

УДК 532.517.4

## УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛИЗОВАННОГО ПОТОКА

СОВЕРШЕННЫЙ В. Д.

Характеристики турбулентности потока существенно влияют на его параметры. Уровень турбулентности, например, сильно влияет на величину теплопередачи к обтекаемому телу [1, 2]. В связи с необходимостью уточнения расчетных методов в настоящее время широкое распространение получили многопараметрические модели турбулентности, связанные с введением дополнительных дифференциальных уравнений для тех или иных характеристик турбулентности. Однако с появлением новых дифференциальных уравнений возникает проблема постановки соответствующих граничных условий (например, на внешней стороне пограничного слоя для кинетической энергии пульсаций, коэффициента турбулентной вязкости и других характеристик в зависимости от принятой модели). В то же время из опытов известно, что характеристики турбулентности на внешней стороне пограничного слоя, формирующегося у криволинейного профиля, могут меняться в широких пределах (сильное изменение степени турбулентности по обводу профиля получено в экспериментальной работе [3]).

В настоящей статье впервые предпринята попытка теоретически определить изменение степени турбулентности на внешней стороне пограничного слоя. Полученные результаты можно использовать в качестве недостающих граничных условий при решении уравнений пограничного слоя. В общем виде записаны уравнения кинетической энергии пульсационного движения и дополнительной завихренности (псевдозавихренности). Уравнения рассмотрены в двух частных случаях: в приближении пограничного слоя и в приближении, соответствующем течению вдали от стенки, когда преобладает одно направление и диффузионными эффектами можно пренебречь. В последнем случае получено простое аналитическое решение уравнений, согласующееся с опытными данными [3].

Следует отметить, что дополнительные уравнения для кинетической энергии пульсаций и псевдозавихренности предложены в работе [4]; в дальнейшем аналогичная система в модернизированном виде широко применялась при расчете вязких пристеночных течений [5, 6].

1. При рассмотрении турбулентного течения используем общие нестационарные уравнения гидродинамики в пространственном случае (для простоты жидкость предполагается несжимаемой). Производя осреднение величин обычным образом, получим уравнения движения и неразрывности для осредненного течения. После вычитания полученной системы уравнений осредненного течения из исходных уравнений и ряда преобразований можно получить дополнительные уравнения для кинетической энергии пульсационного движения и псевдозавихренности. Уравнение кинетической энергии  $e$  пульсационного движения получается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \langle u_k' u_i' \rangle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \\ = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v \frac{\partial e}{\partial x_k} - \left\langle u_k' \left( \frac{p'}{\rho} + \sum_{i=1}^3 \frac{u_i'^2}{2} \right) \right\rangle \right] - v \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \\ e = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{k=1}^3 u_k'^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x_1, x_2, x_3$  — координаты,  $t$  — время,  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $v$  — коэффициент кинематической вязкости, без штриха записаны осредненные величины, со штрихом — пульсационные составляющие, угловые скобки означают осреднение.

В левой части равенства (1.1) содержатся члены, определяющие изменение кинетической энергии пульсационного движения за счет нестационарности, конвекции и порождения турбулентности; члены в правой части равенства можно трактовать как диффузионные и диссипативный. Диффузионные члены представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v \frac{\partial e}{\partial x_k} - \left\langle u_k' \left( \frac{p'}{\rho} + e \right) \right\rangle \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ek} \frac{\partial e}{\partial x_k} \quad (k=1, 2, 3)$$

где  $D_{ek}$  — коэффициенты диффузии энергии турбулентности.

Для величины диссипации воспользуемся известным феноменологическим соотношением

$$vD = v \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \frac{k e^{y_2}}{L} + \frac{k_1 e v}{L^2} \quad (1.2)$$

где  $L$  — масштаб турбулентности,  $k$  и  $k_1$  — константы турбулентности. Первый член в (1.2) дает преобладающий вклад вдали от стенки, второй — вблизи стенки.

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить, уравнение для дополнительной завихренности (псевдозавихренности)  $\omega$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial \omega^2}{\partial x_k} - \left( 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \omega_i' \omega_k' \right\rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + G \right) = \\ = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \frac{\partial \omega^2}{\partial x_k} - \left\langle u_k' \sum_{i=1}^3 \omega_i'^2 \right\rangle \right) - v 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial \omega_k'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \\ \omega^2 = \left\langle \sum_{k=1}^3 \omega_k'^2 \right\rangle, \quad G = 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \omega_i' \omega_k' \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$  — компоненты пульсации вектора вихря.

Члены в левой части равенства (1.3) определяют изменение псевдозавихренности за счет нестационарности, конвекции, порождения; члены в правой части равенства можно трактовать как диффузионные и диссипативный. Диффузионные члены можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v \frac{\partial \omega^2}{\partial x_k} - \left\langle u_k' \sum_{i=1}^3 \omega_i'^2 \right\rangle \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{\omega k} \frac{\partial \omega^2}{\partial x_k} \quad (k=1, 2, 3)$$

где  $D_{\omega k}$  — коэффициенты диффузии завихренности.

Диссипацию псевдозавихренности, следуя [6], представим в виде

$$v, 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left\langle \left( \frac{\partial \omega_k'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \beta \omega^3$$

2. В приближении пограничного слоя система уравнений (1.1), (1.3) может быть записана в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} + \left\langle u' v' \right\rangle \frac{\partial u}{\partial y} + \left\langle v' w' \right\rangle \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} D_e \frac{\partial e}{\partial y} - v D$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} + u \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^2}{\partial y} + w \frac{\partial \omega^2}{\partial z} - \left( 2 \langle \omega_1' \omega_2' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \langle \omega_3' \omega_2' \rangle \frac{\partial w}{\partial y} + G \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \omega^2}{\partial y} - \left\langle v' \sum_{i=1}^3 \omega_i'^2 \right\rangle \right) - \beta \omega^3 \quad (2.1)$$

В системе (2.1)  $x, y, z$  – координаты,  $u, v, w$  – компоненты осредненной скорости.

3. Рассмотрим течение, в котором выделено направление  $x$ , т. е.  $u \gg v, w$  и  $\partial a / \partial x \gg \partial a / \partial y, \partial a / \partial z$ , где  $a$  – некоторая осредненная величина.

Тогда система уравнений (1.1), (1.3) в случае плоского течения может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + \langle u'^2 - v'^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D_e \frac{\partial e}{\partial x} \right) - v D \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial t} + u \frac{\partial \omega^2}{\partial x} - \alpha \omega^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D_\omega \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right) - \beta \omega^3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В уравнении для псевдозавихренности член порождения в соответствии с [6] заменен выражением  $\alpha \omega^2 \partial u / \partial x$ , где  $\alpha$  – константа турбулентности. Предположим также, что  $\langle u'^2 - v'^2 \rangle = 2e/3$ .

Полагая течение установившимся и пренебрегая диффузией, систему (3.1) можно существенно упростить

$$\begin{aligned} u \frac{de}{dx} - \frac{2}{3} e \frac{du}{dx} &= -v D \\ u \frac{d\omega^2}{dx} - \alpha \omega^2 \frac{du}{dx} &= -\beta \omega^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения в системе (3.2) являются дополнительными для определения характеристик турбулентности в потоке вдали от обтекаемого тела. В этом случае в выражении для диссипации кинетической энергии пульсационного движения (1.2) сохраняется только первый член. Уравнения (3.2) могут быть решены, если известно изменение скорости в потоке. Следует заметить, что уравнения в системе (3.2) отличаются от соответствующих уравнений [6] и не могут быть получены из них предельным переходом. Основное отличие состоит в том, что члены порождения в настоящей работе могут менять знак в зависимости от градиента средней скорости.

4. Для решения системы уравнений (3.2) необходимо задать начальные условия

$$x=x_H, e=e_H, \omega=\omega_H.$$

Второе уравнение из системы (3.2) может быть непосредственно проинтегрировано, решение для дополнительной завихренности получается в виде

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \left( \frac{u}{u_H} \right)^{\alpha/2} \left[ \frac{\beta \omega_H}{2u_H} \int_{x_H}^x \left( \frac{u}{u_H} \right)^{\alpha/2-1} dx + 1 \right]^{-1} \quad (4.1)$$

Здесь приняты следующие значения констант [6]:  $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0,2638$ ,  $\beta = 2k = 0,18$ .

При известном  $\omega$  первое уравнение из системы (3.2) может быть также решено, при этом воспользуемся известной связью  $\sqrt{e} = L\omega$ .

Выражение для кинетической энергии пульсационного движения по-

лучается в виде

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \left( \frac{u}{u_H} \right)^{-1} \left[ \frac{\beta \omega_H}{2u_H} \int_{x_H}^x \left( \frac{u}{u_H} \right)^{\alpha/2-1} dx + 1 \right]^{-2k/\beta} \quad (4.2)$$

где  $2k/\beta=1$  при принятых значениях констант.

Конечные соотношения (4.1), (4.2) могут служить дополнением к интегралу Бернулли при расчете характеристик турбулизованных потоков.

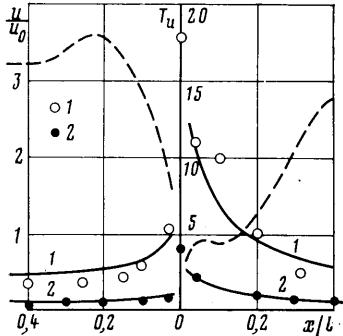
Поскольку коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой  $\varepsilon=e/\omega$ , для его вычисления на внешней стороне пограничного слоя может быть получено с использованием равенств (4.1), (4.2) конечное соотношение

$$\varepsilon/\varepsilon_H = (u/u_H)^{-2/3-\alpha/2} \quad (4.3)$$

Конечные соотношения (4.1)–(4.3) можно использовать для расчета характеристик турбулентности на внешней стороне пограничного слоя. Однако эти соотношения нельзя применять непосредственно в области передней критической точки обтекаемого тела, так как в этом случае не выполняются предположения, принятые при выводе системы (3.2):

5. Интерес может представить также решение при нулевом градиенте средней скорости, т. е. при отсутствии членов порождения в системе (3.2).

В этом случае решение имеет вид [6]



Фиг. 1

может быть записано в виде

$$\frac{L}{L_H} = \frac{\gamma e}{\omega} \frac{1}{L_H} = \left[ \frac{\beta \omega_H}{2u} (x - x_H) + 1 \right]^{1-k/\beta}$$

Поскольку  $k/\beta=1/2$  (значения констант приведены выше), то из последнего равенства следует, что масштаб турбулентности при отсутствии градиента средней скорости возрастает с удалением от точки  $x_H$ .

6. Полученные выше теоретические результаты сопоставим с опытными данными работы [3], в которой выполнено детальное исследование распределения степени турбулентности в межлопаточных каналах. В этой работе показано, что для оценки тепловых потоков к профилю недостаточно знания степени турбулентности только перед решеткой. Исследования в работе были выполнены на двух типах плоских решеток: активного ( $T-4$ ) и реактивного ( $TC-1A$ ) типов.

Для сопоставления с опытными данными работы [3] выполним расчет степени турбулентности  $T_u = u_0^{-1} \sqrt{2e/3}$  ( $u_0$  — скорость на входе в решетку) с использованием решений (4.1) и (4.2). Результаты расчета величины  $T_u$  для решетки  $TC-1A$  показаны на фиг. 1 сплошными линиями, кривые 1 и 2 соответствуют значениям степени турбулентности на входе 9,46 и 1,43%. Точками 1, 2 обозначены опытные значения величины  $T_u$ . Пунктирной линией показано изменение скорости по профилю; положительное

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \left[ \frac{\beta \omega_H}{2u} (x - x_H) + 1 \right]^{-1},$$

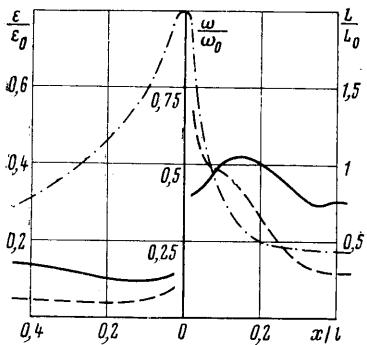
$$\frac{e}{e_H} = \left[ \frac{\beta \omega_H}{2u} (x - x_H) + 1 \right]^{-2k/\beta}$$

где  $2k/\beta=1$  при принятых значениях констант.

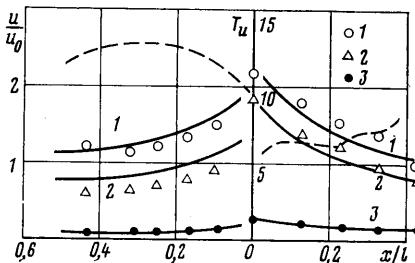
Отсюда видно, что дополнительная застывшность и кинетическая энергия пульсационного движения при отсутствии градиента средней скорости являются убывающими функциями. Соотношение для масштаба турбулентности в этом случае

направление оси абсцисс соответствует вогнутой стороне профиля, отрицательное — выпуклой. Расчеты проведены при указанных выше значениях констант;  $(x/l)_H=0,02$ ,  $l$  — периметр.

Представляет интерес поведение других характеристик турбулентности по обводу профиля. Расчетное изменение масштаба турбулентности  $L/L_0$  (сплошная линия), коэффициента турбулентной вязкости  $\varepsilon/\varepsilon_0$  (пунктирная линия), дополнительной завихренности  $\omega/\omega_0$  (штрихпунктирная линия) для профиля  $TC-1A$  показано на фиг. 2, индекс 0 соответствует значениям в передней точке. Следует отметить более высокий уровень коэффициента турбулентной вязкости и масштаба турбулентности на вогнутой стороне профиля по сравнению с его выпуклой стороной.



Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты расчета степени турбулентности  $T_u$  для решетки  $T-4$  показаны на фиг. 3. Обозначения совпадают с фиг. 1. Линии 1—3 соответствуют степеням турбулентности на входе в решетку 9,37, 6,26, 0,54%, точками 1—3 показаны опытные значения.

Следует отметить удовлетворительное согласование расчетных значений величины  $T_u$  с опытными для обоих типов рассмотренных решеток.

Предложенный выше способ получения дополнительных уравнений турбулентности вне пограничного слоя (которые используются в качестве граничных условий при расчете пограничного слоя) может быть использован и в случае других моделей турбулентности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kestin J., Maeder P. F., Sogin N. H. The influence of turbulence on the transfer of heat to cylinders near the stagnation point.— ZAMP, 1961, B. 12, № 2, p. 115—131.
2. Turner A. B. Local heat transfer measurements on a gas turbine blade.— J. Mech. Eng. Sci., 1971, v. 13, № 1, p. 1—12.
3. Капинос В. М., Слитенко А. Ф., Титов В. Б. Экспериментальное исследование характеристик турбулентного потока и местного теплообмена в турбинных решетках.— В кн.: Тепломассообмен VI. Матер. VI Всесоюзн. конф. по тепломассообмену. Минск, 1980, т. 1, ч. 1, с. 122—126.
4. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2, с. 56—58.
5. Saffman P. G. A model for inhomogeneous turbulent flows.— Proc. Roy. Soc. London, 1970, Vol. A, 317, p. 417—433.
6. Traci R. M., Wilcox D. C. Freestream turbulence effects on stagnation point heat transfer.— AIAA Journal, 1975, v. 13, № 7, p. 890—896.

Москва

Поступила в редакцию  
5.VII.1983