

УДК 532.517.2.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В СЛЕДЕ
ЗА ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТЕЛОМ

КАШКО А. В.

Рассматривается задача о влиянии малого нарушения осевой симметрии течения в следе за телом на его устойчивость. Такие изменения возникают, например, в следе за круговым конусом, находящимся под углом атаки к набегающему потоку. Задача решается методом малого параметра в рамках модели невязкой несжимаемой жидкости. Показано существенное влияние нарушения осевой симметрии на устойчивость течения.

Большинство известных работ по исследованию устойчивости течений в следах за телами относится к плоским течениям. В одной из первых работ по устойчивости осесимметричных течений [1] с помощью обобщенного метода Рэлея исследуется устойчивость течения по отношению к зональным колебаниям. В работе [2] по аналогии с известными критериями для плоского случая выводятся некоторые оценки и критерии, необходимые для существования нейтральных и растущих колебаний. В [3] получены отдельные расчеты устойчивости течения в осесимметричном следе в сжимаемой жидкости без учета вязкости. В [4] найдены волновые числа, скорости распространения и коэффициенты усиления, характерные для возникающих в следе колебаний.

В настоящей работе рассматривается течение в следе за телом с профилем средней скорости U , зависящим от двух координат r и φ (безразмерные координаты в цилиндрической системе координат):

$$U = U(r, \varphi) = U_0 + \varepsilon U_1(r) U_2(\varphi), \quad U_0 = 1 + \Delta U e^{-r^2}$$

Здесь U_0 — профиль скорости Гаусса; ΔU — дефект средней скорости ($\Delta U = -0,2$); ε — малый параметр. Функции $U_1(r) = e^{-(r-2)^2} - e^{-4}$ и $U_2(\varphi) = \sin \varphi$ задавались приближенно в соответствии с экспериментальными измерениями профиля скорости за затупленным конусом, находящимся под малыми углами атаки (до 15°), при скорости набегающего потока 30 м/с, проведенными в Институте механики МГУ в аэродинамической трубе А-6. Измерения проводились системой трубок Пито, соединенных с батарейным манометром. В этом же эксперименте с помощью термоанометра были получены частотные характеристики колебаний потока в следе; установлено, например, что с увеличением угла атаки от 0 до 9° число Струхала, вычисленное по частоте, имеющей максимальную амплитуду, и по диаметру донной части конуса, возрастает от 0,2 до 0,3.

Скорость течения в следе за телом $V = \{u, v, w\}$ и давление p представляются как сумма средних величин U, P и малых отклонений от них $V^* = \{u^*, v^*, w^*\}$ и p^* :

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad w = U + w^*, \quad p = P + p^* \quad (1)$$

Коэффициенты линеаризованной системы уравнений, получаемой после подстановки выражений (1) в систему уравнений, описывающих течение невязкой несжимаемой жидкости в безразмерных величинах, и проведения линеаризации, зависят только от r и φ , следовательно, возможно разделение переменных

$$V^* = V^\circ(r, \varphi) e^{i(\alpha z + \beta t)}, \quad p^* = p^\circ(r, \varphi) e^{i(\alpha z + \beta t)} \quad (2)$$

где величина α — действительная, β — комплексная. В этом случае исследование устойчивости течения в следе сводится к решению задачи на собственные значения для системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} i\alpha(U-c)u^\circ &= -\frac{\partial p^\circ}{\partial r}, & i\alpha(U-c)v^\circ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p^\circ}{\partial \varphi} \\ i\alpha(U-c)w^\circ + \frac{\partial U}{\partial r} u^\circ + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} v^\circ &= -i\alpha p^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^\circ}{\partial \varphi} + i\alpha w^\circ + \frac{u^\circ}{r} = 0, \quad c \equiv -\frac{\beta}{\alpha}$$

При $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ решение системы уравнений (3) должно быть ограниченным. Так как профиль скорости зависит от малого параметра, решение ищется в виде ряда по ε

$$V^\circ = V_0^\circ + \varepsilon V_1^\circ + \varepsilon^2 V_2^\circ + \dots, \quad p^\circ = p_0^\circ + \varepsilon p_1^\circ + \varepsilon^2 p_2^\circ + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$$

Система уравнений нулевого приближения соответствует задаче исследования устойчивости течения за осесимметричным телом. Для профиля скорости Гаусса решение системы имеет вид [2, 3]

$$V_0^\circ = V_0(r) e^{i\varphi}, \quad p_0^\circ = p_0(r) e^{i\varphi}, \quad c = c_0$$

и задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для давления [4]

$$p_0'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{2U_3'}{U_3} \right) p_0' - \left(\frac{1}{r^2} + \alpha^2 \right) p_0 = 0, \quad U_3 \equiv i\alpha(U_0 - c_0) \quad (4)$$

Граничные условия получаются из асимптотических разложений при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$

$$p_0 \rightarrow r \quad (r \rightarrow 0), \quad p_0 \rightarrow r^{-1/2} e^{-\alpha r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (5)$$

В результате решения задачи (4), (5) находятся собственное значение c_0 и собственная функция p_0 , соответствующие осесимметричному течению в следе. Решение проводится методом Рунге – Кутты.

Подстановка выражений для нулевого приближения в систему уравнений первого приближения показывает, что члены уравнений либо совсем не зависят от φ , либо зависят как $e^{i\varphi}$ и $e^{i2\varphi}$. В соответствии с этим предполагается, что

$$V_1^\circ = V_{1,0}^\circ + V_{1,1}^\circ e^{i2\varphi} + V_{1,2}^\circ e^{i\varphi}, \quad p_1^\circ = p_{1,0}^\circ + p_{1,1}^\circ e^{i2\varphi} + p_{1,2}^\circ e^{i\varphi}$$

Тогда система уравнений первого приближения разбивается на три системы: для $(V_{1,0}^\circ; p_{1,0}^\circ)$, $(V_{1,1}^\circ; p_{1,1}^\circ)$ и $(V_{1,2}^\circ; p_{1,2}^\circ)$. Из условия разрешимости системы для

$V_{1,2}^\circ$ и $p_{1,2}^\circ$ величина $c_1 = 0$.

Системы уравнений для $(V_{1,0}^\circ; p_{1,0}^\circ)$ и $(V_{1,1}^\circ; p_{1,1}^\circ)$ сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с соответствующими граничными условиями, полученными из асимптотических разложений при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$

$$p_{1,0}^{\circ\prime\prime} + \left(\frac{1}{r} - \frac{2U_3'}{U_3} \right) p_{1,0}^{\circ\prime} - \left(\alpha^2 + \frac{4}{r^2} \right) p_{1,0}^\circ = \\ = \alpha U_1 \left(\frac{U_3'}{U_3} u_0^\circ - \frac{i}{r} v_0^\circ \right) + 2\alpha(r-2)e^{-(r-2)^2} u_0^\circ \quad (6)$$

$$p_{1,0}^\circ \rightarrow Ar^2 - \frac{7ie^{-4}}{1+\Delta U - c_0} r^3 \quad (r \rightarrow 0), \quad p_{1,0}^\circ \rightarrow r^{-1/2} e^{-\alpha r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (7)$$

$$p_{1,1}^{\circ\prime\prime} + \left(\frac{1}{r} - 2\frac{U_3'}{U_3} \right) p_{1,1}^{\circ\prime} - \alpha p_{1,1}^\circ = \alpha U_1 \left(\frac{U_3'}{U_3} u_0^\circ + \frac{1}{r} v_0^\circ \right) - 2\alpha(r-2)e^{-(r-2)^2} u_0^\circ \quad (8)$$

$$p_{1,1}^\circ \rightarrow B \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} r^2 \right) - \frac{8ie^{-4}}{\alpha^2(1+\Delta U - c_0)} \quad (r \rightarrow 0), \quad p_{1,1}^\circ \rightarrow r^{-1/2} e^{-\alpha r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (9)$$

Постоянные A и B определяются из граничного условия на бесконечности.

После преобразования системы уравнений второго приближения получается обыкновенное дифференциальное уравнение для определения β_2

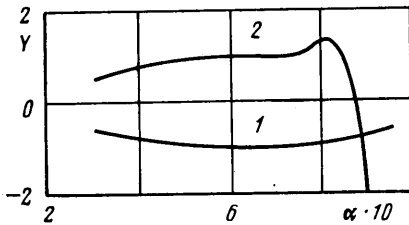
$$p_{2,1}^{\circ\prime\prime} + \left(\frac{1}{r} - 2\frac{U_3'}{U_3} \right) p_{2,1}^{\circ\prime} - \left(\frac{1}{r^2} + \alpha^2 \right) p_{2,1}^\circ = \\ = 2i\beta_2 \frac{U_3'}{U_3} u_0^\circ + \alpha \left(\frac{U_1 U_3'}{U_3} - \frac{U_1'}{2} \right) (u_{1,0}^\circ - u_{1,1}^\circ) \quad (10)$$

с граничными условиями

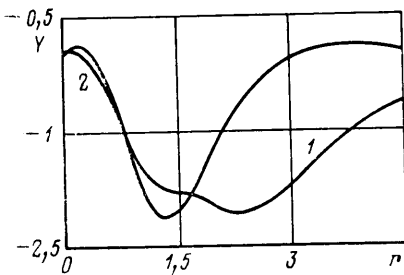
$$p_{2,1}^{\circ} \rightarrow r \quad (r \rightarrow 0), \quad p_{2,1}^{\circ} \rightarrow r^{-1/2} e^{-\alpha r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (11)$$

В рассмотренных выше задачах при численной реализации граничные условия на бесконечности заменяются условиями при конечном значении координаты r . Например, для задачи (10) – (11) $p_{2,1}^{\circ} + \alpha p_{2,1}^{\circ} = 0$ при $r=r_0$ и $r_0 \gg 1$.

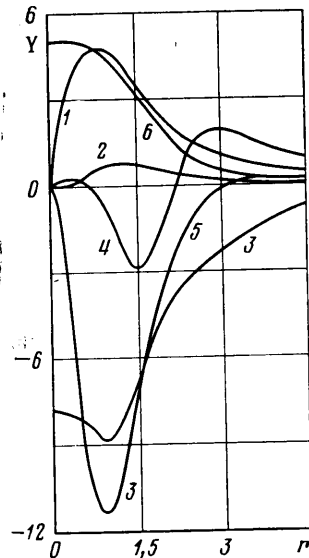
Из уравнения (10) видно, что для определения β_2 необходимо получить решения уравнений (4), (6), (8) с соответствующими граничными условиями. При решении уравнений (6), (8), (10) использовались метод Рунге – Кутты и алгебраический метод отыскания собственных значений [5].



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Результаты решения задач (4) – (11) приведены на фиг. 1–3. Кривые 1, 2 на фиг. 1 выражают зависимость $Y = \text{Im } \beta_0 \cdot 10^2$ и $Y = \text{Im } \beta_2$ от волнового числа α . Отметим, что волновое число, соответствующее максимальному значению $|\text{Im } \beta_0|$, для осесимметричного течения в следе равно 0,65. Оно значительно меньше, чем для плоского случая [3], что хорошо согласуется с экспериментальными данными [6, 7]; максимальное значение $|\text{Im } \beta_0|$ в осесимметричном случае меньше, чем в плоском, а величина $|\text{Re } \beta_0/\alpha|$ слабо убывает с увеличением α , т. е. групповая скорость несколько отличается от фазовой скорости распространения волн.

Зависимость $\text{Re } \beta$ от α при учете нарушения осевой симметрии течения в следе практически остается такой же, как и в осесимметричном течении: $-\text{Re } \beta = 0,92\alpha - 0,03\alpha^2$.

При волновых числах $\alpha < 0,88$ величина $\text{Im } \beta_2$ имеет знак, противоположный знаку $\text{Im } \beta_0$, т. е. коэффициент усиления ослабляется при указанных волновых числах, а при $\alpha > 0,88$ он резко возрастает, что качественно соответствует экспериментальным данным.

Таким образом, указанное нарушение осевой симметрии приводит к смещению максимального значения $|\text{Im } \beta|$ на большие волновые числа.

На фиг. 2 кривые 1–6 соответствуют $Y = \text{Re } p_0; \text{Im } p_0; \text{Re } p_{1,1}^{\circ}; \text{Im } p_{1,1}^{\circ}; \text{Re } p_{1,0}^{\circ}; \text{Im } p_{1,0}^{\circ}$.

на фиг. 3 кривые 1, 2 соответствуют $Y = \text{Re } p_{2,1}^{\circ}; \text{Im } p_{2,1}^{\circ}$. Максимальная амплитуда возмущения давления в осесимметричном течении находится вблизи точки $r=0,8$ и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ (см. фиг. 2). Если построить собственные функции с учетом первого приближения, то значение амплитуды давления может иметь два локальных максимума. Учет второго приближения (см. фиг. 3) приводит к заметному перераспределению амплитуды давления по r , так как соот-

ветствующая поправка на порядок меньше по ϵ , чем поправка от первого приближения.

Автор благодарит Г. И. Петрова и С. Я. Герценштейна за научное руководство и помощь в выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев.— Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 304. 24 с.
2. Michalke A., Schade H. Zur Stabilität von freien Grenzschichten.— Ingenieur – Archiv. 1963. В. 33, № 1, S. 1–23.
3. Lees L., Gold H. Stability of laminar boundary layers and wakes at hypersonic speeds.— Proc. Internat. Sympos. on Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow. Ithaca, N. Y. Cornell Univ. Press, 1966, p. 310–339.
4. Герценштейн С. Я., Кашко А. В. Устойчивость осесимметричного сжимаемого невязкого следа.— Науч. тр. ин-та мех. МГУ, 1972, № 19, с. 143–150.
5. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6, с. 1277–1280.
6. Кашко А. В. Колебания потока в следах за дисками и шаром.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3, с. 176–178.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1983

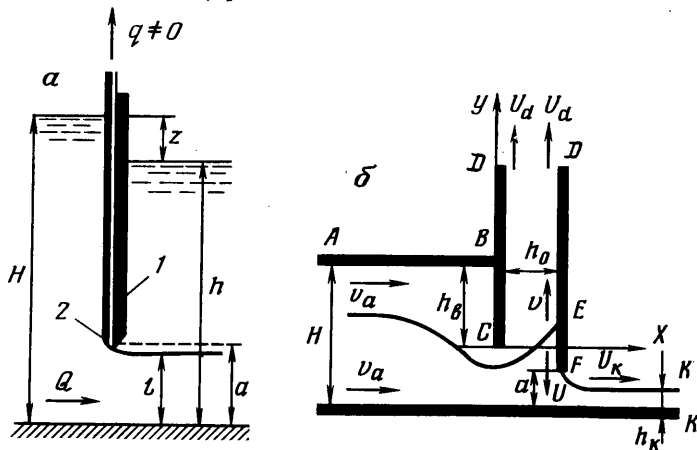
УДК 532.522

ВЛИЯНИЕ ОТСОСА НА ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ

ПАРХИСЕНКО В. М., ПРОХОДЬКО В. П., ШАБРИН А. Н.

Как известно [1], пропускная способность отверстия существенно зависит от величины коэффициента сжатия ϵ струи за отверстием. Установлено [2], что в зависимости от места расположения отверстия по отношению к дну и боковым стенкам сосуда или перегородивающего сооружения ϵ может изменяться от 0,64 до 0,85.

С целью увеличения расхода при истечении жидкости из отверстия в ряде случаев [2] используют плавное закругление на входе. При этом коэффициент ϵ может достигать значений, близких к 1. Применение насадков, выполняемых по форме струи, вытекающей из отверстия, также приводит к увеличению пропускной способности. При истечении жидкости из-под затвора увеличения пропускной способности отверстия достигают с помощью изменения наклона щита затвора, а для донных отверстий — с помощью щитов с криволинейным очертанием обтекаемых кромок [3]. В работе экспериментально и теоретически исследован принципиально другой способ увеличения пропускной способности отверстий, связанный с отсосом жидкости, осуществляемым непосредственно на обтекаемой кромке затвора или пропускного отверстия с напорной стороны [4].



Фиг. 1