

получим для  $x_0$  следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T^2} - W \frac{dC}{dW} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

Используя (2.1), можно показать, что знак величины  $dC/dW$  совпадает со знаком  $\chi$ . Поэтому солитоны устойчивы при  $\chi > 0$  и неустойчивы при  $\chi < 0$ , что является обобщением результатов, полученных в [6, 7]. Поскольку для двухслойной жидкости конечной глубины  $\chi > 0$ , солитоны в такой среде устойчивы относительно длинных изгибных возмущений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Joseph R. I. Solitary waves in a finite depth fluid.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1977, v. 10, № 12, p. L225–L227.
2. Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs L. D. Weakly — nonlinear, long internal gravity waves in stratified fluids of finite depth.— J. Hydronautics, 1978, v. 12, № 4, p. 157–165.
3. Korteweg D. J., Vries G., de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a newtype of long stationary waves.— Phil. Mag. Ser. (5), 1895, v. 39, p. 422–443.
4. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids.— J. Phys. Soc. Jpn, 1975, v. 39, № 4, p. 1082–1091.
5. Segur H., Hammack J. L. Soliton models of long internal waves.— J. Fluid Mech., 1982, v. 118, p. 285–304.
6. Кадомцев Б. Б., Петелишвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.— Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753–756.
7. Ablowitz M. J., Segur H. Long internal waves in fluids of great depth.— Stud. Appl. Mathematics, 1980, v. 62, № 3, p. 249–262.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 509 с.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.VIII.1983

УДК 533.6.011

### ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТРАНСЗВУКОВОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

ЧЕРНОВ И. А.

При годографическом рассмотрении задачи о плоском установившемся безвихревом течении газа полезно использовать процедуру трансзвукового разложения, которая сводит уравнение Чаплыгина к бесконечной системе уравнений с частными производными, первым среди которых является уравнение Трикоми. Теория уравнения Трикоми в применении к задачам аэродинамики развивалась в ряде работ [1–5]. Соответствующие результаты можно трактовать в рамках модели газа Трикоми [2], который хорошо аппроксимирует реальный газ при скоростях, близких к скорости звука.

Чтобы расширить диапазон применимости теории и оценить величину ошибки, возникающей при переходе к приближенному уравнению, необходимо найти высшие приближения в трансзвуковом разложении решения полного уравнения. Обычно это делается с учетом конкретной структуры основного решения. Так, в случае автомодельного решения уравнения Трикоми используют представление решения уравнения Чаплыгина в виде ряда по автомодельным составляющим [6, 7]. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, первое из которых однородное, остальные — неоднородные.

Ниже дано обобщение этой процедуры, которое состоит в непосредственном изучении системы уравнений с частными производными и представлении частных решений для произвольного приближения через основное решение начального приближения. Этот результат можно трактовать как построение некоторого оператора перехода от решения уравнения Трикоми к решению уравнения Чаплыгина.

1. Уравнения Чаплыгина, описывающие плоские установившиеся течения идеального газа, могут быть записаны в виде [2]

$$\varphi_\theta + G(\eta) \psi_\eta = 0, \quad \varphi_\eta - \eta G(\eta) \psi_\theta = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$ ,  $\psi$  — потенциал скорости и функция тока,  $\eta$  — переменная Франкля, введенная в [1] и характеризующая величину отклонения скорости потока от звуковой,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к выбранной оси. Функция  $G(\eta)$  в окрестности

$\eta=0$  является аналитической и может быть разложена в ряд  $G(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \eta^i$ .

Процедура трансзвукового разложения искомых функций  $\varphi$ ,  $\psi$  состоит в представлении их в виде ( $\eta = O(\varepsilon)$ )

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i, \quad \varphi = G_0 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i, \quad \psi_{i+1} = O(\varepsilon \psi_i), \quad \varphi_{i+1} = O(\varepsilon \varphi_i) \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к бесконечной системе

$$\varphi_{0\theta} + \psi_{0\eta} = 0, \quad \varphi_{0\eta} - \eta \psi_{0\theta} = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_{m\theta} + \psi_{m\eta} = - \sum_{j=1}^m Q_j \eta^j \psi_{m-j} \eta, \quad \varphi_{m\eta} - \eta \psi_{m\theta} = \sum_{j=1}^m Q_j \eta^{j+1} \psi_{m-j} \theta \quad (4)$$

Первая система для  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  эквивалентна уравнению Трикоми для  $\psi_0$ , последующие — неоднородному уравнению Трикоми для  $\psi_m$ .

Если величина отношения удельных теплоемкостей  $\gamma = 1,4$ , то первые из коэффициентов  $Q_i$  имеют следующие значения:  $Q_1 = -1,1652$ ;  $Q_2 = 1,2560$ ;  $Q_3 = -1,1493$ ;  $Q_4 = 0,94364$ .

Предполагая известным решение системы (3) для нулевого приближения, представим частное решение системы (4) в виде

$$\varphi_m = F_m \eta^m \varphi_0 + \sum_{i=0}^{m-1} E_{mi} \eta^i \int \eta^{m-1-i} \varphi_0 d\eta, \quad \psi_m = D_m \eta^m \psi_0 + \sum_{j=0}^{m-2} C_{mj} \eta^j \int \eta^{m-1-j} \psi_0 d\eta$$

При этом представлении вводится в рассмотрение  $2m+1$  неопределенных коэффициентов  $F_m$ ,  $D_m$ ,  $E_{mi}$ ,  $C_{mj}$ . Подстановка (5) в (4) дает алгебраическую систему  $2m+1$  уравнений для их определения ( $m=1, 2, \dots$ )

(5)

$$\begin{aligned} -F_m + D_m &= - \sum_{j=1}^m Q_j D_{m-j} \\ - \sum_{i=0}^{m-1} E_{mi} + m D_m + \sum_{i=0}^{m-2} C_{mi} &= - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j \left[ (m-j) D_{m-j} + \sum_{i=0}^{m-j-2} C_{m-j-i} \right] \\ (m-i-1) E_{mi} + (i+1) C_{mi} &= - \sum_{j=1}^i (i-j+1) Q_j C_{m-j-i-j+1} \quad (i=0, \dots, m-2) \\ m F_m + \sum_{i=0}^{m-1} E_{mi} - \sum_{i=0}^m C_{mi} &= \sum_{j=1}^{m-2} Q_j \sum_{i=0}^{m-j-2} C_{m-j-i} \\ (i+2) E_{mi+2} + (m-i-2) C_{mi} &= - \sum_{j=1}^i (m-i-2) Q_j C_{m-j-i-j} \quad (i=0, \dots, m-2) \\ E_{m1} &= 0, \quad E_{m, m-2} = 0 \end{aligned}$$

Эта система уравнений разрешима, и рекуррентные формулы для коэффициентов  $m$ -го приближения находятся в удобном для расчета на ЭВМ виде.

Характерным свойством решения является тот факт, что в приближениях, номер которых кратен трем ( $m=3l$ ,  $l=1, 2, \dots$ ), один из коэффициентов, например  $E_{3l, 0}$ , может быть взят произвольным. Поскольку была поставлена цель нахождения частного решения, то можно положить его равным нулю.

Ниже приведены численные значения коэффициентов до четвертого приближения включительно:  $D_1 = E_{10} = 0,58258$ ;  $F_1 = -D_1$ ;  $E_{20} = E_{21} = 0$ ;  $C_{20} = 0,91664$ ;  $D_2 = -0,11892$ ;  $F_2 = 0,45832$ ;  $E_{31} = 0$ ;  $D_3 = 0,028673$ ;  $F_3 = -0,30762$ ;  $E_{32} = -0,048396$ ;  $C_{30} = 0,096792$ ;  $C_{31} = 0$ ;  $E_{41} = E_{42} = C_{40} = 0$ ;  $D_4 = 0,029434$ ;  $F_4 = 0,18758$ ;  $E_{40} = 0,050133$ ;  $E_{43} = 0,087726$ ;  $C_{41} = -0,15040$ .

2. Если в качестве нулевого взять автомодельное решение в виде

$$\varphi_0 = \rho^{\lambda+1/2} g_0(t), \quad \psi_0 = \rho^{\lambda} f_0(t), \quad \rho = \sqrt{\theta^2 + \frac{4}{9} \eta^3}, \quad t = \frac{\theta}{\rho}$$

то описанная процедура нахождения частных решений дает для  $\psi_m$  следующее автомодельное представление:

$$\psi_m = \rho^{\lambda+2m/3} f_m(t)$$

Формула (5) предыдущего параграфа позволяет выразить  $f_m$  через  $f_0$ . В частности

$$f_1 = -\frac{Q_1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} (1-t^2)^{1/3} f_0, \quad f_2 = (1-t^2)^{2/3} (\alpha f_0 + \beta t f_0')$$

Функции  $f_1, f_2$  с коэффициентами  $\alpha, \beta$  были найдены в [7], в [8] указаны соответствующие выражения для  $f_3$  и  $f_4$ . Эти результаты легко получаются из второй формулы (5).

Автор благодарит Л. И. Константинову за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5, с. 387–422.
2. Фалькович С. В. Об одном классе сопел Лавалья.— ПММ, 1947, т. 11, № 2, с. 223–230.
3. Овсянников Л. В. О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера — Дарбу.— Докл. АН СССР, 1953, т. 91, № 3, с. 457–460.
4. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лавалья.— Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2, с. 290–293.
5. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
6. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
7. Фалькович С. В. Околосзвуковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии.— ПММ, 1964, т. 25, № 2, с. 218–228.
8. Горский В. Б. Безударное течение газа в сопле Лавалья.— В кн.: Трансзвуковое течение газа. Саратов: Изд. Саратовск. ун-та, 1964, с. 22–62.

Саратов

Поступила в редакцию  
14.VI.1983

УДК 533.6.011.5

### ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

РЫЛОВ А. И.

Решена задача о построении оптимального движения поршня, ограничивающего в начальный момент некоторый объем газа. Ищется такое движение, при котором указанный поршень реализует наибольшую работу при наличии ограничений на перемещение поршня и на время этого перемещения. Рассмотрены случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Приведены численные примеры. Отмечена некоторая аналогия между полученным решением и известными решениями для двумерных сверхзвуковых оптимальных сопел.

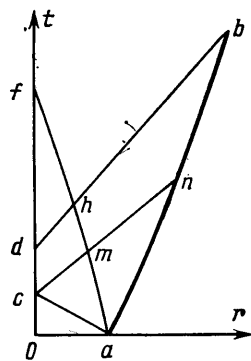
1. Рассмотрим одномерное нестационарное симметричное относительно оси  $r=0$  (фиг. 1) движение невязкого и нетеплопроводного газа в объеме, ограниченном поршнем, перемещающимся по траектории  $ab$ . Здесь  $t$  и  $r$  — эйлеровы координаты:  $t$  — время,  $r$  — линейная координата. Заданное состояние газа при  $t=0$  в сечении  $0a$ , так же как и последующее движение газа, при  $t>0$ , предполагается неразрывным, но оно может быть и неизэнтропическим, т. е. с различной энтропией для каждой частицы газа. В указанных предположениях требуется найти такое движение поршня, т. е. траекторию  $ab$ , при котором поршень реализует наибольшую работу для заданных ограничений на перемещение  $r_b$  и на время этого перемещения  $t_b$ . Иными словами, требуется выбрать такое движение поршня, при котором максимально возможная часть исходной (на момент  $t=0$ ) энергии газа перейдет в работу, производимую выдвигающимся поршнем. Примеры подобных задач в технических приложениях для случая плоской симметрии хорошо известны.

С точностью до несущественного сомножителя работа  $A$ , производимая поршнем, равна

$$A = \int_a^b r^{\beta} p^- dr, \quad p^- = p - p^+ \quad (1.1)$$

где  $p$  — давление газа,  $p^+$  — внешнее давление, которое условно считается постоянным,  $\beta=0, 1, 2$  в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

По аналогии с вариационными задачами двумерной сверхзвуковой стационарной газовой динамики применим метод контрольного контура [1], а точнее, наиболее удобную его модификацию, названную методом неопределенного контрольного контура [2]. В соответствии с



Фиг. 1