

УДК 532.517

ОБ ЭФФЕКТАХ РЕЗОНАНСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

ЗЕЛЬМАН М. Б., МАСЛЕННИКОВА И. И.

Переход к турбулентности в пограничном слое может вызываться возмущениями малой интенсивности и сопровождается ростом их энергии, возникновением пространственных структур и изменением спектрального состава поля. Ряд существенных свойств процесса допускает интерпретацию в рамках нелинейной теории устойчивости и может быть связан с резонансным взаимодействием.

В экспериментах [1, 2] наблюдался переход, сопровождающийся заметным усилением пульсаций, период которых вдвое превосходит задающийся вибрирующей лентой. Теоретические исследования [3–9] выявили существование резонансного механизма, способного к мощному возбуждению пространственных волн Толлмина – Шлихтинга на частоте субгармоники. В [4] было предположено, что наблюдавшийся режим перехода является результатом эволюции троек резонансно-связанных колебаний, образующих симметричные триплеты [10]. При этом в отличие от моделируемого Крайком и др. [10, 11] типа перехода ведущая роль отводится параметрически выделенным из фона субгармоникам. В последнее время получены экспериментальные подтверждения связи резонансов в симметричных триплетах с субгармоническим режимом [12, 13]. Дальнейшее исследование резонансного механизма остается актуальной проблемой.

В настоящей работе изучается формирование и особенности начальной стадии нелинейного развития триплетов; рассматривается коллективное взаимодействие двумерной волны Толлмина – Шлихтинга с пакетом пространственных; анализируется поведение системы, учитывающей резонансную связь с гармоникой основной волны. Проводится сопоставление с моделью Крайка и данными экспериментов.

Рассмотрим течение в пограничном слое. Поле скоростей возмущенного потока представим в виде $u = (U + \varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w) U_\infty$, где $(U, 0, 0)$ с точностью до членов $\sim 1/R$ отвечает основному движению, $\varepsilon(u, v, w)$ – соответственно x, y, z -компоненты возмущения интенсивности $\varepsilon \ll 1$, $U = U_\infty$ ($y \rightarrow \infty$).

Система безразмерных уравнений для флуктуаций допускает представление [4]

$$\begin{aligned} L_1(\eta) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta}{R} \right) \eta = - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon N_1 \\ L(v) &\equiv L_1(\Delta v) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon N \\ \eta &= v = 0 \quad (y=0); \quad v, \eta < \infty \quad (y \rightarrow \infty) \\ (v, \eta) &= (v_0, \eta_0) \quad (t=0) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь (v, η) – нормальные к стенке компоненты скорости и вихря, N_1, N – нелинейные члены, выражения для которых приведены в [4, 14]. Используя метод асимптотических усреднений для квазигармонических возмущений получим решение в виде

$$(v, \eta) = \sum_j A_j e^{i\theta_j} (\varphi_j(y, R), \eta_j(y, R)) + \varepsilon (f_1, f_2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1j} \frac{\partial}{\partial x} + v_{2j} \frac{\partial}{\partial z} - \gamma_j \right) A_j = \epsilon \sum_{k,r} S_{jkr} A_k A_r e^{i\theta_{jkr}} +$$

$$+ \epsilon^2 \left[\sum_{m,n,k} D_{jmhk} A_m A_n A_h e^{i\theta_{jmhk}} + \sum_{k,r} Q_{jkr} A_k \frac{\partial A_r}{\partial x} e^{i\theta_{jkr}} \right] \quad (2)$$

$$A_j(\epsilon x, \epsilon z, \epsilon t) = A_{j0} \quad (t=0), \quad A_j = A_j^\circ e^{\eta_j t}$$

$$\theta_j = \int \alpha_j dx + \beta_j z - \omega_j t$$

$$\theta_{jkr} = \int (\alpha_j - \alpha_k - \alpha_r) dx - (\omega_j - \omega_k - \omega_r) t$$

$$\theta_{jkrm} = \int (\alpha_j - \alpha_k - \alpha_r - \alpha_m) dx - (\omega_j - \omega_k - \omega_r - \omega_m) t$$

Здесь φ_j, η_j удовлетворяют уравнениям (1) при $\epsilon=0$, $(f_1, f_2) \sim 1$ — периодические по явно входящим x, z, t ; A_j, θ_j — комплексные амплитуда и фаза волны с волновым вектором $k=(\alpha_j, \beta_j)$; $\Omega(k_j)=\omega_j+i\gamma_j$ — решение дисперсионного уравнения линейной задачи Орра — Зоммерфельда, (v_{1j}, v_{2j}) — комплексные груповые скорости квазигармонического пакета, S_{jkr}, D_{jmhk} , Q_{jkr} — коэффициенты связи, выражающиеся через решения прямой φ_j и сопряженной φ_j^+ задач Орра — Зоммерфельда [4, 14]. Изменение толщины пограничного слоя обуславливает зависимость параметров амплитудного уравнения от $R=U_\infty \delta^*/v$. Частота ω_j и размерная z -компоненты волнового вектора β_j/δ^* сохраняются. В расчетах для U использовался профиль Блазиуса.

Как уже отмечалось, эффективное взаимодействие осуществляется в системах из плоской ($\alpha_j, \beta_j=0$) и пар симметричных ($\alpha_k=\alpha_r, \beta_k=-\beta_r$) трехмерных волн [3—5].

Амплитудные уравнения для эволюции такой системы в условиях стационарного в $x=x_0$ и однородного по z спектра с точностью до $\sim \epsilon^2$ принимают вид

$$\left(v_0 \frac{d}{dx} - \gamma_0 \right) A_1 = \epsilon \sum_{n=1}^m S_n A_{2n} A_{2n+1}$$

$$\left(v_n \frac{d}{dx} - \gamma_n - i\Delta\theta_n \right) A_{2n} = \epsilon S_{1n} A_1 A_{2n+1}^* \quad (3)$$

$$\left(v_n \frac{d}{dx} - \gamma_n - i\Delta\theta_n \right) A_{2n+1} = \epsilon S_{1n} A_1 A_{2n}^*$$

$$S_n = \langle N(\varphi_{2n}, \varphi_{2n+1}) \rangle \langle \Delta\varphi_1 \rangle^{-1}$$

$$S_{1n} = \langle N(\varphi_1, \varphi_{2n}^*) \rangle \langle \Delta\varphi_{2n} \rangle^{-1}$$

$$\langle \dots \rangle = \int_0^\infty \dots \varphi_n^+ dy, \quad A_n = a_n e^{i\Phi_n}$$

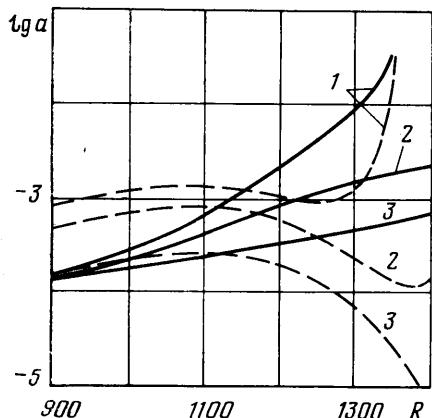
$$\Delta\theta_n = v_n (\alpha_0/2 - \alpha_n) - (\omega_0/2 - \omega_n), \quad n=1, \dots, m$$

Здесь учтено равенство коэффициентов v_j, S_{jkr}, γ_j для пространственных пар $j=2n, 2n+1$. При $m=1$ имеет место случай изолированного триплета, к рассмотрению которого переходим.

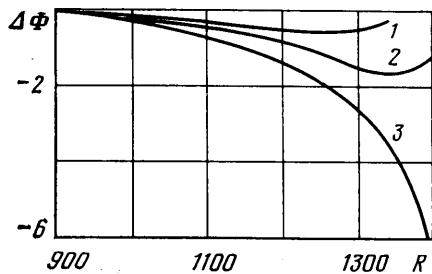
Результаты расчетов развития ($a=a_2=a_3, a_1$) при разных значениях a , представлены на фиг. 1 соответственно сплошными и штриховыми линиями. При этом частотный параметр и безразмерное β в точке $R=900$ имели значения $F=115 \cdot 10^{-6}$, $\beta=0,162$. Важная роль принадлежит на-

чальному уровню возмущений. Процесс носит пороговый характер — существуют минимальные значения амплитуд, ниже которых резонансы неэффективны (кривые 3 на фиг. 1). Оценка пороговых амплитуд следует из соотношения $\max(|\gamma_0 a_1|/S_1 a^2|, |\gamma_1|/S_{11} a_1|) \leq 1$.

При превышении пороговых значений для R во внутренней области кривой нейтральной устойчивости результаты расчетов совпадают с данными [4], полученными в пренебрежении $\Delta\theta_1 \neq 0$ (кривые 1 на фиг. 1). При $a_1 > a$ существует участок параметрического усиления субгармоники при сохранении линейного развития a_1 . Интенсивности волн выравниваются.



Фиг. 1



Фиг. 2

Процесс на следующем этапе характеризуется продолжением роста трехмерных колебаний, тогда как поведение двумерного существенно связано со знаком γ_0 . Так, выравнивание внутри нейтральной кривой ($\gamma_0 > 0$) приводит к немедленному нарастанию всех компонент триплета. За пределами области, где $\gamma_0 \geq 0$, картина меняется и усиление субгармоник не препятствует затуханию a_1 . В дальнейшем нелинейный резонанс вновь приводит к росту всех колебаний (кривые 2 на фиг. 1). Такой рост носит взрывной характер и сопровождается локализацией фаз возмущений.

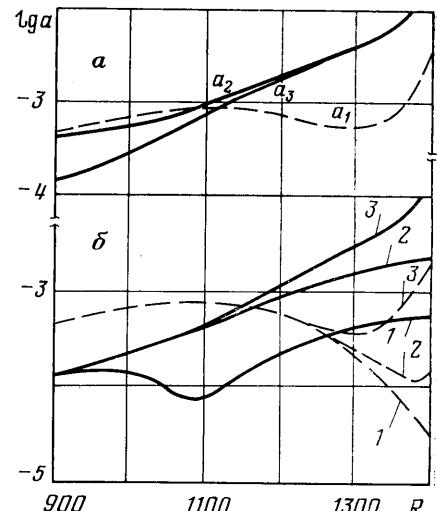
На фиг. 2 показано поведение фазовой функции $\Delta\Phi = \Phi_1 - 2\Phi + \int \Delta\theta_1 dx$ (в произвольных единицах) при различных уровнях основной волны a_1 . Видно, что при сильном взаимодействии (кривые 1, 2 на фиг. 1) $\Delta\Phi \rightarrow 0$ (кривые 1, 2 на фиг. 2). Допороговому режиму соответствует линия 3 (фиг. 2), локализация отсутствует. Эффективность резонанса в триплете зависит от положения на оси x точки генерации колебаний и соотношения их начальных фаз, изменение которых, однако, не приводит к качественным сменам картины эволюции [4, 14].

До сих пор существование «симметричных» волн равной интенсивности $a_2 = a_3$ предполагалось a priori. Расчеты обосновывают такое предположение (фиг. 3, a). Происходит быстрое выравнивание амплитуд косых волн, существенно отличных в начальном сечении ($a_2 > a_3$), после чего реализуется эволюция элементарного триплета. Указанное поведение носит общий характер. В области взаимодействия с плоской пространственной волной с (α, β) возбуждает волну с $(\alpha, -\beta)$ и, таким образом, возникновение симметричных пар само является следствием трехволнового взаимодействия. Такое поведение находит подтверждение в эксперименте [12].

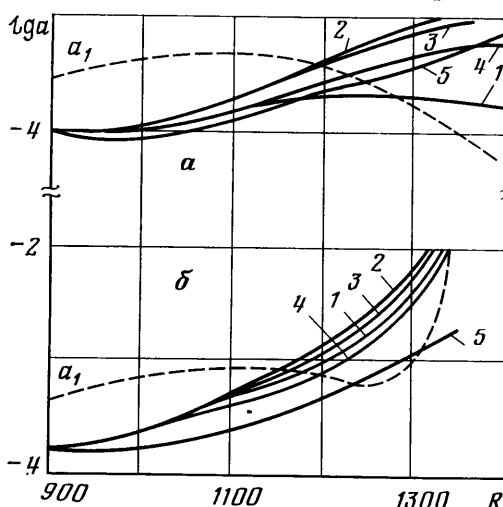
Влияние угла эволюции $\text{arctg}(\beta/\alpha)$ трехмерных волн на резонансное взаимодействие осуществляется через изменение расстройки $\Delta\theta_1$ и коэффициентов S_1, S_{11} уравнения (3). На фиг. 3, б сплошными кривыми по-

казано нарастание пространственных возмущений ($a_2=a_3$) при разных значениях $|\beta|$. Условия резонанса для волн 1, 2, 3 выполнены при $R=700, 900, 1300$ соответственно. Несмотря на неодинаковость эффективных инкрементов, нарастание осуществляется во всех приведенных случаях. Тогда существует целый спектр пространственных волн, способных к резонансному возбуждению. Обнаруживается, что ширина такого спектра по α может достигать 10% от величины α_p — значения в точке x точного резонанса. Дальнейшее увеличение $\Delta\theta_i$ приводит к разрушению связи в триплете. Факт неизбирательности резонанса, отмечаемый также в [8], по-видимому, объясняется уширением резонансной области из-за роста инкрементов и находит подтверждение в экспериментах [12].

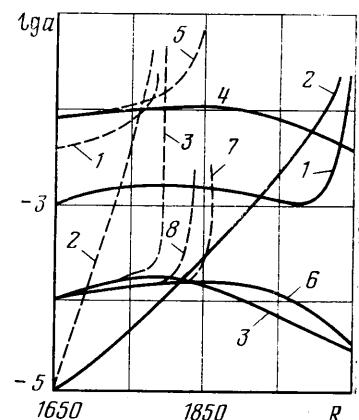
Существование широкого по спектру диапазона возмущений, способных к резонансному взаимодействию с выделенной двумерной волной, ставит вопрос о возбуждении в реальных условиях пакета пространственных пульсаций. Совместная эволюция двумерной волны амплитуды a_1 с пятью парами симметричных пространственных волн ($a_n=a_{n+1}$, $\omega_n=\omega_{n+1}=\omega_0/2$, $\beta_n=-\beta_{n+1}$; $n=2, 4, 6, 8, 10$), отличающихся значениями β_n и, следовательно, расстройкой $\Delta\theta_n$, показана на фиг. 4. Резонансные условия выполняются для волн 2, 3, 4 при $R=900, 1100, 1300$ соответственно, для волн 1 и 5 — вне рассматриваемого интервала, при $R < 900$ (волна 1) и $R > 1400$ (волна 5). Как видно из фиг. 4, a , нарастание про-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

странственных волн мало отличается от случая изолированных триплетов (фиг. 3). Плоская волна играет в основном роль передаточного звена и испытывает усредненное влияние всех пар. При повышении уровня начальных амплитуд происходит взрывное нарастание компонент и отмечается тенденция к выравниванию их интенсивностей.

Следует обратить внимание на характерное поведение волн 1 и 5. При достаточно низком уровне начальных амплитуд из-за отсутствия синхронизма волна 1 не вовлекается в коллективное взаимодействие (фиг. 4, a). Увеличение $a(x_0)$ до уровня значений на фиг. 4, б приводит к ее росту даже при тех же значениях $\Delta\theta$. Более инвариантно поведение волны 5 с малыми значениями числа $|\beta|$ (почти плоское возмущение), для которой рассинхронизация остается эффективной. Причины различия связаны с неодинаковостью величин коэффициентов S_{in} : оказывается, рост $|\beta|$ приводит к увеличению связи, с приближением же к плоскому случаю коэффициент уменьшается.

Расчеты показали, что при интенсивностях $a_i \sim 10^{-3}$ одновременное усиление испытывают пространственные волны Толльмина — Шлихтинга в пучке с $\text{arctg}(\beta_n/\alpha_n)$ от 30 до 60°, тогда как условия резонанса выполняются для волн с $\text{arctg}(\beta/\alpha) \approx 45^\circ$.

Полученные данные хорошо согласуются по скоростям роста с измерениями [12].

В обсуждавшихся случаях эффекты нелинейного самовоздействия не включались в рассмотрение. Между тем представляются реальными условия, когда задающее двумерное колебание достигает соответствующего уровня интенсивности уже на параметрической стадии развития триплетов. Искажается среднее движение, генерируются гармоники. Взаимодействие нелинейной волны с фоновыми возмущениями рождает новые резонансные связи. Наряду с прямыми резонансами трехволниевые взаимодействия могут осуществляться с участием гармоники. (Неустойчивости, связанные с такими взаимодействиями, известны как модуляционные [15].) Для их исследования требуется привлечь следующее приближение теории.

Учитывая, что максимальные связи плоских волн реализуются в симметричных триплетах, получим из (2)

$$v_0 A'_0 = \gamma_0 A_0 + \epsilon S_1 A_1 A_2 e^{-i\Delta_2 x} + \epsilon^2 D A_0 |A_0|^2 + \epsilon^2 C_1 A_1^* A_3 A_4 e^{-i\Delta_4 x} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_1 A'_{1,2} &= \gamma_1 A_{1,2} + \epsilon S A_0 A_{2,1}^* e^{i\Delta_2 x} \\ v_3 A'_{3,4} &= \gamma_3 A_{3,4} + \epsilon^2 C_2 A_0^2 A_{4,3}^* e^{i\Delta_4 x} \\ \Delta_1 &= 2\alpha_0 - 2\alpha_{3,4}, \quad \Delta_2 = \alpha_0 - 2\alpha_{1,2} \\ D &= \langle N(\phi_0, \phi_0) + N(\phi_0, \phi_0^*) \rangle \langle \Delta \phi_0 \rangle^{-1} \\ C_1 &= \langle N(\phi_2, \phi_0^*) \rangle \langle \Delta \phi_0 \rangle^{-1} \\ C_2 &= \langle N(\phi_1, \phi_3, \phi_4) \rangle \langle \Delta \phi_3 \rangle^{-1} \\ \Delta \phi_j &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right) \phi_j, \quad A' = \frac{\partial}{\partial x} A \end{aligned}$$

Функции (ϕ_1, ϕ_2) определяются неоднородными уравнениями Оппа — Зоммерфельда

$$L \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = N \left\{ \begin{matrix} (\phi_3, \phi_4) \\ (\phi_0, \phi_0) \end{matrix} \right\}$$

Система включает пять волн. Основная волна со спектром $(\omega, \alpha_0, 0)$, испытывающая самовоздействие, резонансна с парой пространственных субгармоник $(\omega/2, \alpha/2 + \Delta_2, \pm\beta)$ и взаимодействует с волнами $(\omega, \alpha + \Delta_1, \pm\beta_1)$, синхронизированными с ее гармоникой.

Значение коэффициентов и закон изменения амплитуд получены численным интегрированием.

На фиг. 5 представлены зависимости амплитуд, рассчитанных при $F = -59 \cdot 10^{-6}$ в диапазоне $R = 1650 - 2050$. Кривые 2, 3, 1 соответствуют суб-

гармонической $A_{1,2}$, пространственной на основной частоте $A_{3,4}$ и задающей плоской A_0 волнам.

При начальной интенсивности $A_0 \sim 10^{-3}$ (сплошные кривые) определяющая роль принадлежит прямому резонансу с субгармоникой. Включение взаимодействия с гармоникой не приводит к заметным эффектам. Величины $A_{3,4}$ практически не отклоняются от линейного поведения даже тогда, когда плоская волна уже начинает резонансно усиливаться. Изменение начальных интенсивностей $A_{1,2}$, $A_{3,4}$ сохраняет определяющую роль субгармоники. Тенденцию к возбуждению пространственных колебаний с ω можно отметить лишь в зоне взрывного роста триплета A_0 , $A_{1,2}$. В этом смысле субгармоника осуществляет накачку всей системы. Режим остается субгармоническим.

Повышение исходного уровня двумерного колебания до $\sim 10^{-2}$ качественно меняет картину (штриховые кривые 1–3 фиг. 5). Взрывной рост этого колебания наблюдается еще до эффективного воздействия $A_{1,2}$. Плоская волна инициирует интенсивное увеличение всех пространственных пульсаций. Природа такого поведения целиком связана с эффектами самовоздействия, которые в рассматриваемой области вторичной неустойчивости A_0 и приводят к взрывным инкрементам. На фиг. 5 представлены также результаты расчетов системы (4) в отсутствие субгармоник ($A_{1,2} = 0$). Линия 5 иллюстрирует самовоздействие изолированной двумерной волны A_0 ($D \neq 0$, $C_1 = C_2 = 0$). Траектории A_0 и $A_{3,4}$ с $\beta_1 = 0,095$ в точке $R = 1650$ в условиях взаимодействия ($D = 0$, $(C_1, C_2) \neq 0$) соответствуют кривым 4, 6. Изменение угла распространения трехмерных волн $A_{3,4}$ ($\beta_1 = -0,25$; $R = 1650$) практически сохраняет их вид. Включение в анализ всех факторов системы ($(D, C_1, C_2) \neq 0$) приводит к резкому усилинию интенсивности $A_{3,4}$. Кривые 7, 8 демонстрируют этот факт для волн с $\beta_1 = 0,095$ и 0,25 при $R = 1650$. При этом траектория A_0 совпадает с кривой 5, что и подтверждает вывод о доминирующей роли самовоздействия.

Рассмотрение эволюции в области взрывных нарастаний теряет смысл из-за неприменимости слабонелинейной теории. С этой точки зрения поведение системы при $A_0 \sim 10^{-2}$ может не отвечать физической реальности.

В рамках системы (4) удается проанализировать модель Крайка, предложенную для объяснения структуры клебановского типа перехода [10]. Изучение этой модели предпринималось в [11]. При этом рассматривалась эволюция группы, состоящей из четырех волн Толлмина – Шлихтинга, задающей $\psi_0 = A_0 \phi_0 e^{i(\alpha(\omega)x - \omega t)}$, пары пространственных $\psi_{3,4} = A_{3,4} \phi_{3,4} e^{i(\alpha x \pm \beta_1 z - \omega t)}$ и резонансной с ними $\psi_g = A_g \phi_g e^{-i(2\omega t - \alpha(2\omega)t)}$ (субгармоники исключены из рассмотрения вообще). С точностью до $\sim \epsilon^2$

$$\begin{aligned} v_0 A_0' &= \gamma_0 A_0 + \epsilon S_0 A_g A_0^* e^{i\Delta x} \\ v_g A_g' &= \gamma_g A_g + \epsilon S_g A_3 A_4 + \epsilon S_{g2} A_0^2 e^{-i\Delta x} \\ v_3 A_{3,4}' &= \gamma_{3,4} A_{3,4} + \epsilon S_{3,4} A_{4,3}^* A_g \\ \Delta &= \alpha(2\omega) - 2\alpha(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

Представим A_g в виде суммы, так что

$$\begin{aligned} A_g &= A_{g1} + A_{g2}, \\ v_g A_{g1}' &= \gamma_g A_{g1} + \epsilon S_{g1} A_3 A_4, \quad v_g A_{g2}' = \gamma_g A_{g2} + \epsilon S_{g2} A_0^2 e^{-i\Delta x} \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Delta > o(\epsilon)$ (гармоника нерезонансна с собственным колебанием) и $(1/A) \partial/\partial x \ll \Delta$, получим соотношение

$$A_{g2} \approx \epsilon \frac{S_{g2}}{i\Delta + \nu} A_0^2$$

определяющее амплитуду гармоники [16]. Согласно модели [4, 14], 28

$|A_{3,4}| < |A_s| \sim |A_0|^2$. Тогда из анализа триплетов следует, что A_{s1} ведет себя по линейному закону и в расчетной области параметров (R, ω) быстро затухает. Уравнения (5) сводятся к виду

$$v_0 A_0' = \gamma_0 A_0 + \epsilon^2 \frac{S_0 S_{s1}}{i\Delta + \gamma_s} A_0^2 A_0^*$$

$$v_3 A_{3,4}' = \gamma_{3,4} A_{3,4} + \epsilon^2 \frac{S_{3,4} S_{s1}}{i\Delta + \gamma_s} A_{4,3}^* A_0^2$$

который совпадает с системой (4), если в последней не учитывается влияние нелинейной добавки в осредненное движение и отсутствуют субгармонические колебания. Искажение средней скорости мало влияет на инкременты колебаний. Действительно, данные прямых расчетов модели Крайка [11] и представленные на фиг. 5 (кривые 5, 7) практически не различаются. Тогда приложимы и выводы о том, что рост пространственных волн $\Phi_{3,4}$ осуществляется из-за взрывного самовоздействия ψ_0 и происходит в области, где применимость теории сомнительна.

Возбуждение субгармоники представляется основным признаком действия рассмотренного механизма и подтверждает его ведущую роль в процессе субгармонического перехода.

Отсутствие такого проявления в клебановском режиме указывает на существование условий, когда взаимодействие неэффективно. Измерения [2, 17] показали замедление роста основной волны и генерацию сравнимых с ней гармоник без заметного роста субгармонических колебаний. Такое поведение, на наш взгляд, может быть объяснено в рамках нелинейной теории критического слоя [18, 19]. (Наблюдения в упомянутых экспериментах проводились в условиях, где результаты теории приложимы.) Действительно, согласно [18, 19], волны с энергией, превышающей $\sim 10^{-4}$, в результате самовоздействия замедляют скорость модуляции, генерируют интенсивные гармоники и приводят к перегибному перераспределению поперек потока. Тогда можно ожидать ослабления синхронизма в триплетах и развития эффективной вторичной неустойчивости к пространственным возмущениям. Доминирующий механизм образования трехмерности в клебановском переходе представляется качественно отличным от изученного и необъяснимым резонансными моделями слабонелинейного подхода.

В заключение авторы выражают благодарность А. Г. Володину за полезное обсуждение и В. Я. Левченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 49–58.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
3. Штерн В. Н. О неустойчивости к трехмерным возмущениям.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 29–34.
4. Володин А. Г., Зельман М. Б. Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5, с. 78–84.
5. Craik A. D. Non-linear resonant instability in boundary layers.—J. Fluid Mech., 1971, v. 50, № 2, p. 393–413.
6. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость.—Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6, с. 1277–1280.
7. Herbert T. Subharmonic Three-Dimensional Disturbances in Unstable Plane Shear Flows.—AIAA Pap., 1983, v. 83, p. 1759.
8. Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Сухоруков А. Н., Шмидт В. М. О переходе от ламинарного режима давления к турбулентному.—Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике, Алма-Ата, 1981. Алма-Ата, 1981, с. 109.
9. Orszag A. E., Patera A. T. Secondary instability of wall-bounded shear flows.—J. Fluid. Mech., 1983, v. 128, p. 347–385.

10. *Craik A. D. D.* Nonlinear evolution and breakdown in unstable boundary layers.—*J. Fluid Mech.*, 1980, v. 99, № 2, p. 247–265.
11. *Nayfeh A. H., Bozatly A. N.* Nonlinear interactions in boundary layers.—*AIAA Pap.*, 1979, v. 79, p. 1496.
12. *Качанов Ю. С., Левченко В. Я.* Резонансное взаимодействие возмущений при переходе к турбулентности в пограничном слое. Препринт № 10, 1982.
13. *Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарин В. С.* Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое. Препринт № 10, 1983.
14. *Зельман М. Б., Масленникова И. И.* Резонансное возбуждение пространственных возмущений в пограничном слое.—В кн.: Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. мех., 1982.
15. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам* и современная теория нелинейных колебаний и волн.—*Усп. физ. наук*, 1979, т. 128, № 4, с. 579–624.
16. *Вильхельмссон Х., Вейланд Я.* Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. 223 с.
17. *Klebanoff P. S., Tidström K. D., Sargent L. M.* The three dimensional nature of boundary-layer instability.—*J. Fluid Mech.*, 1962, v. 12, № 1, p. 1–34.
18. *Зельман М. Б.* Развитие возмущений конечной интенсивности в плоскопараллельных потоках. Препринт № 10, 1981.
19. *Реутов В. П.* Нелинейная стадия двумерной неустойчивости в пограничном слое. Препринт № 57, 1982.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.VI.1983