

УДК 532.526

К ТЕОРИИ ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

ЛИПАТОВ И. И.

Исследования отрыва ламинарного пограничного слоя, вызываемого неблагоприятным градиентом давления, показали [1–2], что решение системы уравнений пограничного слоя содержит особенность в точке, где трение на поверхности обращается в ноль и непродолжимо за точку отрыва. В этих и дальнейших исследованиях отрыва пограничного слоя, обзор которых можно найти в [3], сделан вывод о неприменимости теории пограничного слоя для описания течения в окрестности точки отрыва.

Альтернативная теория предложена в работах [4–5], где изучен отрыв пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, происходящий под влиянием падающего извне скачка уплотнения или вызываемый изломом контура обтекаемого тела. Результаты ряда экспериментов свидетельствовали о том, что отрыв пограничного слоя может происходить выше по потоку от места падения скачка уплотнения или точки излома контура тела. Исследования предельных решений уравнений Навье – Стокса при $R_c \rightarrow \infty$ позволили описать наблюдавшиеся явления [4–5]. Важным эффектом, сопровождающим отрыв, является взаимодействие течения в пограничном слое с внешним сверхзвуковым течением. Взаимодействие приводит к появлению большого самоиндуцированного неблагоприятного градиента давления, действующего на малом участке поверхности. Решение в этом случае не содержит особенности, как в [1–2], и может быть продолжено за точку отрыва. Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя от гладкой поверхности в несжимаемой жидкости [6] показало, что и в этом случае отрыв происходит под действием большого самоиндуцированного неблагоприятного градиента давления.

Можно предположить, что учет взаимодействия позволит получить неособое решение, описывающее течение в окрестности точки отрыва, вызываемого заданным во внешнем сверхзвуковом потоке неблагоприятным градиентом давления. Попытка учесть взаимодействие течения в ламинарном пограничном слое с внешним течением предпринималась в [7], но оказалось, что решение системы уравнений, описывающей течение в окрестности точки отрыва, содержит особенность.

В настоящей работе предложена другая модель течения, которая обеспечивает устранение особенности в точке отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, вызываемого заданным неблагоприятным градиентом давления.

1. Рассматривается ламинарное обтекание плоской поверхности потоком вязкого газа. Пусть на расстоянии l от передней кромки пластины происходит отрыв пограничного слоя, вызванный неблагоприятным градиентом давления. Предполагается, что давление во внешнем сверхзвуковом потоке повышается на расстоянии вдоль пластины, сравнимом с длиной l . Вводятся следующие обозначения для координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к поверхности, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, коэффициента вязкости: lx , ly , $u_\infty u$, $u_\infty v$, $\rho_\infty \rho$, $p_\infty u_\infty^2 p$, $u_\infty^2 H/2$, $\mu_\infty \mu$ соответственно. Индекс ∞ относится к размерным параметрам невозмущенного набегающего потока. Предполагается, что число Рейнольдса ($Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$) велико, но не превышает критического значения, так что сохраняется ламинарный режим течения.

Согласно классической схеме Прандтля, около пластины при $Re \rightarrow \infty$ можно выделить область невязкого течения и тонкий по сравнению с длиной пластины пограничный слой. Решение, описывающее течение в пограничном слое вблизи точки, где трение на поверхности обращается в ноль,

перестает быть равномерно точным, что приводит к необходимости введения в рассмотрение пристеночной области вязкого течения и области невязкого течения [1–2]. По мере приближения к точке нулевого трения толщина вытеснения пограничного слоя растет, что приводит к появлению индуцированного градиента давления. Градиент давления, индуцируемый пограничным слоем, в окрестности точки нулевого трения, предполагается того же порядка, что и заданный градиент давления $dp/dx = K = O(1)$. Предельный случай малого отношения индуцированного и заданного градиентов давления приводит к схеме, в которой в главном члене течение описывается решением, не учитывающим взаимодействие, что не позволяет устранить особенность и продолжить решение за точку нулевого трения [7].

В другом предельном случае, когда отношение индуцированного и заданного градиентов давления велико, реализуется режим «свободного взаимодействия», описывающий другое отрывное течение.

Рассматривается течение в пристеночной области, содержащей точку нулевого поверхностного трения, в которой силы инерции и силы вязкости одинаковы по порядку величины. Предполагается также, что градиент давления вызывает в этой области нелинейные изменения продольной скорости. Поскольку трение на стенке в рассматриваемой области меняется в главном члене, а индуцированный и заданный градиенты давления однопорядковы, профиль скорости перед областью взаимодействия представим в виде

$$u = (y/\varepsilon)^2 + a(x/\varepsilon)y/\varepsilon + \dots \quad \varepsilon = \text{Re}^{-1/2} \quad (1.1)$$

где функция $a(x/\varepsilon)$ пропорциональна трению на поверхности и определяется из решения, описывающего течение в пограничном слое выше по течению от области взаимодействия. Используя уравнение изменения продольного импульса, получим следующее соотношение между толщиной области с нелинейными изменениями и ее длиной $\Delta y \sim \varepsilon (\Delta x)^{1/2}$. Условие равенства градиентов позволяет тогда найти длину области взаимодействия $\Delta x \sim \varepsilon^{2/3}$. При выводе последнего соотношения предполагалось, что длина области взаимодействия Δx превосходит толщину пограничного слоя перед областью взаимодействия $\delta_0^* \sim \varepsilon$. Легко видеть, что полученная оценка удовлетворяет этому условию. Предполагалось также, что изменение толщины пристеночной области с нелинейными изменениями Δy больше, чем изменение толщины основной части пограничного слоя $\Delta \delta_0^*$. Полученные оценки подтверждают это предположение

$$\Delta y \sim \varepsilon^{2/3}, \quad \Delta \delta_0^* \sim \varepsilon^{1/3}, \quad \Delta y \gg \Delta \delta_0^*$$

Оценки для возмущений продольной скорости, поперечной скорости, давления имеют вид

$$u \sim \Delta u \sim \varepsilon^{2/3}, \quad v \sim \varepsilon^{2/3}, \quad \Delta p \sim \varepsilon^{1/3}$$

Полученные оценки показывают, что трение на поверхности пластины перед областью взаимодействия равно $O(\varepsilon^{-2/3})$. Таким образом, при уменьшении трения в пограничном слое до величины $O(\varepsilon^{-2/3})$ существенную роль начинают играть процессы взаимодействия течения в пограничном слое с внешним сверхзвуковым течением. В результате в области взаимодействия происходит быстрое по сравнению с изменением в предшествующей области изменение трения на поверхности. Согласно результатам работ [1–2], трение на поверхности пропорционально $(-x_0)^{1/2}$, где x_0 — расстояние, отсчитываемое от точки нулевого трения. Приведенные выше оценки показывают, что взаимодействие приводит к смещению точки отрыва вверх по потоку на расстояние, равное $O(\varepsilon^{2/3})$.

2. В течении вблизи точки отрыва кроме пристеночной области для построения равномерно точного решения необходимо выделить еще две области (фиг. 1). В области I, поперечный и продольный размеры которой одинаковы и равны по порядку величины длине области взаимодейст-

вия Δx , функции течения в соответствии с полученными выше оценками могут быть представлены в виде следующих асимптотических разложений в новых координатах x_1 и y_1 :

$$\begin{aligned} u &= 1 + \varepsilon^{1/2} u_1(x_1, y_1) + \dots, & v &= \varepsilon^{1/2} v_1(x_1, y_1) + \dots \\ p &= \varepsilon^{1/2} p_1(x_1, y_1) + \dots, & \rho &= 1 + \varepsilon^{1/2} \rho_1(x_1, y_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

где p — индуцированное возмущение давления

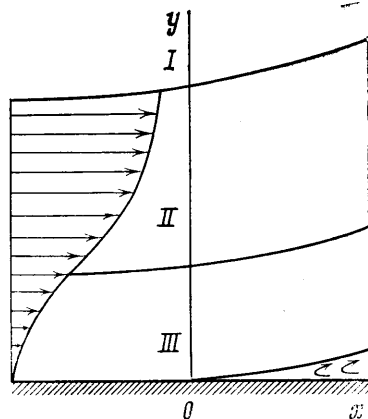
$$x = 1 + \varepsilon^{1/2} x_1, \quad y = \varepsilon^{1/2} y_1$$

Подстановка (2.1) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход $Re \rightarrow \infty$ приводят к линеаризованной системе уравнений Эйлера, решение которой, необходимое для дальнейшего анализа, имеет вид

$$\beta p_1(x_1, 0) = v_1(x_1, 0), \quad \beta = (M_\infty^2 - 1)^{1/2} \quad (2.2)$$

В области II, толщина которой равна толщине пограничного слоя выше по течению от точки отрыва, а длина равна длине области взаимодействия, вводятся следующие представления координат и функций:

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon y_2, & x &= 1 + \varepsilon^{1/2} x_1 \\ u &= u_0(y_2) + \varepsilon^{2/3} u_2(x_1, y_2) + \dots, \\ v &= \varepsilon^{1/3} v_2(x_1, y_2) + \dots \\ p &= \varepsilon^{2/3} p_2(x_1) + \dots, \\ \rho &= \rho_0(y_2) + \varepsilon^{2/3} \rho_2(x_1, y_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Подстановка (2.3) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход $Re \rightarrow \infty$ приводят после преобразований к системе уравнений (2.4), решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{du_0}{dy_2} &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} &= 0 \\ u_2 &= -A(x_1) \frac{du_0}{dy_2}, & v_2 &= \frac{dA}{dx_1} u_0(y_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $A(x_1)$ — неопределенная функция.

В области III вводится замена переменных и следующие асимптотические представления функций:

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon^{2/3} y_3, & x &= 1 + \varepsilon^{1/3} x_1 \\ u &= \varepsilon^{2/3} u_3(x_1, y_3) + \dots, & v &= \varepsilon^{1/3} v_3(x_1, y_3) + \dots \\ p &= \varepsilon^{1/3} p_3(x_1) + \dots, & \rho &= \rho_w + \varepsilon^{1/3} \rho_3(x_1, y_3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в систему уравнений Навье — Стокса после предельного перехода $Re \rightarrow \infty$ дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \rho_w v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + K + \frac{\partial p_3}{\partial x_1} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} &= 0, & \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Начальные условия определяются при сращивании решения в области III с решением в области, расположенной выше по течению, т. е. при $x_1 \rightarrow -\infty$. Используя представление профиля скорости $u_0(y_2)$ при $y_2 \rightarrow 0$,

можно получить

$$u_3(x_1 \rightarrow -\infty, y_3) = Ky_3^2/2\mu_w + By_3 \quad (2.7)$$

где B — константа. Сращивание решений в области III с решением в области II позволяет определить недостающие краевые условия

$$u_3(x_1, y_3 \rightarrow \infty) = Ky_3^2/2\mu_w + By_3 - A(x_1) [Ky_3/\mu_w + B] + o(1) \quad (2.8)$$

Сращивание решений в областях I и II позволяет определить зависимость между функциями A и p_3

$$p_3(x_1) = \beta^{-1} \frac{dA}{dx_1} \quad (2.9)$$

Заменой переменных преобразуем краевую задачу (2.6)–(2.9) к виду

$$x_3 = \mu_w^{2/7} \rho_w^{-1/7} \beta^{-1/7} K^{-5/7} X; \quad y_3 = \mu_w^{4/7} \rho_w^{-1/7} \beta^{-1/7} K^{-3/7} Y \quad (2.10)$$

$$u_3 = \mu_w^{1/7} \rho_w^{-4/7} \beta^{-2/7} K^{1/7} U, \quad v_3 = \mu_w^{3/7} \rho_w^{-5/7} \beta^{1/7} K^{3/7} V$$

$$p_3 = \mu_w^{2/7} \rho_w^{-1/7} \beta^{-1/7} K^{2/7} P, \quad B = \mu_w^{-3/7} \rho_w^{-2/7} \beta^{-1/7} K^{1/7} B_0$$

$$A = \mu_w^{4/7} \rho_w^{-2/7} K^{-3/7} A_0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + 1 + \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \quad \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad P = \frac{\partial A_0}{\partial X}$$

$$U(X \rightarrow -\infty, Y) = Y^2/2 + B_0, \quad Y, \quad U(X, 0) = V(X, 0) = 0$$

$$U(X, Y \rightarrow \infty) = Y^2/2 + B_0 Y - A_0(X) [Y + B_0] + o(1)$$

3. При $X \rightarrow -\infty$ решение краевой задачи (2.10) представимо в следующем виде:

$$U = Y^2/2 + B_0 Y + C_0 U_0(Y) \exp(\alpha X),$$

$$V = C_0 (V_0 + Y^2/2 + B_0 Y) \exp(\alpha X), \quad P = C_0 \exp(\alpha X) \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) приводит краевую задачу (2.10) к виду

$$V_0''' - \alpha V_0' (Y^2/2 + B_0 Y) + V_0 \alpha (Y + B_0) + \alpha^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$V_0'(0) = -B_0, \quad V_0'(\infty) = 0, \quad V_0''(\infty) = 0, \quad V_0(0) = 0$$

При больших значениях параметра B_0 замена переменных (3.3) позволяет получить следующую краевую задачу:

$$\alpha = B_0^{5/4} \alpha_1, \quad Y = B_0^{3/4} Y_1, \quad V_0 = B_0^{3/4} V_1 \quad (3.3)$$

$$V_1''' - \alpha_1 V_1' + \alpha_1 V_1 + \alpha_1^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$V_1'(0) = -1, \quad V_1'(\infty) = V_1''(\infty) = 0$$

которая описывает линейный режим «свободного взаимодействия». Впервые решение задачи (3.4) получено в работе [8], в частности выражение для параметра α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = [-3\text{Ai}'(0)]^{3/4}$$

где $\text{Ai}(Y_1)$ — функция Эйри [9].

При малых значениях параметра B_0 замена переменных (3.5) приводит краевую задачу (3.2) к виду

$$\alpha = B_0^{3/4} \alpha_2, \quad Y = B_0^{-1/4} Y_2, \quad V_0 = V_2 B_0^{5/4} \quad (3.5)$$

$$V_2''' - \alpha_2 Y_2^2/2 V_2' + \alpha_2 V_2 Y_2 + \alpha_2^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$V_2'(0) = -1, \quad V_2'(\infty) = V_2''(\infty) = 0$$

Еще одна замена переменных преобразует дифференциальное уравне-

ние для функции V_2 к дифференциальному уравнению второго порядка для функции f

$$V_2' = Y_2^2/2 \cdot z, \quad z' = t^{-5/4} f, \quad t = 2^{1/2} \alpha_2^{-1/2} t_1, \quad Y_2 = t^{1/2}$$

$$t_1^2 f'' + t_1 f' - (t_1^2 + 1/16) f = -\alpha_2^{15/8} 2^{7/8} t_1^{5/4} \quad (3.7)$$

Общее решение (3.7) представим в виде

$$f = c_1 I_{1/4}(t_1) + c_2 K_{1/4}(t_1) + L_{1/4}(t_1)$$

где $I_{1/4}$, $K_{1/4}$ — модифицированные функции Бесселя, $L_{1/4}$ — модифицированная функция Струве. Используя граничные условия, можно получить следующее выражение для параметра α_2 :

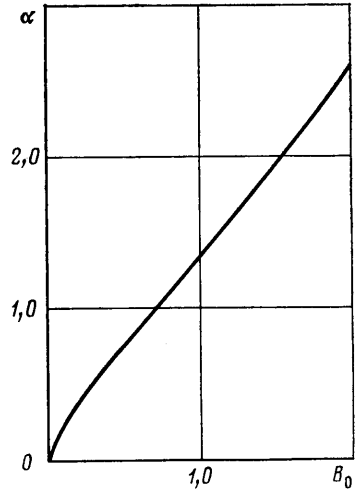
$$\alpha_2 = 2\pi^{-1/2} [\Gamma(5/4)/\Gamma(3/4)]^{3/2}$$

К аналогичному результату для α_2 можно прийти, используя результаты работ [7, 10].

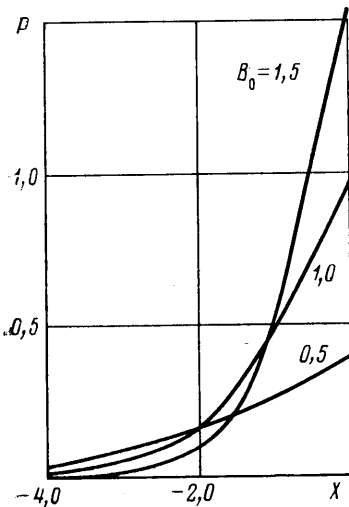
Для значений параметра $B_0 = O(1)$ решение краевой задачи (3.2) получено с помощью численного интегрирования. Зависимость $\alpha(B_0)$ приведена на фиг. 2.

Результаты решения линейной краевой задачи (3.2) использовались при численном интегрировании нелинейной краевой задачи (2.10) в качестве начальных условий при $X \rightarrow -\infty$. Система уравнений аппроксимировалась конечно-разностными формулами второго порядка точности аппроксимации по переменной Y и первого порядка точности аппроксимации по переменной X .

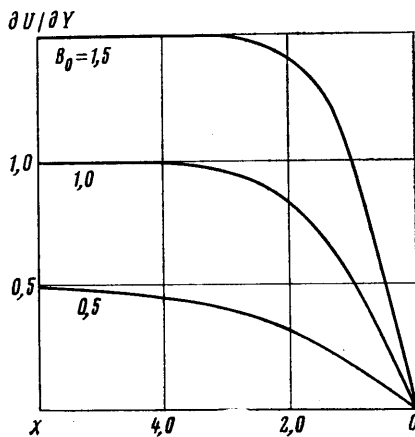
Для интегрирования системы уравнений при $X = \text{const}$ использовался метод прогонки. Удовлетворение условия взаимодействия (2.3) осуществлялось в результате пристрелки. Результаты решения представлены на фиг. 3–4 для трех значений параметра B_0 . На фиг. 3 изображено распределение возмущения давления P в зависимости от X в области взаимодействия до точки отрыва. Можно видеть, что



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

рост параметра B_0 приводит к уменьшению длины области взаимодействия, что согласуется с результатами, полученными при анализе линейной краевой задачи. На фиг. 4 изображено распределение напряжения трения на поверхности пластины, отнесенного к трению в пограничном слое перед областью взаимодействия.

4. Краевая задача (3.15) содержит параметр подобия B_0 . Этот параметр пропорционален отношению трения на поверхности перед областью взаимодействия и заданного градиента давления. Для определения величины параметра B_0 необходимо знать положение точки отрыва, которое зависит от условий, заданных ниже по течению, в частности от условий в точке присоединения. Положение точки отрыва на поверхности определяет величину трения на поверхности в этой точке и дает возможность найти величину параметра B_0 и соответственно описать течение в окрестности точки отрыва.

Краевая задача (3.15) описывает не только течение в окрестности точки отрыва, но и другие течения, в которых оказываются существенными эффекты взаимодействия. К таким течениям может относиться, например, обтекание пластины сверхзвуковым потоком в присутствии неблагоприятного градиента давления, если в точке, где трение на поверхности равно по порядку величины $O(\epsilon^{-1/2})$, задано давление, отличающееся от давления в невязком течении в этой точке на величину $O(\epsilon^{1/2})$. Разность давлений может быть как положительной, так и отрицательной, выбор соответствующего решения определяется знаком константы C_0 в решении (4.1). Характеристики течения в области взаимодействия зависят от параметра подобия B_0 . При больших значениях параметра течение описывается теорией «свободного взаимодействия» [4–5]. При малых значениях параметра B_0 задача сводится к изученной в работе [7], результаты которой применимы в области, где трение на поверхности положительно и не обращается в ноль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, v. 1, № 1, p. 43–69.
2. Ландау Л. Д., Луфшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953, с. 188–194.
3. Brown S. N., Stewartson K. Laminar separation.— Ann. Rev., Fluid Mech., Palo Alto, Calif., 1969, v. 1, p. 45–72.
4. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53–57.
5. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. A, 1969, v. 312, № 1509, p. 181–206.
6. Сычев В. В. О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47–59.
7. Stewartson K. Is the singularity at separation removable? — J. Fluid Mech., 1970, v. 44, № 2, p. 347–364.
8. Lighthill M. J. On boundary layers and upstream influence. 2. Supersonic flows without separation.— Proc. Roy. Soc. A, 1953, v. 217, № 1131, p. 478–507.
9. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 42–51.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1983