

УДК 532.5.013.4

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОРРА —
ЗОММЕРФЕЛЬДА В ОБЛАСТЯХ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ДВУМ
ВЕТВЯМ НЕЙТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ**

ЖУК В. И.

Асимптотика [1] верхней и нижней ветвей нейтральной кривой устойчивости пограничного слоя уточняется в [2–4], где на основе линеаризованных уравнений Навье – Стокса предпринят анализ высших приближений по числам Рейнольдса R . Нейтральные возмущения в пределе $R \rightarrow \infty$ имеют длины волн, превышающие по порядку величин толщину пограничного слоя.

Интерес к длинноволновой асимптотике уравнения Орра – Зоммерфельда возникает, в частности, потому, что собственные решения линеаризованных уравнений свободного взаимодействия [5–7] являются предельной формой волн Толлмина – Шлихтинга в несжимаемой жидкости с прилегающими к стенке критическими слоями [8–9]. При этом дисперсионное соотношение, которое в точности совпадает с вековым уравнением задачи Орра – Зоммерфельда, содержит целый спектр решений, не рассмотренный в [2–4]. Первая мода колебаний из указанного спектра может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Ниже строятся решения для каждой из подобластей (включая критический слой), на которые при больших числах Рейнольдса разделяется возмущенное поле скоростей в линейной задаче устойчивости. Выводятся дисперсионные соотношения, описывающие окрестности верхней и нижней ветвей нейтральной кривой для пограничного слоя. Данные соотношения, содержащие нейтральные решения как частный случай, асимптотически переходят друг в друга в неустойчивой области между обеими из этих ветвей.

1. Пусть в потоке вязкой несжимаемой жидкости исходный профиль $U_0 = U_0(y_2)$, $y_2 = y\sqrt{R}$, скорости задается функцией Блазиуса, причем число Рейнольдса R , а также безразмерные координаты x , y определены не по толщине пограничного слоя, в котором переменная y_2 порядка единицы, а по расстоянию вдоль обтекаемой пластины до ее передней кромки. Как известно

$$U_0 = \lambda_1 y_2 + \frac{1}{24} \lambda_4 y_2^4 + \dots \quad (y_2 \rightarrow 0) \quad (1.1)$$

Записывая возмущение функции тока в форме $\exp[ik(x-ct)]f(y)$, получим уравнение Орра – Зоммерфельда

$$(U_0 - c) \left(\frac{d^2 f}{dy_2^2} - \delta^2 f \right) - \frac{d^2 U_0}{dy_2^2} f = \frac{1}{ik} \left(\frac{d^4 f}{dy_2^4} - 2\delta^2 \frac{d^2 f}{dy_2^2} + \delta^4 f \right), \quad \delta = \frac{k}{\sqrt{R}} \quad (1.2)$$

где k считается действительной положительной величиной, а параметр δ характеризует отношение толщины пограничного слоя к длине волны возмущений. Положим $R \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $c \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Для основной части пограничного слоя введем разложение по малому параметру δ , считая фазовую скорость c фиксированной

$$f = f_0 + \delta^2 f_1 + \dots \quad (1.3)$$

Функции f_0 и f_1 определяются из невязкого уравнения (1.2) с отброшенной правой частью

$$(U_0 - c) \frac{d^2 f_0}{dy_2^2} - \frac{d^2 U_0}{dy_2^2} f_0 = 0 \quad (1.4)$$

$$(U_0 - c) \frac{d^2 f_1}{dy_2^2} - \frac{d^2 U_0}{dy_2^2} f_1 = (U_0 - c) f_0 \quad (1.5)$$

Из дальнейшего следует, что вязкие члены в уравнении (1.2) имеют порядок $k^{-1} = O(\delta^9)$ вблизи верхней и $k^{-1} = O(\delta^3)$ вблизи нижней ветви нейтральной кривой. Член порядка δ , появляющийся в разложении (1.3) через краевые условия сращивания для функции f , включен в f_0 , так как он удовлетворяет уравнению, совпадающему с (1.4). Аналогично для верхней ветви член порядка δ^3 в (1.3) учитывается посредством поправки порядка δ к функции f_1 . Обозначая через φ и ψ два линейно независимых решения однородного уравнения (1.4)

$$\varphi = U_0 - c, \quad \psi = (U_0 - c) \left\{ \int_{y_2}^{\infty} \left[\frac{1}{(U_0 - c)^2} - \frac{1}{(1 - c)^2} \right] dy_2 - \frac{y_2}{(1 - c)^2} \right\} \quad (1.6)$$

вычислим общий интеграл неоднородного уравнения второго приближения (1.5) с помощью решения $f_0 = a_1 \varphi + b_1 \psi$ первого приближения

$$\begin{aligned} f_1 = & a_2 \varphi + b_2 \psi + (b_1 \psi - a_1 \varphi) \left\{ \int_{y_2}^{\infty} [\varphi \psi + y_2] dy_2 + \frac{y_2^2}{2} \right\} - \\ & - b_1 \varphi \left\{ \int_{y_2}^{\infty} \left[\psi^2 - \frac{y_2^2}{(1 - c)^2} \right] dy_2 - \frac{y_2^3}{3(1 - c)^2} \right\} + \\ & + a_1 \psi \left\{ \int_{y_2}^{\infty} [\varphi^2 - (1 - c)^2] dy_2 - (1 - c)^2 y_2 \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Константы a_1, a_2, b_1, b_2 находятся из сращивания с решением в области толщины $y = O(\delta^{-1} R^{-1/2})$ непосредственно над пограничным слоем, где $U_0 = 1, y_1 = \delta y_2 = O(1)$. С точностью до амплитудного множителя имеем

$$f = e^{-y_1} \rightarrow 1 - \delta y_2 + \frac{1}{2} \delta^2 y_2^2 - \frac{1}{6} \delta^3 y_2^3 + \dots \quad (y_1 \rightarrow 0) \quad (1.8)$$

В пределе $y_2 \rightarrow \infty$ разложение (1.3) принимает вид

$$f = (a_1 + \delta^2 a_2) (1 - c) - \frac{b_1 + \delta^2 b_2}{1 - c} y_2 + \frac{1}{2} \delta^2 a_1 (1 - c) y_2^2 - \frac{1}{6} \delta^2 \frac{b_1}{1 - c} y_2^3 + \dots \quad (1.9)$$

Сравнение с первыми двумя членами в (1.8) дает

$$a_1 = \frac{1}{1 - c}, \quad b_1 = \delta(1 - c), \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 0 \quad (1.10)$$

Квадратичные и кубические члены в (1.8) и (1.9) при условии (1.10) сращиваются автоматически.

Если фазовая скорость $c = c_r + i c_i$ мала по абсолютной величине, можно воспользоваться представлением (1.1) для продолжения функции U_0 действительного аргумента в комплексную область и определить комплексную точку y_2^* , в которой выполнено $U_0 = c$, по формуле

$$c = \lambda_1 y_2^* + \frac{1}{24} \lambda_4 (y_2^*)^4 \quad (1.11)$$

Исходя из явных выражений (1.6), (1.7), нетрудно переразложить невязкое решение (1.3) в окрестности особой точки

$$\begin{aligned} f = & \delta \frac{1 - c}{\lambda_1} - \delta^2 \frac{D}{\lambda_1} + \left[\frac{\lambda_1}{1 - c} + \delta \lambda_1 B \right] (y_2 - y_2^*) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^4} c^2 [\delta(1 - c) - \delta^2 D] (y_2 - y_2^*) [\ln |y_2 - y_2^*| + i \arg(y_2 - y_2^*)] + \dots \end{aligned}$$

$$B = \int_{y_2^*}^{\infty} \left[\frac{1}{(U_0 - c)^2} - \frac{1}{(1 - c)^2} - \frac{1 - 1/3 (\lambda_4 / \lambda_1) (y_2^*)^3}{\lambda_1^2 (y_2 - y_2^*)^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^3} \frac{(y_2^*)^2}{(y_2 - y_2^*) (1 + y_2 - y_2^*)} \right] dy_2$$

$$D = - \int_{y_2^*}^{\infty} [\varphi^2 - (1 - c)^2] dy_2$$

Здесь интегралы B и D сходятся на бесконечности, а в первом из них подынтегральная функция ограничена.

Вязкие члены уравнения Орра — Зоммерфельда на сингулярной части решения (1.12) становятся порядка конвективных в области $y_2 - y_2^* = O(k^{-1/3})$. Критический слой, в котором невязкое решение (1.3) непригодно, существует не только для действительных, но и для комплексных значений фазовой скорости c , если указанная область пересекает действительную ось на плоскости y_2 . Как видно из (1.11), данное условие эквивалентно требованию

$$c_i \leq k^{-1/3} \quad (1.13)$$

которое в дальнейшем считаем выполненным.

Совершим преобразование $Z = \lambda_1^{1/3} (ik)^{1/3} (y_2 - y_2^*)$ независимой переменной (здесь и всюду ниже $\arg(ik) = \pi/2$). На поверхности пластины $Z = \xi = -\lambda_1^{1/3} (ik)^{1/3} y_2^* \simeq -\lambda_1^{-2/3} (ik)^{1/3} c$. Уравнение Орра — Зоммерфельда в критическом слое переписывается следующим образом:

$$\left[Z + \frac{1}{4} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^{10/3}} (ik)^{-1/3} c^2 Z^2 + \dots \right] \left[\frac{d^2 f}{dZ^2} - \frac{1}{\lambda_1^{2/3}} (ik)^{-2/3} \delta^2 f \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^{10/3}} (ik)^{-1/3} c^2 + \frac{\lambda_4}{\lambda_1^3} (ik)^{-2/3} c Z + \dots \right] f = \frac{d^4 f}{dZ^4} + \dots \quad (1.14)$$

Решение уравнения (1.14) ищется в виде ряда

$$f = g_0 + (ik)^{-1/3} c^2 g_1 + \dots \quad (1.15)$$

$$\frac{d^4 g_0}{dZ^4} - Z \frac{d^2 g_0}{dZ^2} = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{d^4 g_1}{dZ^4} - Z \frac{d^2 g_1}{dZ^2} = - \frac{1}{2} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^{10/3}} \left(g_0 - \frac{1}{2} Z^2 \frac{d^2 g_0}{dZ^2} \right) \quad (1.17)$$

Значения переменной Z для вещественных y_2 расположены на прямой

$$Z = \lambda_1^{1/3} e^{i\pi/6} y_3 + Z_0, \quad y_3 = k^{1/3} (y_2 - \text{Re } y_2^*), \quad Z_0 = -\lambda_1^{1/3} e^{2i\pi/3} k^{1/3} \text{Im } y_2^* \quad (1.18)$$

где вещественная координата y_3 и постоянная Z_0 порядка единицы в критическом слое вследствие ограничения (1.13).

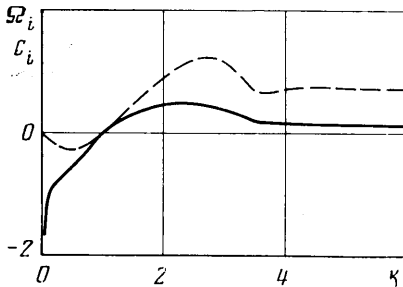
2. Необходимо различать два случая. В первом из них ξ — конечная величина. Разложение (1.15) должно переходить в (1.3) на верхней границе критического слоя, когда переменная Z стремится к бесконечности вдоль луча (1.18). Решение уравнения первого приближения (1.16), удовлетворяющее условиям $g_0 = dg_0/dZ = 0$ на поверхности и не дающее экспоненциального роста на луче (1.18) при $y_3 \rightarrow \infty$, выражается через функцию Эйри

$$g_0 = C_0 \int_{\zeta}^z dZ' \int_{\zeta}^{Z'} \text{Ai}(Z'') dZ'' = C_0 \left[Z \int_{\zeta}^z \text{Ai}(Z') dZ' - \frac{d \text{Ai}(Z)}{dZ} + \frac{d \text{Ai}(\zeta)}{dZ} \right] \quad (2.1)$$

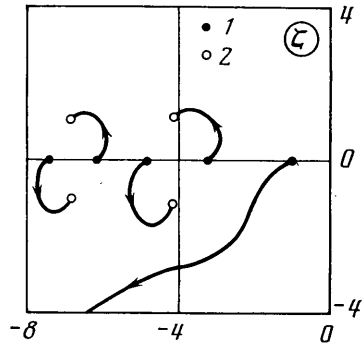
Для получения дисперсионного соотношения в двух приближениях по параметру δ достаточно ограничиться лишь первым приближением к решению в критическом слое, поскольку поправка к нему имеет порядок $k^{-1/3}c^2 = O(\delta^3)$, если $\xi = O(1)$. Функция Эйри при больших $|Z|$ обладает асимптотикой [10]

$$\text{Ai}(Z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{3/2 Z^{3/2}} \left[Z^{-1/4} - \frac{5}{48} Z^{-7/4} + \dots \right], \quad \arg Z \in (-\pi, \pi) \quad (2.2)$$

поэтому фигурирующий в (2.1) интеграл сходится, а само это выражение переходит в линейную функцию, если $Z \rightarrow \infty$ в секторе $(-\pi/3, \pi/3)$. Сравнение с разложением (1.12), переписанным в переменной Z , приводит



Фиг. 1



Фиг. 2

к дисперсионному соотношению

$$\frac{d \text{Ai}(\xi)}{dZ} \left[\int_{\xi}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right]^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^{1/3}} \frac{i^{1/2} k^{1/3}}{\sqrt{R}} [1 - 2c - \delta B - \delta D] \quad (2.3)$$

Для ограниченных ξ отсюда сразу следует $k = O(R^{2/3})$, что совпадает с оценкой длины трехслойной области свободного взаимодействия [5-7]. Критический слой, который сливается с пристеночным, имеет в переменной y_2 толщину порядка $k^{-1/3} \sim R^{-1/3} \sim c$.

В рассматриваемом приближении величины B и D можно считать постоянными, вычисляемыми по формулам

$$B = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{U_0^2} - 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 y_2^2} \right] dy_2, \quad D = - \int_0^{\infty} [U_0^2 - 1] dy_2$$

Обозначим левую часть (2.3) через $\Phi(\xi)$ и положим

$$K = \lambda_1^{-3/4} R^{-3/4} k [1 - 2c - \delta B - \delta D]^{3/4}, \quad C = -i^{1/2} K^{-1/2} \xi \quad (2.4)$$

С помощью преобразования (2.4) дисперсионное соотношение сводится к уравнению стандартного вида $\Phi(-i^{1/2} K^{1/2} C) = i^{1/2} K^{1/2}$, свойства которого изучены в [8]. Каждому фиксированному K соответствует бесконечная последовательность собственных значений C и наоборот. Поведение первого корня из этой последовательности иллюстрируется на фиг. 1, где изображена мнимая часть C_i параметра C (сплошная линия), а также мнимая часть Ω_i величины $\Omega = KC$ (штриховая линия), когда K пробегает действительную положительную полуось. Каждый корень записанного в преобразованных переменных дисперсионного уравнения порождает кривые на плоскостях R , c и R , k . Как видно из фиг. 1, существует действительное значение $K = k_*$, для которого принадлежащее первой моде значение $C = c_*$ также является чисто действительным, вычисления дают $k_* = 1,0005$, $c_* = 2,2968$. Подстановка этих значений в преобразова-

ние (2.4) фиксирует уравнение нижней ветви нейтральной кривой устойчивости.

Формулы (2.4) удобно разрешить относительно c и k , если входящие в их правые части малые величины c и δ вычислить по первому приближению: $k = \lambda_1^{5/4} R^{3/8} k_*$, $c = \lambda_1^{1/4} R^{-1/8} c_*$, $\delta = \lambda_1^{5/4} R^{-1/8} k_*$. Окончательно асимптотическое поведение нижней ветви нейтральной кривой при $R \rightarrow \infty$ в двух приближениях определяется выражениями

$$k = \lambda_1^{5/4} R^{3/8} k_* \left\{ 1 + \frac{3}{4} \lambda_1^{5/4} R^{-1/8} \left[(B+D) k_* + \frac{2}{\lambda_1} c_* \right] \right\} \quad (2.5)$$

$$c = \lambda_1^{1/4} R^{-1/8} c_* \left\{ 1 - \frac{1}{4} \lambda_1^{5/4} R^{-1/8} \left[(B+D) k_* + \frac{2}{\lambda_1} c_* \right] \right\} \quad (2.6)$$

Первый член асимптотики (2.5), (2.6) найден в [1], двучленное разложение в точности совпадает с полученным в [4] другим методом.

Отметим, что за счет комплексной поправки c в соотношениях (2.4) параметр K не является действительным при действительных k (исключение составляет нейтральное решение). Кривые на фиг. 1 иллюстрируют также зависимости $c_i = c_i(k)$, $\omega_i = \omega_i(k)$, $k_i = 0$, $\omega_i = kc_i$ в первом приближении, получаемом отбрасыванием в дисперсионном уравнении и выражениях (2.4) малых поправок порядка $\delta \sim c$. Преобразование (2.4) в этом случае сводится к перенормировке волнового числа и фазовой скорости с целью исключения из дисперсионного уравнения числа Рейнольдса и коэффициента λ_1 . В неустойчивой области, где k превышает нейтральное значение (2.5), инкремент нарастания возмущений ω_i достигает максимума.

Вычислим асимптотику первой моды в случае $K \rightarrow \infty$ при заданном числе Рейнольдса. С этой целью обратимся к фиг. 2, на которой нанесены траектории, вычерчиваемые на комплексной плоскости ζ первыми пятью корнями дисперсионного уравнения $\Phi(\zeta) = i^{1/2} K^{3/2}$ с ростом параметра K , $\arg K = 0$. При малых K все траектории выходят из нулей производной функции Эйри (точки 1), при $K \rightarrow \infty$ первый корень стремится к бесконечности, остальные приближаются к нулям знаменателя комплексной функции $\Phi(\zeta)$ (точки 2). Все корни, за исключением первого, дают затухающие решения. Нейтральным решениям соответствует значение $\zeta_* = -1,9894 - i 1,1486$. Воспользовавшись свойством возрастания по абсолютной величине первого корня при $|K| \rightarrow \infty$, которое сохранится, если $\arg K \neq 0$ из-за малой комплексной величины c в (2.4), подставим в левую часть дисперсионного соотношения асимптотическое выражение (2.2), тогда $\Phi(\zeta) = -\zeta - \zeta^{-1/2} + O(\zeta^{-2})$. Поправочный член $\zeta^{-1/2}$ с точностью до $O(\zeta^{-2})$ вычислим по первому приближению, которое с учетом условия $\arg \zeta \in (-\pi, \pi)$, выделяющего однозначную ветвь квадратного корня, следует записать в виде $\zeta = \exp(-5/6 i \pi) K^{1/2}$. В результате дисперсионное соотношение сводится к следующему:

$$\zeta = -i^{1/2} K^{1/2} - i^{5/6} K^{-2/3} \quad (2.7)$$

Возвращаясь в (2.7) к исходным величинам R , c , k посредством формул (2.4) и разрешая полученное равенство относительно c , находим асимптотическое предельное для первой моды

$$c = \frac{1}{\lambda_1} \frac{k}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} + B+D \right) \right] + \lambda_1^{3/2} \frac{R^{1/4}}{k} e^{i\pi/4} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} - B-D \right) \right] \quad (2.8)$$

Условие $|\zeta| \gg 1$, при котором получено (2.8), означает $k \gg R^{3/8}$ и $|c| \sim |y_2^*| \gg R^{-1/2}$. Колебания при $k = O(R^{3/8})$, к которым принадлежит нейтральный случай, характеризуются равенством порядков $c_r \sim c_i \sim \delta$, в то время как при $k \gg R^{3/8}$ из (2.8) следует $c_i \ll c_r \sim |c| \sim \delta$. Предельная форма (2.8) дисперсионного соотношения (2.3) описывает неустойчивые колебания с инкрементом нарастания

$$\omega_i = kc_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^{3/2} R^{1/4} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} - B-D \right) \right] \quad (2.9)$$

который в первом приближении представляет собой асимптоту изображенной на фиг. 1 кривой.

3. Поскольку в критическом слое переменная Z порядка единицы, неограниченное возрастание ζ при $k \gg R^{3/8}$ означает, что критический слой

отделяется от стенки. Выше получено дисперсионное уравнение для трех-
 слойной схемы течения, когда критический слой совпадает с пристеноч-
 ным, и вычислена его асимптотика при $\zeta \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь случай,
 когда толщина критического слоя много меньше, чем его расстояние до
 стенки. Из (1.14) следует, что указанное расстояние имеет порядок
 $|y_2^*| \simeq |c|/\lambda_1$, откуда в силу (1.13) $|c| \gg k^{-1/2} \geq c_i$. Необходимо построить ре-
 шение в критическом слое, не содержащее экспоненциально растущих членов на оси
 (1.18) при $y_3 \rightarrow \pm \infty$. Единственное решение уравнения первого приближения (1.16),
 удовлетворяющее данному требованию, гласит

$$g_0 = d_0 + d_1 Z \quad (3.1)$$

В следующем приближении из уравнения (1.17) с учетом (3.1) имеем

$$\frac{d^2 h}{dZ^2} - Zh = -g_0, \quad h = 2 \frac{\lambda_1^{1/2}}{\lambda_1} \frac{d^2 g_1}{dZ^2} \quad (3.2)$$

Возьмем в качестве второго линейно не-
 зависящего решения уравнения Эйри функ-
 цию

$$H(Z) = e^{2/3i\pi} \text{Ai}(e^{2/3i\pi} Z) \quad (3.3)$$

Из (2.2) вытекает асимптотическая формула при $Z \rightarrow \infty$

$$H(Z) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} e^{3/2 Z^{3/2}} \left[Z^{-1/4} + \frac{5}{48} Z^{-5/4} + \dots \right], \quad \arg Z \in \left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) \quad (3.4)$$

Луч $\arg Z = \pm \pi$ — линия Стокса функции $\text{Ai}(Z)$, на нем асимптотика
 (2.2) терпит разрыв. В силу определения (3.3) линией Стокса для функ-
 ции $H(Z)$ служит луч $\arg Z = \pi/3$. При помощи (2.2) и (3.4) легко вычис-
 лить вронскиан $H'(Z)\text{Ai}(Z) - \text{Ai}'(Z)H(Z) = i/(2\pi)$. Частный интеграл не-
 однородного уравнения Эйри (3.2), в котором отсутствуют экспоненциаль-
 но растущие на линии (1.18) члены, имеет вид

$$h = -2\pi i \left[\text{Ai}(Z) \int_{-\infty}^Z g_0(Z') H(Z') dZ' + H(Z) \int_Z^{\infty} g_0(Z') \text{Ai}(Z') dZ' \right]$$

Символы $\pm \infty$ соответствуют $y_3 \rightarrow \pm \infty$. В области $\arg Z \in (-\pi, \pi/3)$ пе-
 рекрытия секторов, где справедливы формулы (2.2), (3.4), находим
 асимптотику функции h при больших $|Z|$

$$h = d_0 Z^{-1} + d_1$$

Можно показать, что в секторе $\arg Z \in (\pi/3, \pi)$ функция h экспонен-
 циально возрастает на бесконечности.

Суммируя полученные результаты, выводим единое асимптотическое
 представление решения для $\arg Z \in (-\pi, \pi/3)$, $|Z| \rightarrow \infty$

$$f = d_0 + d_1 Z + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^{10/3}} (ik)^{-1/2} c^2 \left(d_0 Z \ln Z + \frac{1}{2} d_1 Z^2 \right) + \dots \quad (3.5)$$

Постоянные d_0 и d_1 определим из сращивания выражения для f на
 верхней границе критического слоя с асимптотикой невязкого решения.
 Линейные части разложений (3.5) и (1.12) переходят друг в друга на

луче (1.18) при $y_3 \rightarrow \infty$, если

$$d_0 = \delta \frac{1-c}{\lambda_1} - \delta^2 \frac{D}{\lambda_1}, \quad d_1 = (ik)^{-1/2} \lambda_1^{3/2} \left[\frac{1}{1-c} + \delta B \right] \quad (3.6)$$

Логарифмические члены в (3.5) и (1.12) при условии (3.6) сращиваются автоматически.

Значения функции f в нижней части критического слоя, т. е. на луче $y_3 \rightarrow -\infty$, можно получить аналитическим продолжением ее выражения для луча $y_3 \rightarrow +\infty$ вдоль контура достаточно большого радиуса в комплексной плоскости Z (помечен стрелками на фиг. 3, ось (1.18) обозначена штриховой линией), используя асимптотику (3.5). Указанная на фиг. 3 система разрезов однозначно определяет изменение фазы логарифмической функции, которое с точностью до несущественной поправки порядка $|c_i| |c|^{-1} \ll 1$ равно $-\pi$. Для нейтральных колебаний этот скачок фазы вычислен в [1]. В заштрихованном секторе на фиг. 3 асимптотическая формула (3.5) непригодна.

Легко видеть, что выражение (1.12), представляющее собой предельную форму разложения (1.3), дает невязкое решение уравнения Орра — Зоммерфельда в областях, расположенных как выше, так и ниже критического слоя, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Однако при $0 < y_2 < \text{Re } y_2^*$ в выражении (1.12) следует выбрать $\text{arg}(y_2 - y_2^*) = -\pi + O(c_i |c|^{-1})$, что обеспечивает сращивание его мнимой части с мнимой частью решения (3.5) для критического слоя при $y_3 \rightarrow -\infty$.

4. Невязкое решение, не позволяющее удовлетворить условию прилипания жидкости при $y_2 = 0$, непригодно в вязком пристеночном слое толщины $k^{-1/2} |c|^{-1/2} \ll |y_2^*|$. После перехода вблизи пластины к новой комплексной переменной $\eta = (ikc)^{1/2} y_2$ из уравнения Орра — Зоммерфельда с учетом граничных условий $f = df/d\eta = 0$ на поверхности получаем

$$\frac{d^4 f}{d\eta^4} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

$$f = r_0 (1 + i\eta - e^{i\eta}) \rightarrow r_0 (1 + i^{3/2} k^{1/2} c^{1/2} y_2) \quad (|\eta| \rightarrow \infty) \quad (4.1)$$

Если $y_2 \ll |c|$, формула (1.12), в которой $y_2 - y_2^* \approx y_2 - c/\lambda_1$, переписывается в виде

$$f = \delta \frac{1-c}{\lambda_1} - \frac{c}{1-c} - \delta^2 \frac{D}{\lambda_1} - \delta c B + \frac{1}{2} i\pi \frac{\lambda_4}{\lambda_1^5} c^3 [\delta(1-c) - \delta^2 D] +$$

$$+ \left[\frac{\lambda_1}{1-c} + \delta \lambda_1 B \right] y_2 + \dots \quad (4.2)$$

причем мнимая часть отброшенных здесь членов является величиной высшего порядка малости по сравнению с $\delta^2 c^3$. Сращивание пропорциональных y_2 членов в (4.1) и (4.2) ведет к $r_0 = i^{-1/2} (kc)^{-1/2} [\lambda_1 (1-c)^{-1} + \delta \lambda_1 B]$. Но тогда сумма не зависящих от y_2 членов из (4.2) должна иметь порядок $r_0 = O(k^{-1/2} c^{-1/2})$, поэтому в двух приближениях

$$c_r = \frac{\delta}{\lambda_1} \left[1 - \delta \left(\frac{2}{\lambda_1} + B + D \right) \right] \quad (4.3)$$

Приравняем теперь мнимые части постоянных в обеих формулах (4.1) и (4.2), в результате с учетом двух членов разложения по δ получим

$$-\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} k^{-1/2} c_r^{-1/2} [1 + c_r + \delta B] = -\frac{\delta c_i}{\lambda_1} - c_i - 2c_i c_r - \delta c_i B +$$

$$+ \frac{1}{2} \pi \frac{\lambda_4}{\lambda_1^5} \delta c_r^3 [1 - c_r - \delta D]$$

Заменяя в последнем равенстве c_r его выражением (4.3) и принимая во внимание определение δ , получим две части дисперсионного соотношения

$$c_r = \frac{1}{\lambda_1} \frac{k}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} + B + D \right) \right] \quad (4.4)$$

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^{3/2} \frac{R^{1/4}}{k} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} - B - D \right) \right] + \frac{1}{2} \pi \frac{\lambda_4}{\lambda_1^8} \frac{k^4}{R^2} \left[1 - 4 \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{5}{2\lambda_1} + B + D \right) \right] \quad (4.5)$$

Если $c_i=0$, из (4.5) следует асимптотика верхней ветви нейтральной кривой, первый член которой указан в [1]

$$k = \sigma R^{9/20} \left[1 + \frac{9}{10} \sigma R^{-1/20} \left(B + D + \frac{2}{\lambda_1} \right) \right], \quad \sigma = \left(-\frac{1}{2^{1/2}} \frac{\lambda_4}{\lambda_1^{19/2}} \pi \right)^{-1/5} \quad (4.6)$$

$$c_r = \frac{1}{\lambda_1} \sigma R^{-1/20} \left[1 - \frac{1}{10} \sigma R^{-1/20} \left(B + D + \frac{2}{\lambda_1} \right) \right]$$

Напомним, что для профиля Блазиуса $\lambda_4 < 0$.

Согласно (4.5), $\partial c_i / \partial k < 0$ (при $k < R^{1/2}$), поэтому при заданном числе Рейнольдса возмущения затухают, если k превышает нейтральное значение (4.6), и нарастают, если k остается меньше него. Оба слагаемых в (4.5) имеют одинаковый порядок $k = O(R^{9/20})$, причем в окрестности верхней ветви нейтральной кривой по-прежнему $c_r \sim \delta$, но $c_i \sim \delta^4 \ll |c| \sim R^{-1/20}$.

Покажем, что дисперсионные соотношения (2.3) и (4.4), (4.5) переходят друг в друга. Возьмем $k \gg R^{9/8}$, тогда из формулы (2.8) после выделения действительной и мнимой частей следует

$$c_r = \frac{1}{\lambda_1} \frac{k}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} + B + D \right) \right]$$

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^{3/2} \frac{R^{1/4}}{k} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} - B - D \right) \right] \quad (4.7)$$

Отбрасывая в (4.5) содержащие множитель k^4/R^2 члены, которые при $k \ll R^{9/20}$ становятся малыми по сравнению с величинами порядка $R^{1/4}/k$, убеждаемся, что получающаяся в результате такого предельного перехода асимптотика выражений (4.4), (4.5) не только в первом, но и во втором приближении по параметру δ совпадает с асимптотикой (4.7). Перекрывание окрестностей двух ветвей нейтральной кривой означает, что дисперсионные соотношения (2.3) и (4.4), (4.5) описывают всю неустойчивую область, заключенную между этими ветвями. Инкремент нарастания возмущений $\omega_i = k c_i$ везде в неустойчивой области имеет порядок $R^{1/4}$, а его максимум располагается вблизи нижней ветви нейтральной кривой. Кривая $\omega_i = \omega_i(k)$, $R = \text{const}$ (фиг. 1) с промежуточной асимптотикой (2.9) может быть продолжена в окрестность верхней ветви с помощью выражения

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^{3/2} R^{1/4} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{\lambda_1} - B - D \right) \right] + \frac{1}{2} \pi \frac{\lambda_4}{\lambda_1^8} \frac{k^5}{R^2} \left[1 - 4 \frac{k}{\sqrt{R}} \left(\frac{5}{2\lambda_1} + B + D \right) \right]$$

обращающегося в нуль при нейтральном значении k (4.6).

Как видно из (4.4), (4.5), пятислойной схеме возмущенного поля скоростей с критическим слоем, отделенным от пристеночного невязкой областью, соответствует единственная мода колебаний, которая переходит в первую моду из спектра образующих трехслойную структуру течения собственных колебаний, когда волновое число изменяется в диапазоне $R^{1/8} \leq k \leq R^{9/20}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lin C. C.* On the stability of two-dimensional parallel flows. P. 3. Stability in a viscous fluid.— *Quart. Appl. Math.*, 1946, v. 3, № 4, p. 277–301.
2. *Smith F. T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— *Proc. Roy. Soc. London, A*, 1979, v. 366, № 1724, p. 91–109.
3. *Bodonyi R. J., Smith F. T.* The upper branch stability of the Blasius boundary layer, including non-parallel flow effects.— *Proc. Roy. Soc. London, A*, 1981, v. 375, № 1760, p. 65–92.
4. *Михайлов В. В.* Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1981, № 5, с. 39–46.
5. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— *Тр. ЦАГИ*, 1974, вып. 1529. 124 с.
6. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— *Adv. Appl. Mech.*, 1974, v. 14, p. 145–239.
7. *Рубан А. И., Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— *Успехи механики*, 1979, т. 2, № 4, с. 57–95.
8. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— *Докл. АН СССР*, 1980, т. 253, № 6, с. 1326–1329.
9. *Жук В. И., Рыжов О. С.* О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля.— *Докл. АН СССР*, 1981, т. 257, № 1, с. 55–59.
10. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.1983