ного давления на свободной поверхности слоя

$$-\rho(\varphi_1)_{\substack{z=0\\t=0}} = (A+B)\cos k_1 x \qquad (t=0)$$

а потребуется, например, задать отдельно значения A и B для начального момента $t=0$. Это происходит по той причине, что пористость дна нарушает синхронность вертикальных смещений частиц жидкости в слое, располагающихся на одной вертикали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960. 249 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.VII.1983

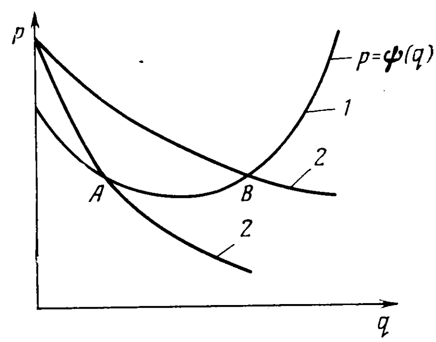
УДК 532.546

О ВЛИЯНИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СВОЙСТВ НЕФТЕЙ НА РЕЖИМ РАБОТЫ ФОНТАННЫХ СКВАЖИН

БАСОВИЧ И. Б.

Рассматривается задача об условиях устойчивой работы фонтанных скважин, продуцирующих неньютоновские нефти. Показано, что возрастающая ветвь характеристики лифта всегда соответствует устойчивым режимам работы скважины. Рабочая точка, лежащая на падающей ветви, устойчива в том случае, когда индикаторная диаграмма пласта имеет в этой точке менее крутой наклон, чем характеристика подъемника. Аналогичное исследование для случая ньютоновских нефтей проводилось в работе [1], где показано, в частности, что переходными процессами в скважине можно пренебречь по сравнению с характерными временами перераспределения давления в пласте. При этом рабочая точка $(p_з, q)$, где $p_з$ – забойное давление, q – расход жидкости, лежит на характеристике подъемника

$$p_з=\psi(q) \qquad (1)$$



Характерный вид этой зависимости приведен на фигуре (кривая *1*). Согласно [1], возрастающая ветвь функции $\psi(q)$ соответствует устойчивым режимам работы, а условие устойчивости на падающей ветви определяется характером пересечения индикаторной диаграммы пласта и характеристики лифта в рабочей точке.

Предположим теперь, что пластовая нефть ведет себя как неньютоновская жидкость и эффективная вязкость μ является монотонно убывающей функцией градиента давления

$$\mu=\mu(\lambda), \quad \lambda=\partial p/\partial r \qquad (2)$$

Уравнение упругой фильтрации является при этом нелинейным уравнением параболического типа

$$\beta\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{rk}{\mu(\lambda)}\frac{\partial p}{\partial r}\right] \qquad (3)$$

$$r=r_c; \qquad \mathrm{L}p=2\pi r\frac{kH}{\mu(\lambda)}\frac{\partial p}{\partial r}=q$$

$$r=R, \qquad p=p_R$$

Исследуем устойчивость работы подъемника на некотором стационарном режиме (p_0, q_0) относительно малых возмущений дебита и давления

$$p=p_0+\Delta p, \quad q=q_0+\Delta q, \quad \mu=\mu_0+\Delta\mu$$

Заметим, что величины p_0, Δp, μ_0, $\Delta\mu$ – функции радиуса r, $\mu_0(\partial p_0/\partial r)$ – распределение вязкости нефти в пласте, соответствующее стационарному режиму. Учитывая, что соотношение $\mathrm{L}p_0=q_0$ выполняется для любой точки пласта, а также равенства $\Delta p = \psi' \Delta q$, $r = r_c$ и $\Delta\mu = \mu_0'(\partial \Delta p / \partial r)$ (штрих соответствует дифференцированию по соответствующему аргументу), полученные при линеаризации уравнений (1), (2), запишем уравнение упругой фильтрации для малых возмущений в следующем виде:

$$\beta \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[F \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right] \tag{4}$$

$$r = r_c, \qquad 2\pi H F \frac{\partial \Delta p}{\partial r} - \frac{1}{\psi'} \Delta p = 0 \tag{5}$$

$$r = R, \quad \Delta p = 0$$

$$F \equiv F(r) = \frac{rk}{\mu_0} - \frac{q_0}{2\pi H} \frac{\mu_0'}{\mu_0} \tag{6}$$

Поскольку вязкость нефти монотонно убывает с ростом градиента давления, $\mu_0' < 0$ и функция $F(r)$ положительна в интервале (r_c, R). Устойчивость решения уравнения (4) при граничных условиях (5) определяется характером собственных чисел оператора Штурма – Лиувилля [2]

$$-\frac{d}{dr} \left[F(r) \frac{dp}{dr} \right] = \lambda_k r p; \qquad r = R, \ p = 0 \tag{7}$$

$$r = r_c; \ F(r_c) p' + \alpha^{-1} p = 0, \quad \alpha = -2\pi H \psi'$$

Если действительные части собственных чисел положительные, то режим работы скважины устойчивый, в противном случае малые возмущения могут привести к нарушению стационарности и резким изменениям режима работы. Так как функция F положительна, собственные числа оператора (7) действительны и задача устойчивости свелась к определению их знака. Если $\alpha < 0$, то оператор (7) положительно определенный с положительными собственными числами и, следовательно, область на характеристике подъемника

$$\psi'(q) > 0 \tag{8}$$

устойчива. Покажем, что существует область на падающей ветви $\psi(q)$, которая также устойчива при выполнении определенных условий. С этой целью рассмотрим симметризованное ядро Грина оператора (7), которое в данном случае можно представить в виде суммы двух функций

$$G(r, r_1) = G_0(r, r_1) + G_1(r, r_1) \tag{9}$$

$$G_0(r, r_1) = \sqrt{r r_1}(\alpha - C) V(r) V(r_1)$$

$$G_1(r, r_1) = \sqrt{r r_1}(\alpha - C)^2 \begin{cases} V(r_1), & r \leqslant r_1 \\ V(r), & r > r_1 \end{cases} \tag{10}$$

$$V(r) = C - \int_{r_c}^{r} \frac{dr}{F(r)}, \qquad C = \int_{r_c}^{R} \frac{dr}{F(r)}$$

Покажем, что при $\alpha > C$ ядро $G(r, r_1)$ положительно определенное с положительными собственными числами.

Действительно, для произвольной функции $f(r)$ имеем

$$I_0 = \int_{r_c}^{R} \int_{r_c}^{R} G_0 f(r) f(r_1)\, dr\, dr_1 = (\alpha - C) \left[\int_{r_c}^{R} V(r) f(r)\, dr \right]^2 \geqslant 0$$

$$I_1 = \int_{r_c}^{R} \int_{r_c}^{R} G_1 f(r) f(r_1)\, dr\, dr_1 = 2(\alpha - C)^2 \int_{r_c}^{R} \sqrt{r_1} f(r_1) V(r_1) \left[\int_{r_c}^{r_1} \sqrt{r} f(r)\, dr \right] dr_1 =$$

$$= 2(\alpha - C)^2 \int_{r_c}^{R} g(r_1) g'(r_1) V(r_1)\, dr_1 = (\alpha - C)^2 (g^2(R) V(R) - g^2(r_c) V(r_c)) -$$

$$-(\alpha - C)^2 \int_{r_c}^{R} g^2(r_1) V'(r_1)\, dr_1; \qquad g(r_1) = \int_{r_c}^{r_1} \sqrt{r} f(r)\, dr$$

Интеграл I_1 положителен для всех функций $f(r)$, так как справедливы соотношения: $V(R)=0$, $g(r_c)=0$, $V'(r)<0$. Таким образом, интегральный оператор с ядром $G(r, r_1)$ положительно определенный и собственные числа $\lambda_k>0$. Следовательно, рабочая точка (p_0, q_0), при которой $\alpha>C$, что соответствует области на характеристике лифта

$$\psi'<-C(2\pi H)^{-1} \tag{11}$$

устойчива.

При условии $0<\alpha<C$ диагональные значения ядра Грина могут принимать и отрицательные значения, а это означает наличие отрицательных собственных чисел [2] и неустойчивость соответствующего режима работы подъемника.

Выясним теперь физический смысл величины C, определенной в формуле (10). Продифференцировав по q_0 обе части выражения

$$\frac{dp_0}{dr}=\frac{\mu_0(\lambda_0)}{2\pi rkH}q_0$$

получим

$$\frac{d}{dq_0}\left(\frac{dp_0}{dr}\right)=\frac{\mu_0}{2\pi rkH-q_0\mu_0'}$$

Проинтегрируем последнее равенство по r

$$\frac{d}{dq_0}(p_R-p_3)=\int\limits_{r_c}^{R}\frac{\mu_0(\lambda_0)}{2\pi rkH-q_0\mu_0'}dr$$

Из полученного выражения и соотношения для функции $F(r)$ следует, что величина $-C/(2\pi H)$ представляет собой тангенс угла наклона индикаторной диаграммы пласта, построенной в координатах (p_3, q).

В связи с этим можно сделать вывод, что устойчивость работы фонтанной скважины, продуцирующей неньютоновскую нефть, так же как и в случае ньютоновской нефти [1], зависит от характера пересечения диаграммы пласта и подъемника. Для убывающей ветви характеристики лифта рабочая точка устойчива в том случае, когда индикаторная диаграмма пласта (фигура, кривая 2) имеет в этой точке менее крутой наклон, чем характеристика подъемника. Возрастающая ветвь функции $\psi(q)$ всегда соответствует устойчивым режимам работы. В представленном на фигуре случае точка A соответствует неустойчивому, а точка B – устойчивому режиму работы скважины. При достаточно резко изменяющемся наклоне индикаторной диаграммы возможны случаи с тремя и более стационарными режимами. При этом устойчивые и неустойчивые рабочие точки, которые лежат на падающей ветви характеристики лифта, будут чередоваться в зависимости от взаимного расположения диаграмм в окрестности пересечения.

В заключение следует отметить, что предложенный в работе метод анализа и полученные выводы остаются справедливыми и для случая неоднородного пласта, когда проницаемость пласта зависит от радиуса r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М.* О нестационарных процессах при фонтанировании скважин.– Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1964, № 2. с. 31–40.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 511 с.

Москва

Поступила в редакцию 29.VI.1983

УДК 532.592–2

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СЛАБО НЕОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ

РУДЕРМАН М. С.

Уравнение для нелинейных волн в жидкости конечной глубины [1, 2] является нелокальным аналогом уравнения Кортевега – деВриза [3], которое может быть получено из него предельным переходом к малой глубине жидкости. В другом предельном случае, когда глубина жидкости стремится к бесконечности, это уравнение переходит в уравнение Беньямина – Оно [4]. Отметим, что в [1, 2] уравнение жидкости конечной глубины было получено из качественных соображений, без строгого вывода. В [5] дан строгий вывод этого уравнения для частного случая двухслойной жидкости.

Уравнение Кадомцева – Петвиашвили [6] является обобщением уравнения Кор-