

УДК 533.6.013.11

**МЕТОД РАСЧЕТА ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ  
ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА**

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., КОРЖНЕВ В. Н., ШИПИЛОВ С. Д.

Рассмотрена стационарная нелинейная задача о дозвуковом обтекании крыла произвольной формы в плане потоком сжимаемого газа. Строится численный метод решения задачи, представляющий собой дальнейшее развитие метода дискретных вихрей. Поверхность тела и вихревой след за ним моделируются системами дискретных вихревых отрезков, но в отличие от несжимаемой среды здесь вне крыла приходится распределять источники. Определение циркуляций присоединенных вихрей, интенсивности источников и формы следа осуществляется итерациями.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим стационарное обтекание крыла или тела потоком газа, имеющим на бесконечности скорость  $V_0$ . В зависимости от геометрических характеристик обтекание может быть безотрывным или отрывным. Считая известными линии отрыва (обычно — острые передние и боковые кромки крыльев), в рамках идеальной среды отрывы моделируют поверхностями тангенциальных разрывов скорости, которые эквивалентны вихревым слоям.

Пусть  $S$  и  $\Sigma$  — поверхности тела и тангенциального разрыва скорости. Предположим, что вне тела и поверхности разрыва течение газа является безвихревым и изоэнтропическим. В этом случае существует потенциал возмущенных скоростей  $\Phi$ , удовлетворяющий следующему нелинейному дифференциальному уравнению и условиям непротекания на поверхности тела [1]:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{a_\infty^2} F(\Phi)$$

$$F(\Phi) = \frac{a_\infty^2}{\gamma^2} (\text{grad } \Phi + V_0) \text{grad} \left( \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 + V_0 \text{grad } \Phi \right) \quad (1.1)$$

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left( \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 + V_0 \text{grad } \Phi \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -V_0 n, \quad (x, y, z) \in S \quad (1.2)$$

Здесь  $a_\infty$  — скорость звука в невозмущенном потоке,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $n$  — орт внешней нормали.

При переходе через поверхность вихревого следа  $\Sigma$  должно соблюдаться условие непрерывности давления и нормальной составляющей скорости, а на бесконечном удалении от тела и его следа — условие затухания возмущений [2–4]

$$p_+ = p_-, \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_+ = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_-, \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad (1.3)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{grad } \Phi = 0, \quad R = \min_{x_T \in S + \Sigma} \sqrt{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 + (z - z_T)^2}$$

Здесь индексы плюс и минус относятся к разным сторонам поверхности  $\Sigma$ .

На линиях схода вихревой поверхности  $\Sigma$  должна выполняться гипотеза Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей.

Поставленная выше задача нелинейна по двум причинам. Во-первых, нелинейно уравнение (1.1) для потенциала возмущенных скоростей, во-вторых, форма поверхности тангенциального разрыва  $\Sigma$  должна быть определена в процессе решения задачи.

Таким образом, в рамках модели идеальной среды задача решается для крыла произвольной формы в плане в полной постановке. Рассматривая крылья достаточно малых удлинений при ограниченных значениях углов атаки, можно применять приближенные подходы. Так, методом сращиваемых асимптотических разложений получено два таких решения [5, 6].

**2. Основные соотношения.** Обтекание тела будет рассчитываться методом дискретных вихрей, обобщенным на случай сжимаемой среды [3]. Для построения итерационного процесса запишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta \Phi^{(m)} = \frac{1}{a_\infty^2} F^{(m)}, \quad F^{(m)} = F(\Phi^{(m-1)}), \quad F^{(0)} = 0 \quad (2.1)$$

Так как на каждой итерации  $m$  потенциал возмущенных скоростей  $\Phi^{(m-1)}$  считается известной функцией, то уравнение (2.1) линейно относительно  $\Phi^{(m)}$  и его решение может быть представлено в виде суммы  $\Phi_p^{(m)}$  и  $\Phi_L^{(m)}$ , где  $\Phi_p^{(m)}$  удовлетворяет уравнению (2.1), но, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям (1.2), (1.3), а  $\Phi_L^{(m)}$  удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на теле и на следе

$$\frac{\Delta \Phi_L^{(m)}}{\partial n} = -V_0 \mathbf{n} - \text{grad } \Phi_p^{(m)} \cdot \mathbf{n}, \quad (x, y, z) \in S \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

$$p_+ = p_-, \quad \left( \frac{\partial \Phi_L^{(m)}}{\partial n} \right)_+ = \left( \frac{\partial \Phi_L^{(m)}}{\partial n} \right)_- + \left( \frac{\partial \Phi_p^{(m)}}{\partial n} \right)_- - \left( \frac{\partial \Phi_p^{(m)}}{\partial n} \right)_+, \quad (x, y, z) \in \Sigma.$$

Потенциал  $\Phi_p^{(m)}$  находится как свертка правой части уравнения (2.1) с функцией Грина для уравнения Лапласа [2]. Дифференцируя  $\Phi_p^{(m)}$  по  $\mathbf{r}$ , получим выражение для поля возмущенных скоростей

$$\mathbf{V}_p^{(m)} = \frac{1}{4\pi a_\infty^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\sigma}|^3} F^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz, \quad \boldsymbol{\sigma} = i\xi + j\eta + k\zeta$$

Здесь  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные орты.

Область интегрирования в (2.4) можно разбить на две: область  $D = D_0 + D_1$ , имеющую форму полубесконечного «коридора», внутри которого находится тело и след, и такую, что  $b/R_D \ll 1$  ( $b$  — характерный линейный размер тела,  $R_D$  — минимальное расстояние от тела или следа до границы области  $D$ ), и область  $D_2$ , включающую в себя всю оставшуюся часть пространства (фиг. 1).

В области  $D_2$  уравнение (1.1) можно линеаризовать по потенциалу возмущенных скоростей

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_\infty^2} \text{div}(\mathbf{V}_0(\mathbf{V}_0 \text{ grad } \Phi)) = 0 \quad (2.5)$$

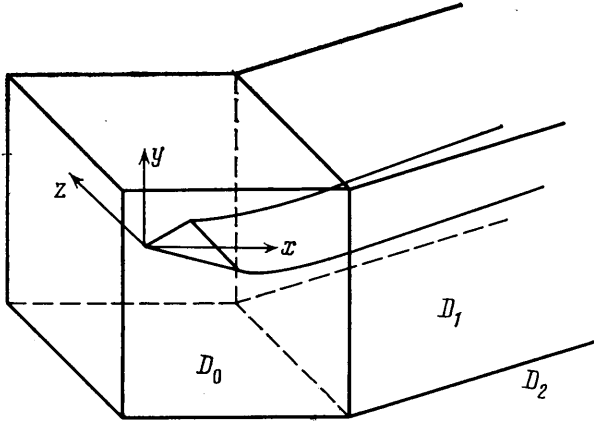
Уравнение (2.5) может быть сведено к уравнению Лапласа с помощью соответствующего выбора координат и преобразования Прандтля — Глауэрта. Решая (2.5) совместно с граничными условиями (1.2), (1.3), можно

рассчитать поле скоростей вдали от тела, причем решение в области  $D_2$  будет зависеть через граничные условия от решения в области  $D$ . Используя это решение и учитывая, что в соответствии с (2.5)

$$F_{D_2}^{(m)} = \text{div}[\mathbf{V}_0(\mathbf{V}_0 \text{ grad } \Phi_{D_2}^{(m)})] \quad (2.6)$$

можно найти поле возмущенных скоростей  $\mathbf{V}_{pD_2}$ , индуцируемое течением в области  $D_2$ . Для тонкого крыла произвольной формы в плане получено аналитическое выражение для  $F_{D_2}$

$$F_{D_2}^{(m)} = -V_0 \frac{C_y^{(m)} S_0}{(1-M_\infty^2) 8\pi b_0^2} \frac{3x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (2.7)$$



Фиг. 1

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  — координаты в поточной системе координат,  $x_0^* = x_0/\sqrt{1-M_\infty^2}$ ,  $V_0$  — модуль скорости набегающего потока,  $C_y^{(m)}$  — коэффициент подъемной силы несущей поверхности,  $S_0$  — ее площадь.

Потенциал  $\Phi_L^{(m)}$  находится методом дискретных вихрей [3], причем граничные условия для  $\Phi_L^{(m)}$ , как видно из (2.2), (2.3), зависят от  $\Phi_p^{(m)}$ .

Безразмерный коэффициент давления в любой точке течения  $\mu$  рассчитывается по формуле [2]

$$p_\mu^* = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[ \frac{1 + 1/2(\gamma-1)M_\infty^2}{1 + 1/2(\gamma-1)M_\mu^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.8)$$

$$M_\infty = V_0/a_\infty, \quad M_\mu = V_\mu/a_\mu, \quad p_\mu^* = 2p_\mu/\rho_\infty V_0^2.$$

Здесь  $V_\mu$  и  $a_\mu$  — скорости потока и звука в точке  $\mu$ .

Для тонкой несущей поверхности, моделируемой вихревым слоем, в любой ее точке  $v \in S$  можно вычислить безразмерный коэффициент перепада давления

$$\Delta p_{v^*} = p_{v-}^* - p_{v+}^* \quad (2.9)$$

где  $p_{v-}^*$  и  $p_{v+}^*$  — безразмерные коэффициенты давления снизу и сверху в точке  $v$ , причем числа Маха  $M_{v-}$  и  $M_{v+}$  рассчитываются по соответствующим скоростям  $V_{v-}$  и  $V_{v+}$ .

3. Численный метод. Будем считать, что след за телом на достаточно большом расстоянии от него является цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной вектору скорости набегающего потока  $\mathbf{V}_0$ . Тогда вдали от тела течение можно считать двумерным, а функция  $F$  в (2.1) и (2.4) — не зависящей от координаты  $x_0$ , отсчитываемой вдоль вектора  $\mathbf{V}_0$ . В этом случае область можно разбить на

две: конечную область  $D_0$ , в которой течение существенно трехмерно, и полубесконечную область  $D_1$ , в которой течение можно считать двумерным (фиг. 1).

Таким образом, область интегрирования в (2.4) разбивается на три области, в которых функция  $F$  может быть вычислена различными способами.

Интегрирование в (2.4) по области  $D_0$  производится численно. Для этого область разбивается на  $L$  подобластей  $d_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ), размер каждой из которых при  $L \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Внутри каждой области  $d_l$  функция  $F$  считается постоянной и равной значению  $F_l$  в некоторой расчетной точке внутри  $d_l$

$$F_l = F(\xi_l, \eta_l, \zeta_l), \quad (\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \in d_l, \quad l=1, 2, \dots, L$$

В результате интегрирование по области  $D_0$  в (2.4) сводится к вычислению интегралов от ядра и суммированию

$$V_{p0}^{(m)} = \sum_{l=1}^L F_l I_l, \quad I_l = \frac{1}{4\pi a_\infty^2} \iiint_{d_l} \frac{r-\sigma}{|r-\sigma|^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.1)$$

причем интегралы  $I_l$  могут быть определены аналитически или численно. Область  $D_0$  и ее разбиения  $d_l$  удобно взять в форме прямоугольных параллелепипедов, а расчетные точки разместить в центрах  $d_l$ .

В качестве области  $D_1$  удобно взять полубесконечный параллелепипед, передняя грань которого совпадает с задней (по потоку) гранью  $D_0$ , а полубесконечные ребра параллельны вектору  $V_0$  (фиг. 1), и разбить его на такие же полубесконечные параллелепипеды  $\delta_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ), внутри которых функция  $F$  считается постоянной.

В рассматриваемом ниже примере расчета области  $d_l$  имеют форму кубов одинакового размера, а области  $\delta_j$  примыкают на задней грани  $D_0$  к областям  $d_l$ .

Интегрирование в (2.4) по области  $D_2$  можно произвести по методике, описанной в п. 2, используя при этом формулу (2.7) и конкретную конфигурацию области  $D$ .

Для расчета потенциала  $\Phi_L^{(m)}$  и соответствующего ему поля скоростей  $V_L^{(m)}$  обтекаемое тело заменяется системой присоединенных вихревых отрезков (метод дискретных вихрей). Граничные условия на теле удовлетворяются в контрольных точках. След за телом моделируется свободными вихревыми отрезками, направленными в каждой точке следа  $(x, y, z) \in \Sigma$  по вектору скорости в этой точке:

$$V^{(m)}(x, y, z) = V_0 + V_p^{(m)}(x, y, z) + V_L^{(m)}(x, y, z)$$

вследствие чего граничные условия (2.3) на следе удовлетворяются автоматически.

Введем сплошную нумерацию поперечных присоединенных вихревых отрезков и соответствующих им контрольных точек. Тогда уравнение для циркуляций записывается в виде

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^* a_i^j = \sin \alpha - V_{pnj}^{*(m)}, \quad j=1, 2, \dots, N$$

$$\Gamma_i^* = \Gamma_i / V_0 b, \quad V_{pnj}^{*(m)} = V_{pnj}^{(m)} / V_0 \quad (3.2)$$

Здесь  $\Gamma_i$  — циркуляция  $i$ -го поперечного присоединенного вихревого отрезка,  $a_i^j$  — коэффициент влияния  $i$ -го вихревого отрезка на  $j$ -ую контрольную точку,  $\alpha$  — угол атаки крыла,  $V_{pnj}$  — нормальная к поверхности крыла скорость, рассчитанная по формуле (2.4), в  $j$ -й контрольной точке,  $N$  — число контрольных точек.

По найденным из решения системы уравнений (3.2) значениям циркуляций  $\Gamma_i^*$  рассчитывается поле скоростей  $V_L^{(m)}$  [3].

Далее, используя соотношение (1.1), вычисляем  $F^{(m+1)}$  на сетке, состоящей из расчетных точек

$$(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \in d_l \subset D_0, \quad l=1, 2, \dots, L$$

После определения значений  $F_l^{(m+1)}$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) можно перейти к следующей  $(m+1)$ -й итерации. Этот процесс заканчивается, когда переход к последующей итерации дает достаточно малое изменение в результатах.

Расчет аэродинамических нагрузок на теле производится по методике, описанной в п.2, с использованием соотношений (2.8), (2.9), причем точки  $\nu$  в (2.9) располагаются на серединах поперечных присоединенных вихревых отрезков. Скорости  $V_{\nu-}$  и  $V_{\nu+}$  рассчитываются по методике, описанной в [3].

4. Тестовые задачи. Отработка и проверка методики расчета и численного метода прежде всего проводилась на примере расчета обтекания тонкого крыла при малом угле атаки.

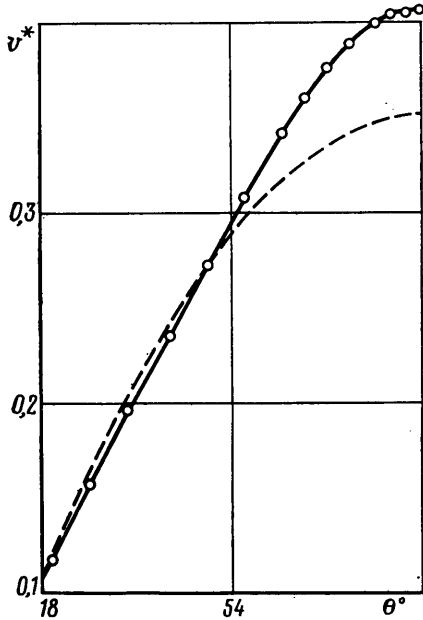
Аэродинамические характеристики крыла, рассчитанные описанным выше численным методом при различных параметрах расчетной схемы, были сопоставлены с известными точными и численными решениями (линейная теория, [4]). Сопо-

ставление показало, что при увеличении количества разбиений по пространству и размеров области  $D$  численное решение сходится к известному, а необходимая точность расчета достигается при достаточно малом количестве разбиений и сравнительно небольших размерах расчетной области. Так, например, для пластинки, при размерах  $D_0$   $3b \times 4b$  ( $b$  — хорда пластинки) и количестве разбиений по пространству  $L=15 \times 20$  погрешность расчета составляла менее 4% по суммарным аэродинамическим характеристикам ( $0 < M_\infty < 0,9$ ).

Тем же численным методом было изучено обтекание кругового цилиндра бесконечного размаха. Область  $D_0$  имела форму круга, концентричного с обтекаемым цилиндром, области  $d_l < D_0$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) ограничивались лучами и концентрическими окружностями с радиусами, нарастающими по показательному закону.

На фиг. 2 точками нанесены результаты расчета при  $M_\infty=0,399$ . Там же приведено численное решение, полученное в [7] (сплошная линия), и распределение скорости по поверхности цилиндра без учета сжимаемости (штриховая линия). По оси абсцисс отложен угол  $\theta$  от критической точки, по оси ординат — безразмерная скорость потока на поверхности цилиндра  $v^*=v/v_{\max}$ , где  $v_{\max}$  — максимально возможное значение скорости в газе. Было также найдено критическое число Маха набегающего потока  $M_\infty^*=0,401$  (в [7] было получено значение  $M_\infty^*=0,399$ ).

В этом расчете число разбиений по углу  $\theta$  на полуокружности было равно 25, а по радиусу  $r$  — 15. Радиус области  $D_0$  составлял при этом  $5,9 r_0$ , число итераций равнялось 7. Заметим, что в данной задаче итерационный процесс обеспечивал выполнение двух условий: уравнения (2.1) для потенциала скоростей и граничного условия на теле (2.2).



Фиг. 2

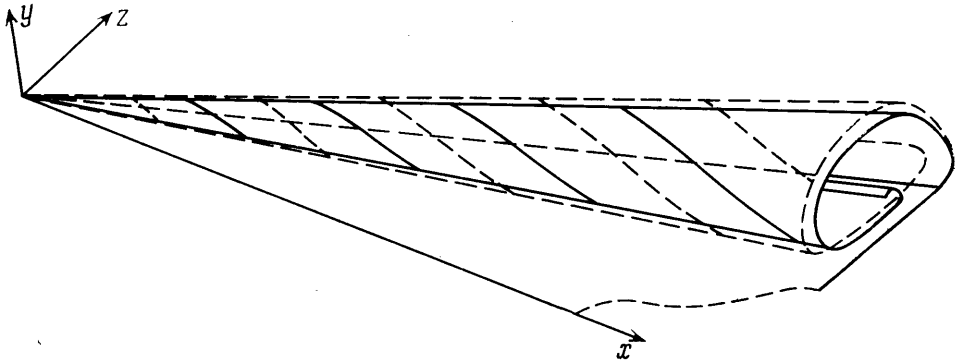
**5. Отрывное обтекание треугольного крыла.** В качестве примера рассмотрим подробнее отрывное обтекание тонкого треугольного крыла с удлинением

$\lambda=1,5$  при числах Маха  $0 \leq M_\infty \leq 0,9$ . Расчетная вихревая система соответствует режиму, когда со всех острых кромок крыла — передних и задних — сходит вихревая пелена. Это позволяет обеспечить выполнение условий Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей на всех кромках. Кроме того, между циркуляциями продольных и поперечных присоединенных вихрей на крыле, а также свободных вихрей, сходящих с кромок, существует связь, вытекающая из условия сохранения величины циркуляции вдоль вихревых нитей [3].

Численные методические исследования показали, что в рассматриваемом примере можно ограничиться расчетной схемой со следующими параметрами. Число контрольных точек на крыле 110, размер области  $D_0$  —  $4b \times 2b \times 2b$  ( $b$  — корневая хорда крыла), число разбиений по пространству  $L=21 \times 10 \times 10$ . Необходимое количество итераций в расчетах изменялось от 3 до 4. При каждом числе  $M_\infty$  и угле атаки  $\alpha$  находились скорости, давления, нагрузки, силы и моменты, действующие на крыло, а также форма вихревого следа. В данной задаче итерационный процесс был связан с выполнением трех условий: (2.1), (2.2) и (2.3).

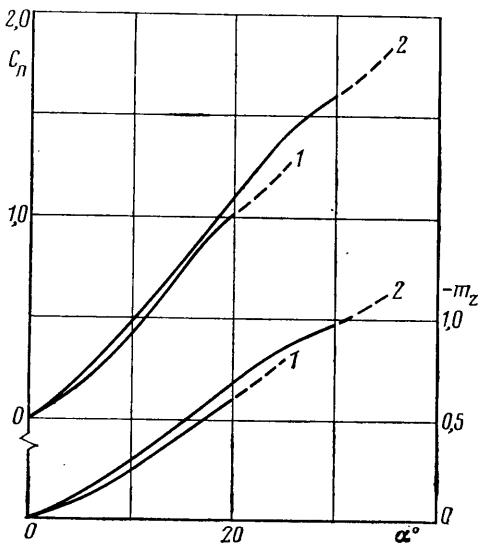
На фиг. 3 показаны вихревые жгуты на правой половине крыла при  $\alpha=18^\circ$  (штриховая линия  $M_\infty=0$ , сплошная линия  $M_\infty=0,9$ ). Зависимости коэффициентов нормальной силы  $C_n$  и продольного момента  $m_z$  относительно оси, проходящей через вершину крыла, от угла атаки  $\alpha$  изображены на фиг. 4 (кривые 1 соответствуют  $M_\infty=0$ , кривые 2 —  $M_\infty=0,9$ ).

На фиг. 5 представлено распределение местных чисел Маха на поверхности крыла при  $M_\infty=0,7$ ,  $\alpha=15^\circ$  (линии равных значений числа  $M$  нанесены через 0,05). Отметим, что наибольшие скорости достигаются в тех местах, где носовая пелена наиболее близко подходит к поверхности крыла.

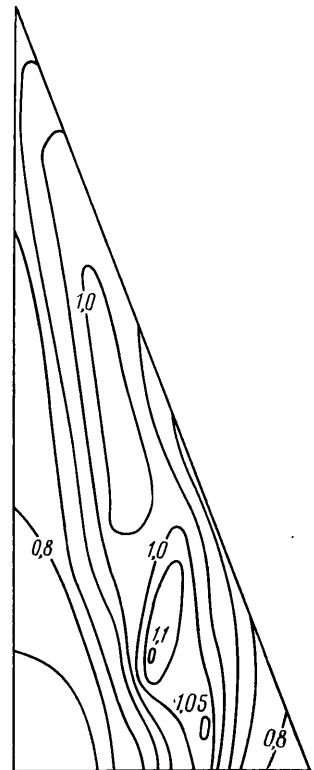


Фиг. 3

Важной является задача определения диапазона углов атаки  $-\alpha^* < \alpha < \alpha^*$ , в котором не происходит разрушения носовых вихревых жгутов на крыле и вблизи него (реализуется стационарное обтекание крыла). Численная методика для несжимаемой среды [3] была обобщена на случай сжимаемого газа. Здесь также удобно давать два значения предельных углов атаки  $\alpha^*$ . Меньшее, при котором наблюдалась несходимость итерационного процесса по нагрузкам (порядка 10% в кормовой части крыла), и большее, когда от одной ите-



Фиг. 4



Фиг. 5

рации к другой заметно изменялись и суммарные характеристики, форма вихревой пелены и т. д. Участки кривых  $C_n(\alpha)$  и  $m_z(\alpha)$ , изображенные штриховой линией на фиг. 4, соответствуют этому диапазону углов атаки, начиная с которого перестают существовать устойчивые вихревые структуры, показанные на фиг. 3.

Из приведенных результатов видно влияние сжимаемости среды при отрывном обтекании треугольного крыла. Вихревой след плотнее закручивается и приближается к поверхности крыла (фиг. 3); нормальная сила и абсолютная величина продольного момента несколько возрастают

(фиг. 4); аэродинамические нагрузки несколько перераспределяются по крылу: падают в носовой части, подрастают в кормовой, сильнее нагружаются концевые сечения; предельные углы атаки  $\alpha^*$  с ростом чисел Маха  $M_\infty$  заметно увеличиваются (фиг. 4).

Полученные результаты качественно помогает понять линейная теория, где учет сжимаемости среды производится с помощью преобразования Прандтля — Глауэрта [4]. Это приводит к рассмотрению обтекания несжимаемой жидкостью преобразованного крыла меньшего удлинения  $\lambda^* = \lambda \sqrt{1 - M_\infty^2}$  с последующим делением его линейных аэродинамических характеристик на  $\sqrt{1 - M_\infty^2}$ .

Переход к меньшим удлинениям объясняет заметный рост  $\alpha^*$  по  $M_\infty$  и незначительное влияние сжимаемости при малых  $\lambda$  на  $C_n$  и  $m_z$ . В работе [5] показана возможность применения для приближенного учета влияния сжимаемости среды обобщенного правила Прандтля — Глауэрта при достаточно малых, но конечных  $\lambda$  и  $\alpha$ . Отметим также, что результаты расчета несущих свойств треугольного крыла малого удлинения, приведенные в [5], качественно совпадают с результатами, полученными в данной работе.

Аналогично решаются стационарные задачи об отрывном, безотрывном и смешанном обтекании тонких крыльев произвольной формы в плане. В последнем случае должны быть заданы те части передних кромок крыла, на которых имеет место отрыв потока (сход свободных вихрей). Во всех этих задачах следует использовать вихревые схемы, предложенные в [3] для несжимаемой среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Общая теория аэродинамики больших скоростей. М.: Воениздат, 1962. 667 с.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963. 1310 с.
3. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
4. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.
5. Захаров С. Б., Судаков Г. Г. Отрывное обтекание крыльев малого удлинения дозвуковым потоком сжимаемого газа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1982, 13, № 5, с. 1—11.
6. Захаров С. Б., Судаков Г. Г. Отрывное обтекание крыльев конечного удлинения с наплывом потоком сжимаемого газа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1983, 14, № 3, с. 1—11.
7. Чушкин П. И. Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа. — Вычисл. математика. Сб. 2. 1957, с. 20—44.

Москва

Поступила в редакцию  
16.VI.1983