

УДК 532.517.4:518.12

**К РАСЧЕТУ ТРЕХМЕРНОГО СЛАБОРАСШИРЯЮЩЕГОСЯ
ТЕЧЕНИЯ В СТРУЕ И КАНАЛЕ**

ВАСИЛЬЕВ В. И., КРАШЕНИННИКОВ С. Ю.

Представлены результаты расчета ламинарного течения в трубе квадратного сечения и расчета распространения турбулентной струи из лепесткового сопла в спутном потоке. Для расчета вторичных течений использован прием разделения поля поперечной скорости на потенциальную и завихренную составляющие. Результаты расчета течения в трубе сопоставлены с расчетами других авторов и с экспериментальными данными.

Для расчета течения в турбулентной струе использована однопараметрическая модель турбулентности, учтено влияние неоднородности распределения продольной составляющей скорости на компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Результаты расчета течения в струе за четырехлепестковым соплом сопоставлены с экспериментальными данными.

1. Для описания трехмерных струйных течений вязкой жидкости, а также течений в цилиндрических каналах с некруговой формой поперечного сечения Патанкармом и Снолдингом [1] предложена параболизированная система уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \text{div}(\mathbf{V}u) = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial vu}{\partial x} + \text{div}(\mathbf{V}v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial uw}{\partial x} + \text{div}(\mathbf{V}w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты, u, v, w — составляющие вектора скорости, τ — составляющие напряжения трения, жидкость предполагается несжимаемой, т. е. плотность $\rho = \text{const}$. Продольная ось x направлена вдоль выделенного направления движения (ось струи или канала) и диффузионные потоки вдоль этого направления не учитываются. Вектор поперечной скорости \mathbf{V} с составляющими v, w лежит в поперечной плоскости, перпендикулярной направлению x , оператор $\text{div} = \partial/\partial y + \partial/\partial z$ также действует в этой плоскости. Давление разделено на две составляющие: постоянную в поперечном сечении составляющую $P(x)$ и переменную p , в дальнейшем называемую поперечным возмущением давления. Если ограничиться рассмотрением ламинарных течений с большими числами Рейнольдса, то можно показать, что такое разделение давлений оправдано.

Пусть U — характерная скорость (скорость на входе в канал или скорость истечения струи), R — характерный размер (эквивалентный радиус канала или сопла), $\text{Re} = UR/\nu \rightarrow \infty$. Считая, что характерные поперечные масштабы потока L_y, L_z много меньше продольного L_x , а конвективные и

вязкие члены имеют одинаковый порядок, иначе говоря, $L_y/L_x \sim L_z/L_x \sim 1/Re$, нетрудно получить оценки: $|\mathbf{V}|/U = O(1/Re)$, $p/\rho U^2 = O(1/Re)$, $\Delta P/\rho U^2 = O(1)$, ΔP — продольный перепад давления на длине L_x .

В свободных течениях dP/dx определяется внешним невязким обтеканием, в канале для его определения используется условие сохранения потока массы жидкости. Поперечное возмущение давления p определяется из решения системы (1.1) — (1.4).

Система уравнений (1.1) — (1.4) параболична относительно направления x и может быть проинтегрирована численно пошаговым конечно-разностным методом. Система соотношений для определения поперечных перетеканий (1.2) — (1.4) эквивалентна двумерным нестационарным уравнениям Навье — Стокса для плоских течений, основные трудности при численном интегрировании которых в переменных скорость — давление связаны с определением поля p [2]. В плоском случае, для того чтобы обойти эти затруднения, прибегают к преобразованию уравнений, с переходом к новым переменным: завихренность — функция тока. В известных методах решения системы (1.1) — (1.4), Патанкара и Сполдинга [1], а также Брили [3], используются естественные переменные (\mathbf{V}, p) . В методе [1] давление p определяется итерационным способом, т. е. фактически не из решения уравнения Пуассона, а подбирается таким образом, чтобы поле поперечной скорости одновременно удовлетворяло уравнениям движения и неразрывности. В методе Брили [3] давление определяется из уравнения Пуассона, но для того чтобы скорость \mathbf{V} помимо уравнений движения удовлетворяла уравнению неразрывности, приходится вводить поправку к скорости, в результате к конечно-разностным аналогам уравнений (1.1) — (1.4) добавляется еще одно соотношение. При определении поперечных возмущений давления по методикам [1, 3] возникают значительные вычислительные трудности, кроме того, отсутствуют указания на способ задания начального распределения p .

Преобразование уравнений (1.2) — (1.4) с целью исключения давления позволяет несколько упростить численный метод расчета поперечных перетеканий. Ниже представлены результаты расчета ламинарного течения в трубе квадратного сечения и расчета распространения турбулентной струи из лепесткового сопла в спутном потоке, полученные с помощью разделения поля поперечной скорости на потенциальную и завихренную составляющие. Способы преобразования уравнений несколько различаются в зависимости от того, какое условие используется на границе области: с нулевым (условие прилипания) или ненулевым значением скорости.

2. Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости в трубе квадратного сечения полушириной H . Ось x направлена вдоль канала, нижняя стенка совпадает с плоскостью $y=0$, левая — с плоскостью $z=0$.

Компоненты тензора напряжений трения

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \nu \frac{\partial u}{\partial y}, & \tau_{xz} &= \nu \frac{\partial u}{\partial z}, & \tau_{yy} &= 2\nu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= \nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \tau_{zz} &= 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Составляющие скорости безразмериваются с помощью скорости на входе в канал U , координаты — по полуширине H , давление — по ρU^2 , число Рейнольдса $Re = UH/\nu$. Для безразмерных величин в дальнейшем сохраняются прежние обозначения.

Поперечную компоненту скорости можно разделить на потенциальную и завихренную составляющие

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.2)$$

Доказательство однозначного определения \mathbf{V} по распределениям φ и ψ можно найти в [4]. Подставив соотношения (2.1) — (2.2) в уравнения (1.2) — (1.4), получим

$$\Delta \varphi = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \operatorname{div} (\mathbf{V} \Delta \psi) = \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.4)$$

Здесь ∇ — двумерный векторный оператор с компонентами $\nabla = (\partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, действующий в поперечной плоскости. Уравнение Пуассона (2.3) для определения потенциальной компоненты получено из уравнения неразрывности (1.4). Эволюционное уравнение четвертого порядка для определения завихренности составляющей получено путем перекрестного дифференцирования и вычитания (1.2), (1.3).

Обычно при численном интегрировании уравнения четвертого порядка оно сводится к системе двух уравнений второго порядка [2]. В плоском случае уравнение, аналогичное (2.4), сводится к эволюционному уравнению для завихренности и уравнению Пуассона для функции тока. В рассматриваемом случае из-за наличия переменной u в левой части (2.4) получить эволюционное уравнение для завихренности не удается и приходится вводить другой параметр

$$\chi = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u w}{\partial y} - \frac{\partial u v}{\partial z} \right) \quad (2.5)$$

Продольная компонента завихренности $\omega = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z$ связана с χ соотношением

$$\chi - \omega = \frac{1}{u} \left(w \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv S$$

Система соотношений, эквивалентная (2.4) такова

$$\begin{aligned} \frac{\partial u \chi}{\partial x} - \operatorname{div}(\nabla \chi) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \chi + \left\{ \operatorname{div} \left(\nabla S - \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla S - \frac{\partial u}{\partial x} \nabla \psi \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(u \nabla \psi) = -u \chi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (2.7)$$

Таким образом, полная система для расчета течения в канале состоит из дифференциальных уравнений (1.1), (2.3), (2.6), (2.7) и замыкающих алгебраических соотношений (2.1) — (2.2). Для определения продольного перепада давления служит условие сохранения потока массы.

Вводя новые переменные $x^\circ = x/\operatorname{Re}$, $v^\circ = v/\operatorname{Re}$, $w^\circ = w/\operatorname{Re}$, можно исключить из этих соотношений число Рейнольдса, т. е. в новых переменных решение автомодельно по числу Рейнольдса.

Благодаря симметрии течения расчет проводился в одной четверти канала. На твердой стенке ставилось условие прилипания. На стенке, совпадающей с плоскостью $y=0$, условие прилипания для всех трех компонент скорости выражается как

$$u_w = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_w = 0, \quad \psi_w = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_w = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_w \quad (2.8)$$

Вблизи стенки продольная составляющая скорости имеет разложение

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w y + \frac{dP}{dx^\circ} \frac{y^2}{2} + O(y^3), \quad y \rightarrow 0$$

Используя это разложение и определение (2.5), можно показать, что переменная χ не имеет особенности на стенке, кроме того, необходимые в численном расчете значения параметров χ_w , S_w выражаются через продольную составляющую завихренности

$$\chi_w = 2\omega_w, \quad S_w = -\omega_w \quad (2.9)$$

Способ определения ω_w при численном расчете полностью аналогичен используемому в плоском случае [2]. Поскольку у стенки при $y \rightarrow 0$

$$\psi = \psi_w + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_w y + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_w \frac{y^2}{2} + O(y^3) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_w y - \omega_w \frac{y^2}{2} + O(y^3)$$

то с точностью первого порядка по шагу Δy разностной сетки

$$\omega_w = \frac{(\partial \psi / \partial z)_w \Delta y - \psi(\Delta y)}{\Delta y^2 / 2} + O(\Delta y) \quad (2.10)$$

При численном интегрировании уравнений (2.6), (2.7) это условие, являющееся следствием двух последних соотношений в (2.8), используется вместо условия $(\partial \psi / \partial y)_w = (\partial \psi / \partial z)_w$.

Граничные условия в плоскости симметрии $y=H$

$$\partial u / \partial y = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0 \quad (2.11)$$

Аналогично записываются граничные условия в плоскостях $z=0$, $z=H$.

Двумерные уравнения Пуассона (2.3), (2.7) численно интегрировались с помощью итерационного продольно-поперечного метода [5] на каждом слое по x до установления. Уравнение (1.1) параболического типа решалось продольно-поперечным методом [5]. В уравнении (2.6) член в фигурных скобках вычислялся по значениям параметров со слоя, предшествующего расчетному. Для интегрирования (2.6) можно использовать тот же алгоритм, что и для (1.1), однако основным преимуществом продольно-поперечного метода является безусловная устойчивость конечно-разностной схемы, вследствие чего шаг интегрирования по продольной координате Δx можно выбирать произвольным. Такая безусловная устойчивость достигается только тогда, когда не только уравнение, но и граничные условия аппроксимированы неявной конечно-разностной схемой. Поскольку условие (2.10) использует явную аппроксимацию, оказалось целесообразным и для конечно-разностной аппроксимации уравнения (2.6) использовать явную схему [2]. В этом случае шаг Δx ограничен условием устойчивости [2]

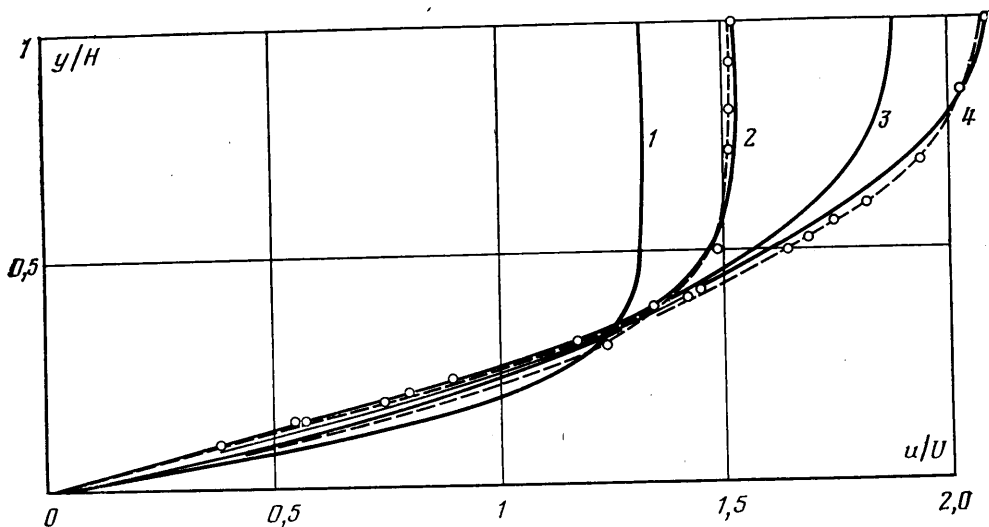
$$\max \left\{ \frac{\Delta x^0}{u} \left(\frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right\} \leq \frac{1}{2}$$

Здесь Δy , Δz — шаги сетки в поперечной плоскости.

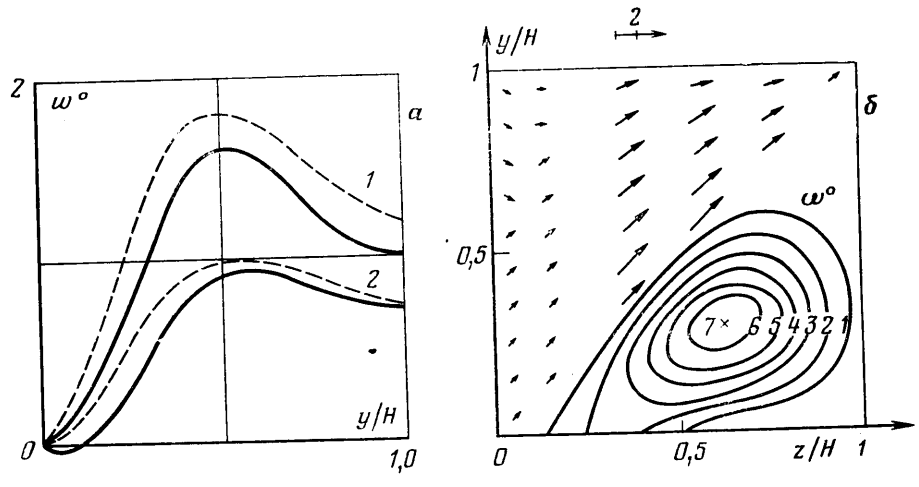
Для определения сходимости метода расчеты проводились с использованием последовательности сгущающихся сеток (10×10 , 15×15 , 20×20) в поперечной плоскости. Максимальное различие результатов, полученных на сетках 15×15 и 20×20 , составило 3%. Время расчета на ЭВМ БЭСМ-6 течения на сетке 15×15 от входа в канал до сечения, где поток является установившимся ($\partial u / \partial x = 0$), порядка 1 ч.

Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными [6] и результатами расчета по методу [3]. На фиг. 1 изображены профили продольной составляющей вектора скорости в центральном сечении канала при нескольких значениях $x^0 = 0,01$; $0,03$; $0,1$; $0,4$. Сплошные линии — расчет по изложенному методу, пунктир — расчет [3], точки — эксперимент. Видно хорошее совпадение результатов. Несколько хуже соответствие поперечных полей скорости, полученных разными методами: на фиг. 2, а пунктиром показаны результаты расчета [3], сплошная линия — данный расчет, сечение $x^0 = 0,03$; $1 - z/H = 0,4$; $2 - z/H = 0,8$; однако и здесь соответствие является удовлетворительным. На фиг. 2, б представлены изолинии продольной составляющей завихренности $\omega = 1$; 2; 3; 4; 5; 6; 6,7 и распределение поперечной скорости в сечении $x^0 = 0,03$. Основной поток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, вниз. Поперечное течение направлено к центру канала, что соответствует росту наполненности профилей u (см. фиг. 1). Распределение завихренности имеет куполообразный вид с максимумом, расположенным примерно в центре сегмента. При дальнейшем развитии течения по x форма распределения меняется слабо, а величина максимума стремится к нулю.

3. При рассмотрении турбулентных течений уравнения (1.1)–(1.4) необходимо дополнить соотношениями для определения рейнольдсовых



Фиг. 1



Фиг. 2

напряжений трения τ . Рассматриваемая в данной работе трехмерная турбулентная струя, распространяющаяся из лепесткового сопла (контур поперечного сечения сопла на поле фиг. 3) в спутный поток, представляет собой свободное сдвиговое течение. Для такого рода течений в [7] предложена дифференциальная модель для напряжений турбулентного трения. Отличительной особенностью модели [7] является аппроксимация обменных членов, т. е. корреляций $\langle p(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i) \rangle$, которые определяют обмен энергией между составляющими τ за счет пульсаций давления. Нелинейная составляющая аппроксимирована формулой Ротта, а для линейной по градиентам осредненной скорости составляющая аппроксимация выполнена таким образом, чтобы равновесные значения напряжений трения в плоском однородном потоке с постоянным сдвигом совпадали с экспериментальными данными, причем учитывалась бы анизотропия поперечных пульсаций (выражение (10) в [7]).

Если в однородном потоке постоянный сдвиг имеется по двум направлениям: $\partial u/\partial y = \text{const}$, $\partial u/\partial z = \text{const}$, то соответствующие равновесные соот-

ношения для напряжений трения таковы

$$\tau_{xy} = c_3 \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = c_3 \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = kc_3 \frac{e^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = kc_3 \frac{e^3}{\varepsilon^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\}, \quad k=0,73; \quad c_3=0,127$$

Здесь e — кинетическая энергия турбулентности, ε — скорость диссипации энергии, значения констант k и c_3 вычисляются по значениям соответствующих постоянных модели [7].

При расчете лепестковой струи использовалась эта алгебраическая модель турбулентности, которая является предельным случаем модели [7] для потоков с постоянным сдвигом.

Коэффициент турбулентной вязкости можно ввести как $\nu_t = c_3 e^2 / \varepsilon$, кроме того, в сдвиговых течениях приближенно справедливо соотношение $\nu_t \sqrt{(\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2} / e \approx 0,3$ [8]. Используя эти соотношения, можно выразить напряжения турбулентного трения только через градиенты продольной составляющей скорости и коэффициент турбулентной вязкости ν_t . Окончательные выражения для τ

$$\tau_{xy} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$\tau_{yz} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \gamma \nu_t \frac{(\partial u / \partial y) (\partial u / \partial z)}{\sqrt{(\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2}} \quad (3.2)$$

$$\tau_{yy} - \tau_{zz} = 2(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \gamma \nu_t \frac{(\partial u / \partial y)^2 - (\partial u / \partial z)^2}{\sqrt{(\partial u / \partial y)^2 - (\partial u / \partial z)^2}}$$

$$\gamma = 0,2$$

Первые члены в (3.1)–(3.2) выражают гипотезу Буссинеска, вторые члены в (3.2) учитывают обменное взаимодействие неоднородного поля продольной составляющей скорости с поперечными пульсациями. Вклад этих членов в поперечные перетекания отличен от нуля только в трехмерном потоке.

Коэффициент турбулентной вязкости определялся по модели [8]

$$\frac{\partial u \nu_t}{\partial x} + \text{div}(\mathbf{V} \nu_t) = \text{div}[(\nu + \beta \nu_t) \nabla \nu_t] + \alpha \nu_t \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \quad (3.3)$$

Значения эмпирических констант $\alpha = 0,2$; $\beta = 2$ взяты из [8].

4. Если из продольной составляющей уравнений движения (1.1) исключить производную $\partial u / \partial x$ с помощью уравнения неразрывности (1.4), то получим соотношение, называемое условием совместности

$$\text{div} \frac{\mathbf{V}}{u} = \frac{1}{\rho u^2} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

В спутной струе продольная составляющая скорости нигде не обращается в ноль и особых точек в (4.1) нет. В численных расчетах этим соотношением пользоваться удобнее, чем уравнением неразрывности. Поперечная скорость разделяется на потенциальную и завихренную составляющие

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - u \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.2)$$

Это преобразование не особенное, так как u ни в одной точке не обращается в ноль. Подставив (4.2) в соотношения (1.1)–(1.3), (4.1), для определения потенциальной и завихренной составляющей получим вместо (2.3), (2.6), (2.7) уравнения

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{u} \nabla \varphi \right) = \frac{1}{\rho u^2} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} (u^2 \nabla \psi) = -u\chi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u \chi}{\partial x} + \operatorname{div} (\mathbf{V} \chi) = & \left\{ \operatorname{div} \left[\mathbf{V} S - \frac{\partial u}{\partial x} u \nabla \psi \right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} + \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{vz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\tau_{zz} - \tau_{yy}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь параметр χ определен соотношением (2.5), напряжения трения τ — соотношениями (3.1)–(3.2).

Струя за четырехлепестковым соплом (фиг. 3) обладает четырьмя плоскостями симметрии. Граничные условия на этих плоскостях такие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial v_i}{\partial n} = 0, \quad \chi = \psi = 0 \quad (4.6)$$

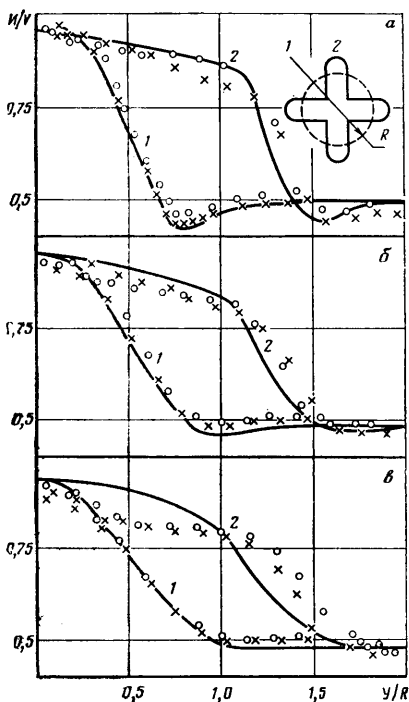
Здесь $\partial/\partial n$ — производная по нормали к плоскости симметрии.

На расстоянии r от оси, много большим ширины струи, поток потенциальный

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v_i}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \chi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{I}{2\pi r} \quad (4.7)$$

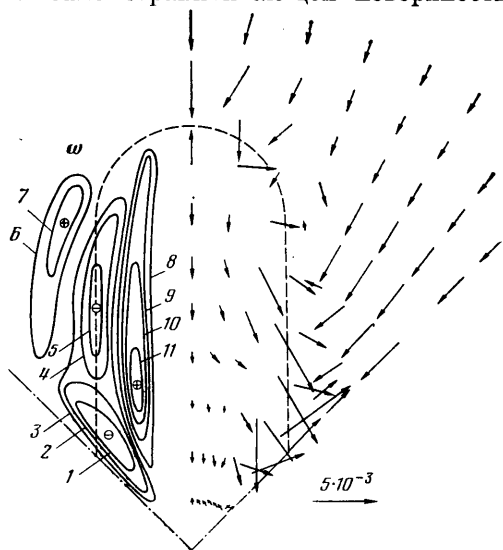
Здесь $\partial/\partial r$ — производная по радиусу, I — интеграл по кругу радиуса r от правой части (4.3).

Граничные условия (4.7) неудобны для численного расчета, так как требуют большого количества точек конечно-разностной сетки. В данной



Фиг. 3

работе исследовался только начальный участок струи, при этом спутный поток считался ограниченным и на ограничивающей поверхности ставилось условие скольжения, аналогичное (4.6). Положение ограничивающей поверхности



Фиг. 4

выбиралось таким образом, чтобы она не влияла на распределение параметров в зоне смещения.

Метод численного решения уравнений (4.3), (4.4) такой же, как для (2.3), (2.7). Поскольку граничные условия для χ не зависят от других переменных, для численного интегрирования (4.5), так же как для (1.1) и (3.3), целесообразно использовать продольно-поперечный метод. Таким образом, расчет трехмерной струи в спутном потоке осуществляется безытерационным пошаговым методом, что выгодно отличает систему соотношений (1.1), (4.3)–(4.5) от исходных уравнений, содержащих поперечные возмущения давления. Рассматриваемый метод расчета свободных течений эффективней, чем расчет течений в каналах.

В начальном сечении струи, на срезе сопла, необходимо задавать распределения продольной составляющей вектора скорости u , коэффициент турбулентной вязкости ν_t и продольной компоненты завихренности ω . Потенциальная составляющая поперечной скорости однозначно определяется по заданному полю u , использование соотношения (4.3) вместо (2.3) позволяет определять начальное распределение φ по тому же алгоритму, что и в основном поле течения. Параметры χ и S в начальном сечении полностью определяются заданным полем ω и рассчитанным потенциалом φ .

Результаты расчета струи за четырехлепестковым соплом (фиг. 3) сопоставлялись с данными экспериментального исследования [9]. Отношение скорости спутного потока к скорости струи составляло $m=0,52$. Начальное распределение продольной составляющей скорости задавалось в соответствии с опытными данными. Принималось, что при $x=0$ $\omega=0$. Коэффициент турбулентной вязкости в начальном сечении отличен от нуля в пограничных слоях у кромки сопла. Распределение ν_t в пограничном слое задавалось в соответствии с данными [10]. Расчет проведен на конечно-разностной сетке 34×18 , время счета одного варианта на ЭВМ БЭСМ-6 порядка 3 ч.

На фиг. 3 представлены профили продольной составляющей скорости в нескольких сечениях струи. На фиг. 3, *a* – в сечении $x/R=2,2$; на фиг. 3, *b* – $x/R=4,4$, на фиг. 3, *в* – $x/R=6,7$; R – радиус эквивалентного лепестковому по площади симметричного сопла, U – скорость истечения струи, сплошная кривая – расчет, значки – экспериментальные данные. Сопоставление показывает, что расчет в целом правильно передает картину течения и соответствие с экспериментом удовлетворительное. Провал в профиле скорости за кромкой ликвидируется к сечению $x/R=4,4$, что видно как по экспериментальным, так и расчетным данным. Вдоль направления 2 профиль имеет пологий участок, соответствующий ядру потока. Следует отметить, что по расчету несколько завывает степень размывания ядра на границе и завывает скорость в приосевой области, хотя в целом согласование расчета и эксперимента удовлетворительное.

На фиг. 4 представлена диаграмма поперечных перетеканий V/U и картина изолиний продольной компоненты завихренности $\omega R/U \cdot 10^2 = 10; 5; 2,5; 5; 7,5; 2,5; 5; 2,5; 5; 7,5; 10$ в сечении $x/R=2,2$. Знак ω показан в кружках. Завихренность концентрируется в зоне смещения, причем максимальное значение ω , соответствующее паре вихрей противоположного знака, сосредоточено в угловой зоне. Эти вихри сносятся вниз по потоку, а их интенсивность вследствие вязкой диссипации падает.

Результаты расчетов ламинарного течения в канале квадратного поперечного сечения и турбулентной струи из лепесткового сопла в спутном потоке показывают применимость метода, основанного на разделении поперечных перетеканий на потенциальную и завихренную составляющие, для расчета пространственных течений с выделенным направлением движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Patankar S. V., Spalding D. B.* A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows.— *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1972, v. 15, № 10, p. 1787—1806.
2. *Роуч П. Дж.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. *Briley W. R.* Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts.— *J. Computat. Phys.*, 1974, v. 14, № 1, p. 8—28.
4. *Ламб Т.* Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
6. *Goldstein R. I., Kreid D. K.* Measurements of laminar flow development in a square duct using a laser-Doppler flowmeter.— *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1967, v. 34, № 4, p. 813—818.
7. *Launder B. E., Reese G. J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure.— *J. Fluid Mech.*, 1975, v. 68, № 3, p. 537—566.
8. *Абрамович Г. П., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
9. *Руди Ю. А.* Экспериментальное исследование распространения четырехлепестковой турбулентной струи в ограниченном спутном потоке.— В кн.: Турбулентные струйные течения. Тез. докл. 4-го Всесоюз. научн. совещ. по теорет. и прикл. аспектам турбулентных течений. Ч. 2. Таллин, 1982, с. 121—136.
10. *Хинце П. О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1983