Интеграл I_1 положителен для всех функций $f(r)$, так как справедливы соотношения: $V(R)=0$, $g(r_c)=0$, $V'(r)<0$. Таким образом, интегральный оператор с ядром $G(r, r_1)$ положительно определенный и собственные числа $\lambda_k>0$. Следовательно, рабочая точка (p_0, q_0), при которой $\alpha>C$, что соответствует области на характеристике лифта

$$\psi'<-C(2\pi H)^{-1} \tag{11}$$

устойчива.

При условии $0<\alpha<C$ диагональные значения ядра Грина могут принимать и отрицательные значения, а это означает наличие отрицательных собственных чисел [2] и неустойчивость соответствующего режима работы подъемника.

Выясним теперь физический смысл величины C, определенной в формуле (10). Продифференцировав по q_0 обе части выражения

$$\frac{dp_0}{dr}=\frac{\mu_0(\lambda_0)}{2\pi rkH}q_0$$

получим

$$\frac{d}{dq_0}\left(\frac{dp_0}{dr}\right)=\frac{\mu_0}{2\pi rkH-q_0\mu_0'}$$

Проинтегрируем последнее равенство по r

$$\frac{d}{dq_0}(p_R-p_з)=\int\limits_{r_c}^{R}\frac{\mu_0(\lambda_0)}{2\pi rkH-q_0\mu_0'}dr$$

Из полученного выражения и соотношения для функции $F(r)$ следует, что величина $-C/(2\pi H)$ представляет собой тангенс угла наклона индикаторной диаграммы пласта, построенной в координатах $(p_з, q)$.

В связи с этим можно сделать вывод, что устойчивость работы фонтанной скважины, продуцирующей неньютоновскую нефть, так же как и в случае ньютоновской нефти [1], зависит от характера пересечения диаграммы пласта и подъемника. Для убывающей ветви характеристики лифта рабочая точка устойчива в том случае, когда индикаторная диаграмма пласта (фигура, кривая *2*) имеет в этой точке менее крутой наклон, чем характеристика подъемника. Возрастающая ветвь функции $\psi(q)$ всегда соответствует устойчивым режимам работы. В представленном на фигуре случае точка A соответствует неустойчивому, а точка B – устойчивому режиму работы скважины. При достаточно резко изменяющемся наклоне индикаторной диаграммы возможны случаи с тремя и более стационарными режимами. При этом устойчивые и неустойчивые рабочие точки, которые лежат на падающей ветви характеристики лифта, будут чередоваться в зависимости от взаимного расположения диаграмм в окрестности пересечения.

В заключение следует отметить, что предложенный в работе метод анализа и полученные выводы остаются справедливыми и для случая неоднородного пласта, когда проницаемость пласта зависит от радиуса r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М.* О нестационарных процессах при фонтанировании скважин.– Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1964, № 2. с. 31–40.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 511 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1983

УДК 532.592–2

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СЛАБО НЕОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ

РУДЕРМАН М. С.

Уравнение для нелинейных волн в жидкости конечной глубины [1, 2] является нелокальным аналогом уравнения Кортевега – деВриза [3], которое может быть получено из него предельным переходом к малой глубине жидкости. В другом предельном случае, когда глубина жидкости стремится к бесконечности, это уравнение переходит в уравнение Беньямина – Оно [4]. Отметим, что в [1, 2] уравнение жидкости конечной глубины было получено из качественных соображений, без строгого вывода. В [5] дан строгий вывод этого уравнения для частного случая двухслойной жидкости.

Уравнение Кадомцева – Петвиашвили [6] является обобщением уравнения Кортевега – деВриза на слабо неодномерный случай. На основе этого уравнения исследована устойчивость солитонов относительно изгибных возмущений, характерная длина которых много больше ширины солитона [6]. В [7] получено слабо неодномерное уравнение Беньямина – Оно и исследована устойчивость солитонов.

В настоящей работе обобщение, аналогичное [6, 7], сделано для волн в жидкости конечной глубины в случае двухслойной жидкости. Получено слабо неодномерное уравнение жидкости конечной глубины и с его помощью исследована устойчивость солитонов относительно изгиба.

1. Вывод слабо неодномерного уравнения жидкости конечной глубины. Рассмотрим двухслойную жидкость с верхним слоем толщиной H и нижним – толщиной h. Плотность нижней жидкости ρ, верхней – $\chi\rho$, $\chi<1$. Снизу жидкость ограничена горизонтальным дном, а сверху – горизонтальной жесткой крышкой. В декартовой системе координат с осью z_*, направленной вертикально вверх, уравнение поверхности раздела записывается в виде $z_*=\eta_*(t_*, x_*, y_*)$, причем в невозмущенном состоянии $\eta_*=0$. Пусть l – характерная длина возмущения. В дальнейшем считаем, что все возмущения затухают при $|x_*|\to\infty$ и $l\gg h$. Рассматриваем возмущения с амплитудой $\eta/h\sim\varepsilon=h/l$. Кроме того, считаем, что $h\ll H$ и характерный масштаб по y_* много больше l. Параметр $\delta=H/l$ считается произвольным. Заметим, что из условия $h\ll H$ следует $\delta\gg\varepsilon$. Поэтому при разложении по степеням ε можно считать $\delta\sim1$. В результате нелинейные эффекты оказываются сосредоточенными в нижнем слое, а дисперсия, наоборот, определяется только верхним слоем.

С учетом сказанного выше введем безразмерные переменные

$$x=\frac{x_*-ct_*}{l},\qquad y=\sqrt{\varepsilon}\frac{y_*}{l},\qquad z_1=\frac{z_*}{H},\qquad z_2=\frac{z_*}{h},\qquad t=\varepsilon\frac{ct_*}{l},\qquad \eta=\frac{\eta_*}{h}$$

где c – скорость распространения бесконечно малых возмущений. Заметим, что введены две безразмерные вертикальные координаты, поскольку в нижней жидкости характерный вертикальный масштаб h, а в верхней – H.

Считая, что движение потенциально и вводя потенциалы $cl\Phi_1$ и $cl\Phi_2$ для верхней и нижней жидкостей, получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}+\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z_1^2}=0;\qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1}=0\qquad (z_1=1)\tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1}=\varepsilon^2\frac{\partial\eta}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\qquad \left(z_1=\frac{\varepsilon\eta}{\delta}\right)\tag{1.2}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z_2^2}=0;\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}=0\qquad (z_2=-1)\tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}=\varepsilon^3\frac{\partial\eta}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varepsilon^3\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\qquad (z_2=\eta)\tag{1.4}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}\right)^2-$$
$$-\chi\left[\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{1}{\delta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1}\right)^2\right]+\frac{1-\chi}{c^2}gh\eta=0\qquad (z_2=\eta)\tag{1.5}$$

Решение ищем в виде разложения по степеням ε

$$\eta=\varepsilon(\eta^{(1)}+\sqrt{\varepsilon}\eta^{(3/2)}+\varepsilon\eta^{(2)}+\ldots)$$

$$\Phi_1=\varepsilon^2(\Phi_1^{(1)}+\sqrt{\varepsilon}\Phi_1^{(3/2)}+\varepsilon\Phi_1^{(2)}+\ldots),\qquad \Phi_2=\varepsilon(\Phi_2^{(1)}+\sqrt{\varepsilon}\Phi_2^{(3/2)}+\varepsilon\Phi_2^{(2)}+\ldots)$$

Можно показать, что $\eta^{(3/2)}$, $\Phi_2^{(3/2)}$, $\Phi_2^{(5/2)}$, $\Phi_2^{(7/2)}$ пропорциональны соответственно $\eta^{(1)}$, $\Phi_2^{(1)}$, $\Phi_2^{(2)}$, $\Phi_2^{(3)}$ и поэтому их можно положить равными нулю.

Подставляя разложения для Φ_2 в (1.3) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, получим

$$\frac{\partial\Phi_2^{(1)}}{\partial z_2}=0;\qquad \frac{\partial\Phi_2^{(2)}}{\partial z_2}=0;\qquad \Phi_2^{(3)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_2^{(1)}}{\partial x^2}(1+z_2)^2\tag{1.6}$$

$$\Phi_2^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi_2^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2^{(1)}}{\partial y^2}\right)(1+z_2)^2$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^3 и ε^4 в (1.4), получим, воспользовавшись (1.6)

$$\eta^{(1)} = \frac{\partial\Phi_2^{(1)}}{\partial x}; \qquad \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta^{(1)}\frac{\partial\Phi_2^{(1)}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2\Phi_2^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2^{(1)}}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε и ε^2 в (1.5) и используя (1.7), имеем

$$c^2 = (1-\chi)gh$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{3}{2}\eta^{(1)}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\chi}{2}\frac{\partial^2\Phi_1^{(1)}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta^{(1)}}{\partial y^2} = 0 \tag{1.8}$$

Для определения $\Phi_1^{(1)}$ из (1.1), (1.2) найдем

$$\frac{\partial^2\Phi_1^{(1)}}{\partial z_1^2} - \delta^2\frac{\partial^2\Phi_1^{(1)}}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi_1^{(1)}}{\partial z_1} = 0 \quad (z_1=1); \qquad \frac{\partial\Phi_1^{(1)}}{\partial z_1} = -\delta\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} \quad (z_1=0) \tag{1.9}$$

Введем преобразование Фурье по координате x

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

Переходя в (1.9) к преобразованию Фурье, получим

$$\frac{\partial^2\Phi_{1k}^{(1)}}{\partial z_1^2} - \delta^2k^2\Phi_{1k}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi_{1k}^{(1)}}{\partial z_1} = 0 \quad (z_1=1); \qquad \frac{\partial\Phi_{1k}^{(1)}}{\partial z_1} = -i\delta k\eta_k^{(1)} \quad (z_1=0) \tag{1.10}$$

Решение граничной задачи (1.10) имеет вид

$$\Phi_{1k}^{(1)} = ik\eta_k^{(1)}\frac{\mathrm{ch}[\delta k(z_1-1)]}{\mathrm{sh}\,\delta k} \tag{1.11}$$

Обратное преобразование Фурье (1.11) дает при

$$\Phi_1^{(1)} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_k^{(1)}\mathrm{cth}(\delta k)e^{ikx}\,dk \tag{1.12}$$

Выражая в (1.12) $\eta_k^{(1)}$ через $\eta^{(1)}$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\Phi_1^{(1)} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x')\,dx'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\,\delta k e^{ik(x-x')}\,dk \tag{1.13}$$

где интегралы берутся в смысле главного значения, причем, поскольку подынтегральная функция во внутреннем интеграле не стремится к нулю при $|k|\to\infty$, этот интеграл имеет смысл преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста [8].

Внутренний интеграл в (1.13) вычисляется с помощью выхода в комплексную плоскость и применения теории вычетов. Окончательно получаем

$$\Phi_1^{(1)} = -T(\eta^{(1)}) \equiv -\frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\mathrm{cth}\frac{\pi(x-x')}{2\delta}\,dx' \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в (1.8) и вводя обозначение $u=\eta^{(1)}$, получим нелокальный аналог уравнения Кадомцева – Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\chi}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(u)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.15}$$

Можно показать, что при $\delta\to 0$ (1.15) переходит в уравнение Кадомцева – Петвиашвили, а при $\delta\to\infty$ – в слабо неодномерное уравнение Беньямина – Оно.

2. Устойчивость солитонов относительно изгибных возмущений. Уравнение (1.15) при $\partial u/\partial y=0$ имеет решение в виде солитона [1]

$$u_0=\frac{\chi}{3\delta}\frac{a\sin a}{\cos a+\operatorname{ch}\vartheta},\qquad \vartheta=\frac{a}{\delta}(x-x_0)$$
$$x_0=Ct,\qquad C=-\frac{\chi}{6\delta}a\operatorname{ctg}a,\qquad 0<a<\pi \tag{2.1}$$

Исследуем устойчивость солитона относительно длинных изгибных возмущений, когда последний член в (1.12) мал по сравнению с остальными. Пусть $\partial x_0/\partial t$ и параметр a медленно меняются по t и y. Используем метод Боголюбова – Крылова [9]. Для этого перейдем в (1.12) к новым переменным ϑ, $T=\mu t$ и $Y=\mu y$ ($\mu\ll 1$), полагая $\partial x_0/\partial t=C(a)$. В результате имеем

$$-C\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial\vartheta}-\frac{\chi}{4\delta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(\vartheta')\operatorname{cth}\frac{\pi(\vartheta-\vartheta')}{2a}d\vartheta'=$$
$$=-\frac{\mu\delta}{a}\left\{\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\vartheta}{a}\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{a}\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{a}{\delta}\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right\} \tag{2.2}$$
$$a\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\mu\left\{\delta\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\delta\frac{\vartheta}{a}\frac{\partial a}{\partial y}-a\frac{\partial x_0}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right\}$$

Решение (2.2) ищем в виде

$$u=u_0(a,\vartheta)+\mu u_1(\vartheta,T,Y)+\mu^2u_2(\vartheta,T,Y)+\dots$$
$$\frac{\partial a}{\partial T}=A_1(a)+\mu A_2(a)+\dots \tag{2.3}$$

В первом приближении по μ получим

$$L(u_1)=-\frac{\delta}{a}\left(\frac{\partial u_0}{\partial a}+\frac{\vartheta}{a}\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta}\right)A_1$$
$$L(u)=-C\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_0u)-\frac{\chi}{4\delta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(\vartheta')\operatorname{cth}\frac{\pi(\vartheta-\vartheta')}{2a}d\vartheta' \tag{2.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_0L(u)\,d\vartheta=0 \tag{2.5}$$

Умножая уравнение (2.4) на u_0 и интегрируя по ϑ, получим $A_1=0$. Поскольку в начальный момент зависимость от y задается, можно считать, что переменная часть параметра a порядка μ.

Во втором приближении по μ находим

$$L(u_2)=-\frac{\delta}{a}\left(\frac{\partial u_0}{\partial a}+\frac{\vartheta}{a}\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta}\right)A_2+\frac{\delta}{2a}\left(u_0\frac{\partial^2x_0}{\partial y^2}-\frac{a}{\delta}\frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial\vartheta}\right) \tag{2.6}$$

Умножая (2.6) на u_0 и интегрируя по ϑ, имеем

$$\frac{dW}{\partial a}A_2-W\frac{\partial^2x_0}{\partial y^2}=0;\qquad W=\frac{\delta}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}u_0^2\,d\vartheta \tag{2.7}$$

Наконец, учитывая, что из определения $\partial x_0/\partial t$ и (2.3) следует $\partial^2x_0/\partial T^2=A_2dC/da$, получим для x_0 следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T^2} - W\frac{dC}{dW}\frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.8)$$

Используя (2.1), можно показать, что знак величины dC/dW совпадает со знаком χ. Поэтому солитоны устойчивы при $\chi > 0$ и неустойчивы при $\chi < 0$, что является обобщением результатов, полученных в [6, 7]. Поскольку для двухслойной жидкости конечной глубины $\chi > 0$, солитоны в такой среде устойчивы относительно длинных изгибных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Joseph R. I.* Solitary waves in a finite depth fluid.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1977, v. 10, № 12, p. L225–L227.
2. *Kubota T., Ko D. R. S., Dobbs L. D.* Weakly — nonlinear, long internal gravity waves in stratified fluids of finite depth.— J. Hydronautics, 1978, v. 12, № 4, p. 157–165.
3. *Korteweg D. J., Vries G., de.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a newtype of long stationary waves.— Phil. Mag. Ser. (5), 1895, v. 39, p. 422–443.
4. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids.— J. Phys. Soc. Jpn, 1975, v. 39, № 4, p. 1082–1091.
5. *Segur H., Hammack J. L.* Solition models of long internal waves.— J. Fluid Mech., 1982, v. 118, p. 285–304.
6. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.— Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753–756.
7. *Ablowitz M. J., Segur H.* Long internal waves in fluids of great depth.— Stud. Appl. Mathematics, 1980, v. 62, № 3, p. 249–262.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 509 с.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Москва — Поступила в редакцию 11.VIII.1983

УДК 533.6.011

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТРАНСЗВУКОВОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

ЧЕРНОВ И. А.

При годографическом рассмотрении задачи о плоском установившемся безвихревом течении газа полезно использовать процедуру трансзвукового разложения, которая сводит уравнение Чаплыгина к бесконечной системе уравнений с частными производными, первым среди которых является уравнение Трикоми. Теория уравнения Трикоми в применении к задачам аэродинамики развивалась в ряде работ [1–5]. Соответствующие результаты можно трактовать в рамках модели газа Трикоми [2], который хорошо аппроксимирует реальный газ при скоростях, близких к скорости звука.

Чтобы расширить диапазон применимости теории и оценить величину ошибки, возникающей при переходе к приближенному уравнению, необходимо найти высшие приближения в трансзвуковом разложении решения полного уравнения. Обычно это делается с учетом конкретной структуры основного решения. Так, в случае автомодельного решения уравнения Трикоми используют представление решения уравнения Чаплыгина в виде ряда по автомодельным составляющим [6, 7]. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, первое из которых однородное, остальные – неоднородные.

Ниже дано обобщение этой процедуры, которое состоит в непосредственном изучении системы уравнений с частными производными и представлении частных решений для произвольного приближения через основное решение начального приближения. Этот результат можно трактовать как построение некоторого оператора перехода от решения уравнения Трикоми к решению уравнения Чаплыгина.

1. Уравнения Чаплыгина, описывающие плоские установившиеся течения идеального газа, могут быть записаны в виде [2]

$$\varphi_\theta + G(\eta)\psi_\eta = 0, \quad \varphi_\eta - \eta G(\eta)\psi_\theta = 0 \qquad (1)$$

Здесь φ, ψ – потенциал скорости и функция тока, η – переменная Франкля, введенная в [1] и характеризующая величину отклонения скорости потока от звуковой, θ – угол наклона вектора скорости к выбранной оси. Функция $G(\eta)$ в окрестности $\eta = 0$ является аналитической и может быть разложена в ряд $G(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \eta^i$.