frac{(D_1 + \gamma gh) \operatorname{ch} hz + \gamma \omega^2 \operatorname{sh} hz}{D_1 + \gamma(gh - \omega^2)} I_l(k_l a) \times \\ & \times \exp(i k_l x_l - hH - i\Omega lt) d\omega \\ k_l = & \frac{\omega - \Omega l}{U}, \quad h = |k_l|, \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad x_l = x - Ut \\ m = & \sqrt{k_l^2 - \frac{i\omega}{v}}, \quad D_1 = (2vh^2 - i\omega)^2 - gh - 4v^2 m h k_l^2\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь  $\varphi_2$  — потенциал скорости в нижнем слое жидкости,  $I_l$  — функция Бесселя 1-го рода,  $v$  — вязкость верхнего слоя жидкости,  $D_1 + \gamma(gh - \omega^2) = 0$  — дисперсионное уравнение. Член с  $l=0$  в (1.1) отвечает волнам от равномерно движущегося цилиндра. Для осциллятора с малой амплитудой колебаний ( $k_l a \ll 1$ ) достаточно рассмотреть еще члены с  $l=\pm 1$ . Эти члены описывают соответственно более быстрые и более медленные волны, чем в случае  $l=0$ .

Нули дисперсионного уравнения представляют особенности подынтегрального выражения. Перепишем дисперсионное уравнение в безразмерном виде

$$\begin{aligned}(2y^2 - i\beta x)^2 - 4|y|^3 \sqrt{y^2 - i\beta x} - \beta^2 \gamma x^2 + \beta^2 (\gamma + 1) |y| = 0 \\ x = \frac{\omega U}{g'}, \quad y = \frac{k_l U^2}{g'}, \quad \beta = \frac{U^3}{g' v}, \quad y = x - \tau_l \\ \tau_l = \frac{\Omega U l}{g'}, \quad g' = g \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\end{aligned}\quad (1.2)$$

Решения дисперсионного уравнения зависят от параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\tau_l$ .

Для случая малых скоростей ( $\beta \ll 1/2(\gamma + 1)$ ) уравнение (1.2) при  $\tau_l = 0$  имеет решение  $y = x_1 = \pm 1/2(1-i)\sqrt{\beta(\gamma+1)}$ , отвечающее волнам, затухающим при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Для больших скоростей при  $\beta \gg 2/\gamma$  уравнение (1.2) имеет корень  $x_2 = 1/4i\beta(2\gamma+3)$ , соответствующий ближнему полю, связанному с вязкостью в верхнем слое жидкости; а при  $\beta \gg 4/(1+\gamma)$  — корень  $x_3 = 1 - 4i/(1+\gamma)\beta$ , соответствующий при  $\beta \rightarrow \infty$  волне на границе раздела сред без учета потерь.

Для нахождения радиационной силы  $F$  используем энергетические соображения. Работа этой силы в среднем за период равна потоку энергии через плоскость  $z=0$  (с противоположным знаком)

$$U \int_0^T F dt + U_v \int_0^T F \cos \Omega t dt = -\rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} P dx \quad (1.3)$$

где  $P$  — давление в нижнем слое жидкости. Подставляя в (1.3) решение (1.1), получим выражение для силы, действующей на цилиндр

$$\begin{aligned}F = & B \sum_l \int_0^{\infty} A_l I_l \left( \frac{y}{\Phi^2} \right) I_{l'} \left( \frac{y}{\Phi^2} \right) dx \cos \Omega(l' - l)t \\ B = & -\frac{2\rho_2 \gamma g' Q^2 \beta^2}{\pi H^2 F r^4}\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$A = \frac{x^4 y^3 \left[ 2x\beta - \sqrt{2} |y| \sqrt{\sqrt{y^4 + \beta^2 x^2} - y^2} \right]}{|y| (\alpha^2 + \delta^2)} \exp \left( -\frac{2|y|}{Fr^2} \right)$$

$$\alpha = 4y^4 - \beta^2(\gamma + 1)x^2 + \beta^2(\gamma + 1)|y| - 2\sqrt{2}|y|^3\sqrt{\sqrt{y^4 + \beta^2 x^2} + y^2}$$

$$\delta = 2\sqrt{2}|y|^3\sqrt{\sqrt{y^4 + \beta^2 x^2} - y^2} - 4y^2x\beta, \quad \Phi = \frac{U}{\gamma g' a}, \quad Fr = \frac{U}{\gamma g' H}$$

Сила  $F$  имеет как постоянную составляющую при  $l'=l$ , которая определяет волновое сопротивление равномерному движению цилиндра под слоем вязкой жидкости, так и осциллирующую с частотой  $\Omega$  часть при  $l'=l\pm 1$ . Из (1.4) следует, что осцилляции влияют на постоянную часть силы сопротивления (при малых  $k_1 a$  этот вклад порядка  $(k_1 a)^2$ ).

Колебательная часть силы сопротивления имеет вид

$$F_v = \frac{Bal}{2HFr^2} \sum_l \int_0^\infty A_l(x-\tau_l) dx \cos \Omega t \quad (1.5)$$

Она состоит из «нормального» ( $l=1$ ) и «аномального» ( $l=-1$ ) слагаемых. (Терминология, принятая в электродинамике, где для волн, излучаемых вне черенковского угла  $\theta_s$ , говорят о нормальном, а внутри этого угла — об аномальном эффекте Доплера.) Легко видеть, что интеграл в выражении (1.5) всегда положителен, т. е. излучение нормальных волн подавляет, а аномальных — раскачивает колебания. Суммарный эффект зависит от соотношения параметров  $\tau_l$ ,  $Fr$  и  $\beta$ .

Рассмотрим сначала случай сильного затухания, когда выполняется условие  $Re=Uh/\nu=\beta/Fr^2 \ll 1$ . Здесь определенный самостоятельный интерес представляет вопрос о характере граничных условий на границе между идеальной и вязкой жидкостью. Можно показать, что этот случай соответствует условию «твёрдой крышки»:  $w_1=w_2=0$ . Если при этом еще  $\beta/Fr^4 \ll 1$ , то выполняются также условия  $u_1=0$ ,  $\partial w_1/\partial z=0$  («прилипания»). В этом случае определяющим является ближнее поле, обусловленное вязкостью, и эффекта раскачки колебаний не возникает. Действительно, из (1.4), (1.5) получим

$$F_0 = -\frac{\rho_2 \gamma Q^2 U^3}{8\pi H^2 \nu}$$

$$F_v = -\frac{\rho_2 \gamma Q^2 g' \beta a}{16\pi H^3} \sum_{l=\pm 1} l \left( 1 + \frac{3\tau_l}{Fr^2} + \frac{6\tau_l^2}{Fr^4} \right) \cos \Omega t =$$

$$= -\frac{3\rho_2 \gamma Q^2 a \Omega U^2}{8\pi H^2 \nu} \cos \Omega t \quad (\tau_l \ll Fr^2)$$

Отсюда видно, что раскачки осцилляторов в данном случае не происходит. Величина  $F_v$  равна  $a\Omega \partial F_0 / \partial U$ , так как при низкочастотных колебаниях радиационная сила изменяется квазистатическим образом, т. е. можно записать  $F=F_0(U-\xi)$ , а колебательная часть силы описывается вариацией этого выражения  $F_v=-(\partial F_0 / \partial U)\xi$ .

Случай слабого затухания ( $Re \gg 1$ ) соответствует обычным условиям на границе раздела двух слоев идеальной жидкости. Из (1.4) и (1.5) получаем выражение для постоянной и колебательной составляющих сил

$$F_0 = -\frac{2B}{(1+\gamma)^2 \beta^3} \int_0^\infty \frac{x^5 \exp(-2x/Fr^2)}{(x-1)^2 + 16x^4/\beta^2(\gamma+1)^2} dx \quad (1.6)$$

$$F_v = \frac{Bal}{Fr^2(1+\gamma)^2\beta^3 H} \int_0^\infty \frac{|y|^3 x^5 \exp(-2|y|/Fr^2)}{(x^2 - |y|)^2 + 16y^4 x^2 / \beta^2 (\gamma+1)^2} dx \cos \Omega t \quad (1.7)$$

Из (1.6) при  $\beta \gg 4/\gamma + 1$  получим выражение

$$F_0 = -\frac{\gamma \rho_2 Q^2 g'}{(\gamma+1) H^2 Fr^4} \exp\left(-\frac{2}{Fr^2}\right) \cos \frac{8}{Fr^2 \beta (\gamma+1)} \quad (1.8)$$

которое при  $\gamma \gg 1$  и  $\beta \rightarrow \infty$  совпадает с хорошо известной формулой [3]. Для чисел Фруда, удовлетворяющих условию  $Fr^2 \gg 8/\beta(\gamma+1) \ll 1$ ,  $F_0$  является тормозящей силой с падающим участком зависимости  $F_0(U)$  при  $Fr > 1$ . Для самых малых чисел Фруда  $Fr^2 < 8/\beta(\gamma+1)$  важны эффекты, связанные с вязкостью. Выражение (1.7) при  $\beta \gg 4/\gamma + 1$  имеет особенности, связанные с излучением на частотах

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{1+4\tau} \pm 1, \quad \omega_{3,4} = \pm \sqrt{1-4\tau} \quad (\tau = \Omega U / g')$$

При  $\tau < 1/4$  волны с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  излучаются в область за цилиндром, а волна с частотой  $\omega_4$  излучается в область перед цилиндром [2]. Выражения для сил, действующих на цилиндр, связанных с излучением волн этих частот, имеют вид

$$\begin{aligned} F_{vi} &= f_0 \frac{\omega_i^6}{a_i} \exp\left(-\frac{32\omega_i^6}{Fr^2}\right) \cos \Omega t \quad (i=1, 2, 3, 4) \\ f_0 &= \frac{\gamma \rho_2 Q^2 (g')^4 a}{2(\gamma+1) U^6}, \quad a_{1,2} = \pm \sqrt{1+4\tau}, \quad a_{3,4} = -\sqrt{1-4\tau} \end{aligned} \quad (1.9)$$

При  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $F_{v2}$ ,  $F_{v4} \rightarrow 0$  и полная сила, связанная с колебаниями тела, имеет вид

$$F_v = 8f_0 \tau \exp\left(-\frac{2}{Fr^2}\right) \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right) = a \Omega \frac{\partial F_0}{\partial U} \quad (1.10)$$

Из (1.10) видно, что низкочастотные колебания неустойчивы при  $Fr > 1$ , т. е. на падающем участке зависимости  $F_0(U)$ . С ростом частоты неустойчивость может реализоваться и вне падающего участка (см. фиг. 2, где изображена зависимость нормированной на  $2^{-6}f_0$  силы  $F_v$  от числа Фруда для различных значений  $\tau$ ). Так при  $\tau > 1/4$ , когда излучаются только волны частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , граница области неустойчивости удовлетворяет условию

$$Fr^2 = \frac{2\omega_1 - 1}{3 \ln(\omega_1/\omega_2)}$$

и, следовательно, при  $\tau > 1/4$  неустойчивость реализуется при минимальном числе Фруда  $Fr \rightarrow 0,52$ . (Способ расчета возмущений при  $\tau = 1/4$ , когда линейная теория становится неприменимой, приводится в работе [5].) Полная колебательная часть силы при  $1/4 < \tau < Fr^4/4$ , как легко видеть из (1.9), имеет вид

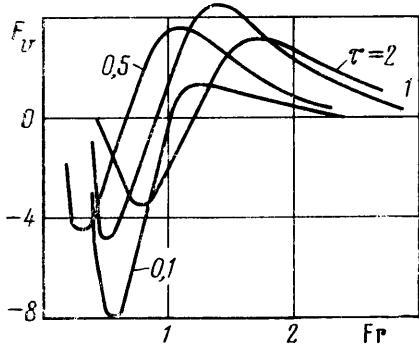
$$F_v = f_0 \tau^2 \left(3 - \frac{2\tau}{Fr^2}\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{Fr^2}\right) \cos \Omega t$$

Следовательно, при  $\tau < 3/2 Fr^2$  колебательная часть силы положительна. При  $\tau \gg 1/4 Fr^4$  из (1.9) получаем

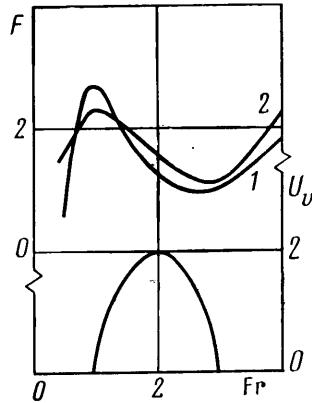
$$F_v = -\frac{1}{2} f_0 \tau^{5/2} \exp\left(-\frac{2\tau}{Fr^2}\right) \cos \Omega t$$

Отсюда видно, что сила становится тормозящей и с дальнейшим ростом  $\tau$  стремится к нулю.

Таким образом, степень влияния вязкости в верхнем слое зависит от значений параметров  $\beta=U^3/g'v$ ,  $Fr=U/\sqrt{g'H}$  и  $\gamma=\rho_2/\rho_1$ . Если  $\beta \gg 4/(\gamma+1)$ , то в интервале  $8/\beta(\gamma+1) \ll Fr^2 \ll \beta$  решение остается близким к потенциальному, но в волнах появляется малое затухание. Следовательно, неустойчивость проявляется в некотором конечном интервале глубин  $H$ . Вне этого интервала (т. е. при достаточно большой и, наборот, малой глубинах  $H$ )



Фиг. 2



Фиг. 3

малая вязкость устраняет низкочастотную неустойчивость. При малой скорости движения, когда  $\beta \ll 1/2(\gamma+1)$ , ближнее поле, обусловленное диссипацией, является определяющим и неустойчивость невозможна.

**2. Нелинейная стадия.** В случае неустойчивости амплитуда колебаний осциллятора нарастает экспоненциально до тех пор, пока линейное приближение для возмущений силы сопротивления в зависимости от скорости не перестанет выполняться.

Рассмотрим задачу о нелинейной стадии развития неустойчивости на примере достаточно медленных колебаний ( $\Omega \rightarrow 0$ ), когда радиационная сила в каждый момент отвечает квазистационарным потерям на излучение корабельных волн и равна функции  $F_0(U-\xi)$ , определяемой выражением (1.8), где  $\xi=Ae^{i\Omega t}+A^*e^{-i\Omega t}$ . Учитывая теперь, что тело движется в вязкой жидкости, полную силу  $F$ , действующую на тело, представим в виде суммы  $F_0(U-\xi)$  и силы сопротивления трения  $F_t=cS\rho U^2/2$ , где  $c$  – коэффициент сопротивления, а  $S$  – площадь смоченной поверхности тела.

Зависимость  $F(U)$  для хорошо обтекаемого тела в виде эллиптического цилиндра с отношением большой полуоси  $L/2$  к малой  $R$ , равным 10, изображена на фиг. 3 (кривая 1) для  $c=10^{-2}$  и  $H=2R$ . При этом для величины дипольного момента в (1.8) использовалось выражение  $Q=\pi R(L/2+R)$  [3]. Считая амплитуду колебаний конечной, аппроксимируем зависимость  $F(U)$  полиномом третьей степени

$$F=lU'^3+nU'^2+cU'+d, \quad U'=\frac{U-\xi}{\sqrt{g'H}}$$

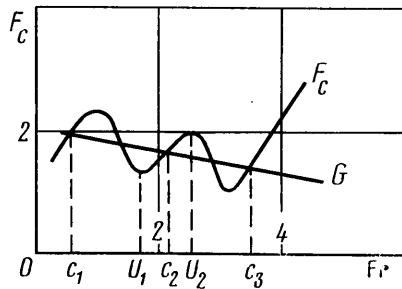
$$F=\frac{F_0+F_t}{f}, \quad f=\frac{\gamma\rho_2 Q^2 g'}{20(\gamma+1)H^2} \quad (2.1)$$

Здесь  $l$ ,  $n$ ,  $c$  и  $d$  – постоянные. Например, для кривой 2 на фиг. 3  $l=1/3$ ,  $n=2$ ,  $c=3$ ,  $d=1$ . Будем считать, что равновесная скорость  $U_0$  лежит на участке, где  $F'_v < 0$ . Подставляя в (2.1)  $\xi$  в виде синусоиды ( $\xi=U_v \cos \Omega t$ ,  $U_v=-2\Omega \operatorname{Im} A$ ), легко найдем постоянную составляющую ( $B_0$ ) и ампли-

туду первой гармоники ( $B_1$ ) силы

$$B_0 = F(U_0) + F''(U_0) \frac{U_v^2}{4}, \quad B_1 = -\frac{U_v}{2} \left[ F'(U_0) + F'''(U_0) \frac{U_v^2}{8} \right] \quad (2.2)$$

Колебательное движение приводит к изменению средней тормозящей силы  $B_0$ , а  $B_1$  определяет силу, входящую в уравнение колебаний осциллятора, причем она нелинейным образом зависит от амплитуды колебаний. Строго говоря, в этом случае и сила и само движение осциллятора перестают быть гармоническими. Если, однако, амплитуда силы мала по срав-



Фиг. 4

нению с силами инерции и упругости, действующими на тело, то колебания остаются близкими к гармоническим и для их анализа применимо квазилинейное приближение [4]. Движение осциллятора при этом по-прежнему описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{B_1}{m} e^{i\Omega t}$$

Его решение имеет вид  $\xi = -iU_v/2\Omega e^{i\Omega t}$ , где при малых  $B_1/m$  для  $\Omega$  получим

$$\Omega = \omega_0 + \frac{i}{2m} \left( F' + F''' \frac{U_v^2}{8} \right) \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что с увеличением амплитуды колебаний инкремент колебаний (мнимая часть  $\Omega$ ) уменьшается вплоть до установления равновесной амплитуды  $U_v = \sqrt{8F'/F'''}$ . Ее величина зависит от величины  $U_0$ , причем  $U_v$  максимальна, когда скорость движения тела соответствует точке перегиба кривой (2.1) ( $F''(U_0) = 0$ ). Как видно из фиг. 3, величина равновесной амплитуды может достигать значений, сравнимых с  $U_0$ .

Подставляя выражение для равновесной амплитуды колебаний в (2.2), получим выражение для средней тормозящей силы, действующей на тело

$$F_c = F(U_0) - \frac{2F'F''(U_0)}{F'''}$$

Здесь можно различать два случая. Если тело движется с заданной скоростью  $U_0$ , то изменение средней силы приведет к появлению постоянного смещения осциллятора (дополнительное сжатие или растяжение пружины). Если же фиксирована лишь «тянущая» средняя сила (которая, вообще говоря, может зависеть от скорости, если это, например, сила тяги винта), то возможны три состояния равновесия, соответствующих пересечению зависимости силы тяги  $G(U)$  с зависимостью  $F_c(U)$  (см. фиг. 4). Движение со скоростями  $c_1$  и  $c_3$  является устойчивым, а движение со скоростью  $c_2$  может реализоваться, если она попадает в интервал  $U_1 < c_2 < U_2$ ,

где  $U_1$  и  $U_2$  — нули производной  $F_{cU}'$ . В последнем случае поступательное движение будет сопровождаться автоколебаниями с амплитудой  $U_v = \sqrt{8F'/F''}$ .

В других случаях возможно и более сложное нелинейное поведение колебаний тела. Так, например, для «маятниковой» модели (тело, протягиваемое на нерастяжимой нити и совершающее малые поперечные колебания в двухслойной жидкости) в квазистатическом случае возможно жесткое возбуждение: существует пороговое значение амплитуды поперечных колебаний, ниже которого они затухают, а выше нарастают, причем этот рост имеет неэкспоненциальный (взрывной) характер.

В заключение выражают благодарность Л. А. Островскому за ценные замечания и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А. Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 4, с. 827—831.
2. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 327 с.
3. Кочин Н. Е., Кibel' И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматиз, 1963. 583 с.
4. Андронов А. А., Бутт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
5. Dagan G., Miloh T. Free-surface flow past oscillating singularities at resonant frequency.— J. Fluid Mech., 1982, v. 120, p. 139—154.

Горький

Поступила в редакцию  
8.VI.1983