МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1984

УДК 532.525.2

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ СЛАБО ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ

ЗУБЦОВ А. В.

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в закрученной струе, которая возникает в результате действия точечного источника, передающего окружающей его среде конечный поток импульса. Исследован случай больших чисел Рейнольдса в предположении, что циркуляция азимутальной составляющей скорости является постоянной величиной на больших расстояниях от оси струи. Построено асимптотическое решение уравнений пограничного слоя для случая малой циркуляции. Показано, что при слабой закрутке струи взаимодействие азимутального и осевого движения в целом имеет нелинейный характер.

Решение задачи о движении вязкой жидкости в ламинарных и турбулентных струях имеет широкий спектр приложений в практической аэродинамике. Вместе с тем даже для случая ламинарного движения известно лишь небольшое количество примеров, моделирующих струйные течения, для которых построены точные или же асимптотические решения уравнений Навье – Стокса. В работе [1] получено решение уравнений Навье – Стокса для незакрученной струи, возникающей в безграничном пространстве, заполненном несжимаемой жидкостью, если туда поместить точечный источник потока импульса. При больших числах Рейнольдса эта же задача решена в рамках уравнений пограничного слоя в работе [2]. Менее исследовано течение вязкой жидкости в закрученных струях, где существенную роль играет взаимодействие азимутальной и осевой составляющих скорости. При больших числах Рейнольдса асимптотическое решение для закрученной струи построено в работах [3—5]. Однако использование этих решений ограничено тем, что они справедливы лишь при достаточно большом удалении от источника струи. В настоящей работе рассмотрена ламинарная струя, которая возникает в результате действия точечного источника потока импульса, помещенного в несжимаемую жидкость, заполняющую безграничное пространство. Однако в отличие от работ [1—5] предполагается, что течение в струе закрученное, так что на больших расстояниях от оси струи циркуляций азимутальной составляющей скорости величина постоянная, отличная от нуля.

Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ. Через U, V, W обозначим осевую, радиальную и азимутальную составляющие скорости, P – статическое давление. В начало координат поместим источник, сообщающий несжимаемой жидкости конечный поток импульса J в направлении оси x. Рассматривается случай, когда циркуляция азимутальной составляющей скорости Γ на внешней границе струи не зависит от координаты x. Предположим, что течение в струе установившееся и обладает осевой симметрией. Из теории размерностей [6] следует, что рассматриваемая задача имеет автомодельное решение, которое удовлетворяет следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям и граничным условиям:

$$(\eta u')'+[\eta^2(p+u^2/2)]'-\eta v u'=-\mathrm{Re}^{-1}\,\eta(\eta^2 u)'' \tag{1}$$

$$w''+(1/\eta+\eta u-v)w'-(1/\eta-\eta u+v)w/\eta=-\mathrm{Re}^{-1}(\eta^2 w)''$$

$$p'-\frac{w^2}{\eta}=\mathrm{Re}^{-1}\left[\frac{(\eta v')'}{\eta}-\frac{v}{\eta^2}+u(\eta v)'-vv'+\mathrm{Re}^{-1}(\eta^2 v)''\right]$$

$$\eta(\eta u)''-(\eta v)'=0,\qquad \int_0^\infty \eta[u^2+p+2\,\mathrm{Re}^{-1}(\eta u)']d\eta=1$$

$$\eta=0,\qquad v=w=u'=0$$

$$\eta\to\infty,\quad u\to 0,\quad v\to 0,\quad w\to\frac{\gamma}{\eta},\quad p\to-\frac{\gamma^2}{2\eta^2}$$

$$u=\frac{\nu x U}{J},\quad w=\frac{\nu x W}{J},\quad v=\frac{xV}{\sqrt{J}}$$

$$p=\frac{\nu^2 x^2 P}{\rho J^2},\quad \eta=\frac{\sqrt{J}r}{\nu x},\quad \mathrm{Re}=\frac{J}{\nu^2},\quad \gamma=\frac{\Gamma}{\sqrt{J}}$$

Здесь штрих соответствует дифференцированию по переменной η. Исследование рассматриваемой задачи проведем при условии, что $\mathrm{Re}\gg 1$. В этом случае возмущенная область течения представляет собой тонкую струю $r/x\sim\eta\,\mathrm{Re}^{-1/2}\ll 1$. Решение системы уравнений (1) представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра Re^{-1}. Тогда в главном приближении составляющие скорости и давление будут удовлетворять уравнениям пограничного слоя

$$\begin{gathered} u'+\eta(p+u^2)-vu=0\\ w''+(1/\eta+\eta u-v)w'-(1/\eta-\eta u+v)w/\eta=0\\ p'=\frac{w^2}{\eta},\quad \eta(\eta u)'=(\eta v)',\quad \int_0^\infty \eta(u^2+p)d\eta=1 \end{gathered}\tag{2}$$

и следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered} \eta=0,\quad v=w=0,\quad u<\infty\\ \eta\to\infty,\quad u\to 0,\quad w\to\gamma/\eta,\quad p\to-\gamma^2/(2\eta^2) \end{gathered}\tag{3}$$

Решение задачи (2), (3) будем искать для случая слабой закрутки струи, т. е. предположим, что $1\gg\gamma\gg\mathrm{Re}^{-1/2}$. В основной части струи решение представим в виде ряда по степеням параметра γ

$$\begin{gathered} u=u_{10}(\eta)+\gamma^2 u_{11}(\eta)+\ldots,\quad w=\gamma w_{11}(\eta)+\ldots\\ v=v_{10}(\eta)+\gamma^2 v_{11}(\eta)+\ldots,\quad p=\gamma^2 p_{11}(\eta)+\ldots \end{gathered}\tag{4}$$

Функции u_{10}, v_{10} удовлетворяют уравнениям, которые описывают течение в незакрученной струе. Решение этих уравнений известно [2]

$$u_{10}=\frac{32\alpha^2}{(4+\alpha^2\eta^2)^2},\quad v_{10}=\frac{4\alpha^2\eta(4-\alpha^2\eta^2)}{(4+\alpha^2\eta^2)^2},\quad \alpha^2=\frac{3}{8}\tag{5}$$

Функция w_{11} удовлетворяет уравнению

$$w_{11}''+\frac{1+a_0}{\eta}w_{11}'-\frac{1-a_0}{\eta^2}w_{11}=0,\qquad a_0=\frac{4\alpha^2\eta^2}{4+\alpha^2\eta^2}\tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) выписывается в явном виде

$$w_{11}=b_1\eta^{-1}+4b_2\eta^{-1}(4+\alpha^2\eta^2)^{-1}$$

Из граничных условий (3) следует, что $b_1=-b_2=1$. Таким образом, получаем

$$w_{11}=\alpha^2\eta(4+\alpha^2\eta^2)^{-1} \tag{7}$$

Из уравнения (2) и формулы (7) следует выражение для распределения давления $p_{11}=-{}^1/_2\alpha^2(4+\alpha^2\eta^2)^{-1}$. Функции u_{11}, v_{11} удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$\begin{gathered} u_{11}'+\eta(2u_{10}u_{11}+p_{11})-(v_{10}u_{11}+v_{11}u_{10})=0 \\ \eta(\eta u_{11})'-(\eta v_{11})'=0 \end{gathered} \tag{8}$$

$$\eta=0,\quad v_{11}=0,\quad u_{11}<\infty \tag{9}$$

Решение уравнений (8) может быть представлено в виде

$$u_{11}=\frac{a'(\eta)}{\eta},\qquad v_{11}=a'(\eta)-\frac{a(\eta)}{\eta} \tag{10}$$

Функция $a(\eta)$ определяется из решения следующего уравнения:

$$a_{\xi\xi}''+\frac{2a}{\xi(1-\xi)}=\frac{1}{2\alpha^2(1-\xi)^3};\qquad \xi=\alpha^2\eta^2(4+\alpha^2\eta^2)^{-1} \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$a=C_1\xi(1-\xi)+C_2\{1-2\xi+2\xi(\xi-1)\ln[\xi/(1-\xi)]\}+a_0(\xi) \tag{12}$$

$$a_0=\frac{1}{2\alpha^2}\Biggl[2\xi+\frac{\xi}{2(1-\xi)}-2\xi(1-\xi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k^2}+$$

$$+(2\xi-1)\ln(1-\xi)-\xi(1-\xi)\ln^2(1-\xi)\Biggr]\qquad (C_1, C_2=\mathrm{const})$$

Из формул (10), (12) получаем следующие асимптотики при $\eta\to0$:

$$u_{11}\to{}^1/_2C_1\alpha^2-2C_2\alpha^2[1+\ln(\alpha\eta/2)]+{}^7/_8$$

$$v_{11}\to{}^1/_4C_1\alpha^2\eta-C_2\alpha^2[(\alpha^2\eta)^{-1}+\eta({}^3/_2+\ln(\alpha\eta/2))]+{}^7/_{16}\eta$$

Для того чтобы выполнялись условия (9), необходимо положить $C_2=0$. Коэффициент C_1 остается пока неопределенным. Асимптотики функций u_{11}, v_{11} при $\eta\to\infty$ имеют вид

$$\begin{gathered} u_{11}={}^1/_8-(\alpha\eta)^{-2}+O(\eta^{-4}\ln^2\eta) \\ v_{11}=\eta[{}^1/_{16}-2(\alpha\eta)^{-2}+(\alpha\eta)^{-2}\ln(\alpha\eta/2)+O(\eta^{-4}\ln^2\eta)] \end{gathered} \tag{13}$$

Из выражений (13) следует, что полученное решение не удовлетворяет исходным граничным условиям (3) при $\eta\to\infty$. Причина этого дефекта заключается в том, что асимптотическое представление искомого решения (4) перестает быть пригодным при $\eta\gg1$. При $\eta\gg1$ главные члены уравнений невозмущенного движения ($\gamma=0$) ведут себя как $u_{10}'\sim\eta^{-5}$, а главные члены уравнений возмущенного движения — $\gamma^2\eta p_{11}\sim\gamma^2\eta^{-1}$. Таким образом, при $\eta\sim\gamma^{-1/2}$ необходимо уже в первом приближении учитывать влияние слабой закрутки струи на движение в осевом направлении. Во второй области, где $\eta\sim\gamma^{-1/2}$, решение задачи следует искать в виде

$$\begin{gathered} u=\gamma^2u_2(\eta_2, \gamma, \mathrm{Re}),\quad w=\gamma^{3/2}w_2(\eta_2, \gamma, \mathrm{Re}) \\ v=\gamma^{5/2}v_2(\eta_2, \gamma, \mathrm{Re}),\quad p=\gamma^3p_2(\eta_2, \gamma, \mathrm{Re}) \end{gathered} \tag{14}$$

Функции u_2, v_2, w_2, p_2 удовлетворяют уравнениям, которые с точностью до членов порядка $O[(\gamma\,\mathrm{Re})^{-1}]$ имеют следующий вид:

$$u_2'+\eta_2 p_2-v_2u_2=-\gamma\eta_2u_2^2$$

$$w_2''+\left(\frac{1}{\eta_2}-v_2\right)w_2'-\left(\frac{1}{\eta_2}+v_2\right)\frac{w_2}{\eta_2}=\gamma\eta_2u_2\left(w_2'+\frac{w_2}{\eta_2}\right)$$

$$p_2'=w_2^2/\eta_2,\quad (\eta_2v_2)'=\gamma\eta_2(\eta_2u_2)' \tag{15}$$

Решение системы (15) может быть представлено в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра γ. Для главных членов этого разложения справедливы следующие граничные условия при $\eta_2\to 0$:

$$\eta_2\to 0,\quad u_{20}\sim\frac{32}{\alpha^2\eta_2^4}+\frac{1}{8},\quad v_{20}\sim-\frac{4}{\eta_2},\quad w_{20}\sim\frac{1}{\eta_2},\quad p_{20}\sim-\frac{1}{2\eta_2^2} \tag{16}$$

Можно убедиться в том, что асимптотическое представление (16) является точным решением уравнений (15) при $\gamma=0$. Используя решение (16), можно показать, что при $\eta_2\sim\gamma^{-1/2}$ все члены, входящие в правые и левые части уравнений (15), становятся однопорядковыми величинами. Следовательно, при больших значениях η_2 первое приближение искомого решения определяется из более сложных уравнений движения, чем система (15).

В третьей области, где $\eta\sim\gamma^{-1}$, решение задачи представим в виде

$$u=\gamma^2u_3(\eta_3,\gamma,\mathrm{Re}),\quad w=\gamma^2w_3(\eta_3,\gamma,\mathrm{Re}),$$

$$v=\gamma v_3(\eta_3,\gamma,\mathrm{Re}),\quad p=\gamma^4p_3(\eta_3,\gamma,\mathrm{Re}),\quad \eta_3=\gamma\eta \tag{17}$$

При $\gamma\to 0$ и $\mathrm{Re}\to\infty$ функции u_3, v_3, w_3, p_3 удовлетворяют уравнениям, которые с точностью до членов порядка $O[(\gamma^2\,\mathrm{Re})^{-1}]$ совпадают с дифференциальными уравнениями системы (2). Граничные условия в этой области имеют вид

$$\eta_3\to 0,\quad u_3\to{}^1/_8,\quad w_3\to 1/\eta_3,\quad p_3\to -1/(2\eta_3^2),\quad v_3\to -4/\eta_3$$

$$\eta_3\to\infty,\quad u_3\to 0,\quad w_3\to 1/\eta_3,\quad p_3\to -1/(2\eta_3^2) \tag{18}$$

Заметим, что в независимости от вида решения для функций u_3, v_3 можно выписать решение для w_3, p_3, удовлетворяющее уравнениям (2) и граничным условиям (18)

$$w_3=1/\eta_3,\quad p_3=-1/(2\eta_3^2) \tag{19}$$

Решение для функций u_3, v_3 представим в виде $u_3=b'/\eta_3$, $v_3=b'-b/\eta_3$. Подставляя эти выражения в систему (2), получим уравнение для определения функции $b(\eta_3)$ (граничные условия для функции b следуют из (18) и условия сходимости интеграла, входящего в систему (2))

$$b''+\frac{(b-1)b'}{\eta_3}=\frac{1}{2};\quad \eta_3\to 0,\quad b\to 4;\quad \eta_3\to\infty,\quad b\to\frac{\eta_3}{\sqrt{2}}$$

Решение задачи для функции $b(\eta_3)$ можно записать в виде $b=2(tI_1)_t'/I_1$, где $t=\eta_3/2\sqrt{2}$, а $I_1(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Составляющие скорости u_3, v_3 выражаются через функцию I_1 следующим образом:

$$u_3=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{t^2}+\left(\frac{I_1'}{I_1}\right)^2\right],\quad v_3=\frac{t}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{I_1'}{I_1}\left(\frac{1}{t}+\frac{I_1'}{I_1}\right)\right] \tag{20}$$

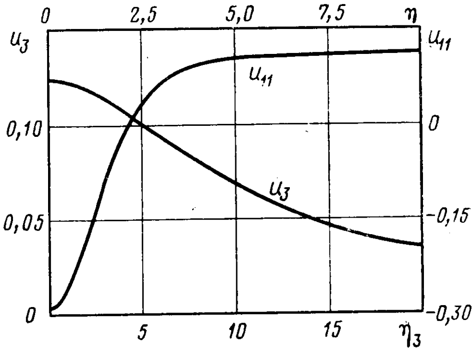
Из асимптотического поведения функции $I_1(t)$ при $t\to\infty$ получаем

$$u_3 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\eta_3} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\eta_3^3} + \ldots, \qquad v_3 \sim -\frac{1}{\eta_3} - \frac{3\sqrt{2}}{\eta_3^2} + \ldots$$

Для окончательного решения задачи осталось найти значение постоянной C_1, входящей в выражение (12). Значение C_1 определяется из условия, что решение задачи с учетом закрутки струи удовлетворяет интегральному соотношению, входящему в систему (2)

$$C_1 = \frac{4\pi^2}{9} - \frac{34}{3} - 4\int_0^\infty t\left[u_3^2 - \frac{\alpha^2}{2(4+\alpha^2t^2)}\right]dt \approx -6{,}2$$

где $u_3(t)$ определяется формулой (20).



Фиг. 1

Значение осевой составляющей скорости при $\eta=0$ определяется выражением $u(0)\approx 0{,}75-0{,}29\gamma^2$. На фиг. 1 представлено поведение функций $u_{11}(\eta)$, $u_3(\eta_3)$, определяющих профиль осевой составляющей скорости во внутренней и внешней частях струи.

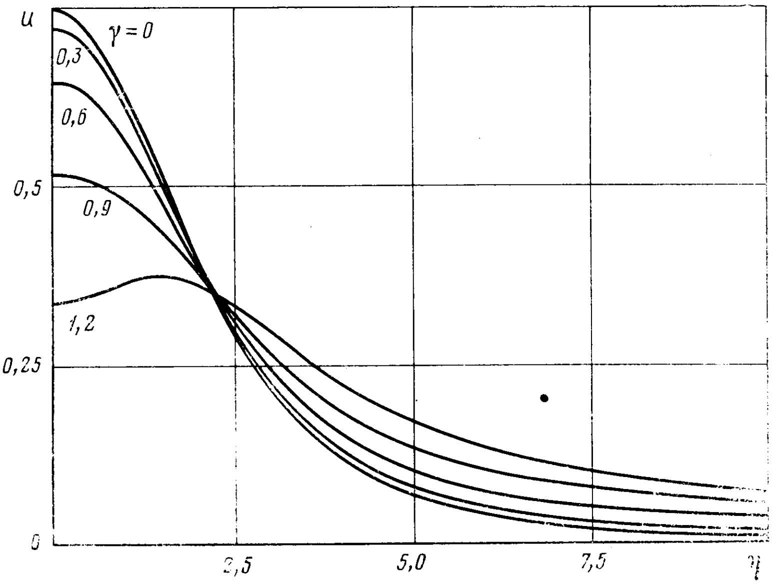
Можно построить составное решение, равномерно-пригодное в различных областях течения

$$u(\eta,\gamma) = u_{10}(\eta) + \gamma^2[u_{11}(\eta) + u_3(t) - {}^1/_8], \qquad w = \gamma\alpha^2\eta/(4+\alpha^2\eta^2)$$

$$u_{11} = \frac{(1-\xi)^2}{4}\left[2 + \frac{3-4\xi}{2(1-\xi)} + \frac{\xi}{2(1-\xi)^2} + 4\ln(1-\xi) + (2\xi-1)\ln^2(1-\xi) + \right.$$

$$\left. + 2(2\xi-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k^2}\right] + \frac{8\alpha^2(4-\alpha^2\eta^2)}{(4+\alpha^2\eta^2)^3}C_1, \quad \xi = \frac{\alpha^2\eta^2}{4+\alpha^2\eta^2}$$

где функции $u_{10}(\eta)$, $u_3(t)$ определяются формулами (5), (20).



Фиг. 2

Поведение функции $u(\eta, \gamma)$ показано на фиг. 2. В заключение необходимо отметить, что если в основной части струи ($\eta \sim O(1)$) возмущение профиля скорости определяется из решения линейных уравнений, то во внешней части струи ($\eta \sim \gamma^{-1}$) уравнения для возмущений нелинейные. Более того, характеристики течения в основной части струи определяются полностью только тогда, когда получено решение нелинейных уравнений во внешней части струи. Таким образом, даже для случая слабой закрутки струи влияние вращательного движения на профиль скорости в осевом направлении имеет в целом нелинейный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д.* Об одном новом точном решении уравнений Навье – Стокса.– Докл. АН СССР, 1944, т. 43, № 7, с. 299—301.
2. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung.– ZAMM, 1933, B. 13, № 4, S. 260–263.
3. *Лойцянский Л. Г.* Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.– ПММ, 1953, т. 17, вып. 1, с. 3–16.
4. *Дубов В. С.* Распространение свободной закрученной струи в затопленном пространстве.— В кн.: Энергомашиностроение. Л.: Машгиз, 1955, с. 137—145. (Тр. Ленинград. политехн. ин-та, № 176.)
5. *Фалькович С. В.* Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, заполненном той же жидкостью.— ПММ, 1967, т. 31, № 2, с. 282–288.
6. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VII.1983