

УДК 533.6.011.5

О СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО КЛИНА

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

Изучается асимптотическое решение задачи обтекания затупленного клина равномерным сверхзвуковым потоком совершенного газа. С помощью метода разделения переменных показано, что на больших расстояниях от затупления затухание возмущений течения происходит по степенному закону. В случае дозвукового течения за скачком уплотнения произведен расчет показателя степени для старшего поправочного члена в разложении ударного фронта.

Рассмотрим задачу обтекания полубесконечного тела, представляющего собой плоский клин с углом полурасщора θ и затупленной передней кромкой. Набегающий поток будем считать равномерным и сверхзвуковым $M_\infty > 1$ со скоростью, направленной вдоль оси симметрии клина. Будем предполагать, что движения газа подчиняются уравнениям Эйлера и что газ является совершенным, а отношение его удельных теплоемкостей κ не зависит от температуры.

Введем декартову систему координат xy с осью x , направленной вдоль оси клина, и началом O , совпадающим с вершиной соответствующего острого клина. Обозначим u и v компоненты скорости вдоль осей x и y , p — давление, ρ — плотность, Ψ — функцию тока. Все величины будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц измерения ρ_∞ — плотность набегающего потока, U_∞ — его скорость, L — характерный размер затупления.

При сверхзвуковом обтекании острого клина существуют два типа течения, соответствующих разным наклонам плоской присоединенной ударной волны [1]. В случае течения первого типа при изменении угла θ от 0 до θ_m (максимальный угол отклонения потока ударной волной) тангенс угла наклона скачка C изменяется от $(M_\infty^2 - 1)^{-1/2}$ до C_m , причем при $C < C_s (\theta < \theta_s)$ течение за ударной волной сверхзвуковое, а при $C_s < C < C_m$ — дозвуковое. В случае течения второго типа C изменяется в пределах от ∞ до C_m и течение за ударной волной всегда дозвуковое.

Если передняя часть клина затуплена, течение за ударным фронтом при $x \rightarrow \infty$ разделяется на две основные области: внешний поток и энтропийный слой. Во внешней области течение в первом приближении постоянное и соответствует одному из двух рассмотренных типов. Область энтропийного слоя прилегает к щеке клина и образована струйками тока, прошедшими через сильно искривленную ударную волну вблизи затупления. В случае сверхзвукового течения за ударной волной задача обтекания затупленного клина была рассмотрена в [2—4]. В настоящей работе изучается случай дозвукового течения во внешней области.

Асимптотическую задачу $x \rightarrow \infty$ обтекания затупленного клина будем рассматривать как обратную, т. е. по форме возмущений ударной волны построим течение, а затем определим вид этих возмущений, используя условие непротекания.

Наличие энтропийного слоя приводит к тому, что ударная волна поднимается по оси y на постоянную величину C_e [3—5]. Для нахождения

возмущений формы ударного фронта, зависящих от x , будем использовать метод разделения переменных. Предположим, что при $x \rightarrow \infty$ течение во втором приближении представляет собой суперпозицию возмущений, соответствующих поправочным членам $F_z(x)$ в разложении для ударной волны

$$y = Cx + C_e + F_z(x) + \dots, \quad F_z'(x) = \frac{dF_z(x)}{dx} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (1)$$

Соотношения Рэнкина – Гюгонио, записанные для ударной волны (1), позволяют выписать разложения параметров течения непосредственно за скачком $q_s = q_0[1 + q_1 F_z'(x) + \dots]$, $q = u, v, p, \rho$ (здесь q_0 и $q_1 = \partial \ln q_0 / \partial C$ – постоянные, зависящие от x, M_∞ и C [4]; соответствующий угол полураствора определяется формулой $\theta = \arctg(v_0/u_0)$). Течение во внешней области описывается с помощью переменных $x, \eta = \Psi/Cx$ и задается разложениями

$$u = u_0[1 + c_u F_z'(x\eta) + F_z'(x)U(\eta) + \dots] \quad (2)$$

$$v = v_0[1 + c_v F_z'(x\eta) + F_z'(x)V(\eta) + \dots]$$

$$p = p_0[1 + F_z'(x)P(\eta) + \dots], \quad \rho = \rho_0[1 + c_\rho F_z'(x\eta) + F_z'(x)R(\eta) + \dots]$$

$$y = Cx \left[1 + \frac{\eta - 1}{\rho_0 u_0} + \frac{v_0 C_e}{C^2 u_0 x} + \frac{c_v F_z(x\eta)}{x} + \frac{F_z(x)Y(\eta)}{x} + \dots \right]$$

Члены, содержащие постоянные c_u, c_ρ, c_y [4], описывают слабое изменение энтропии во внешнем потоке. Подставляя разложения (2) в систему уравнений Эйлера, получим систему уравнений для функций второго приближения $Q(\eta)$, $Q = U, V, P, R, Y$

$$\eta \frac{dY}{d\eta} \left[Y - \frac{v_0}{Cu_0}(V - U) \right]^{-1} = 1 + \frac{x F_z''}{F_z'} \quad (3)$$

$$-\frac{\rho_0 u_0}{R + U} \frac{dY}{d\eta} = 1 + \frac{x F_z''}{F_z'}$$

$$\frac{\eta}{V} \frac{dV}{d\eta} - \frac{p_0}{Cu_0 V} \frac{dP}{d\eta} = \frac{x F_z''}{F_z'}$$

$$u_0^2 U + v_0^2 V + \frac{\kappa p_0}{(\kappa - 1) \rho_0} (P - R) = 0$$

$$P - \kappa R = 0$$

Условие разделения переменных для системы (3) имеет вид $1 + x F_z''(x)/F_z'(x) = z$, откуда $F_z(x) = C_z x^z$, т. е. возмущения формы ударной волны имеют степенной характер. Постоянные z и C_z будем считать комплексными, подразумевая под «комплексными» возмущениями их действительную часть.

Система (3) может быть сведена к гипергеометрическому уравнению для функции V , решение которого, удовлетворяющее условиям Рэнкина – Гюгонио, имеет вид

$$V = c_2 \left(\frac{\eta + c_0}{1 + c_0} \right)^{z-1} + c_3 \left(\frac{\eta + c_1}{1 + c_1} \right)^{z-1}$$

$$c_{0,1} = \frac{\kappa M^2 p_0}{C(v_0 \mp u_0 \sqrt{M^2 - 1})}, \quad c_{2,3} = \pm \frac{A c_{1,0} + B}{c_1 - c_0}$$

$$A = v_1 - c_u, \quad B = \frac{p_1 p_0}{C v_0}$$

Если течение за ударной волной сверхзвуковое $M = [\rho_0(u_0^2 + v_0^2)/\kappa p_0]^{1/2} >$

>1 , постоянные c_0 и c_1 являются действительными. При дозвуковом течении $M<1$ эти постоянные являются комплексно сопряженными $c_{0,1} = c_r \pm i c_i$; в этом случае под комплексной степенью подразумевается $\omega^z = \exp[z(\ln|\omega| + i \arg \omega)]$.

Построенное решение в области внешнего течения зависит от неизвестной пока постоянной z . Для ее определения необходимо перейти к изучению энтропийного слоя и использовать условие непротекания. Действительно, разложения (1) оказываются непригодными вблизи поверхности клина (поправочные члены становятся одного порядка с главными при $\eta \rightarrow 0$), поэтому необходимо рассмотреть область с характерными переменными x, Ψ . В этой области давление в первом приближении постоянно, а поле скоростей и плотность описываются функциями $U_0(\Psi)$ и $R_0(\Psi)$ [4].

Предельный переход в разложениях (1), записанных во внутренних переменных, позволяет определить вид внутренних разложений и дает асимптотические краевые условия для возмущений энтропийного слоя при $\Psi \rightarrow \infty$. Подставляя внутренние разложения в систему уравнений Эйлера, получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для возмущений энтропийного слоя. Ее решение, удовлетворяющее условиям сращивания при $\Psi \rightarrow \infty$, позволяет выписать разложение для координаты y во внутренней области

$$y = \frac{v_0}{u_0} x + \int_0^x \frac{d\xi}{\rho_0 u_0 R_0(\xi) U_0(\xi)} + C F_z(x) Y(0) + \dots$$

Используя условие непротекания $y=v_0x/u_0$ при $\Psi=0$, получаем уравнение $Y(0)=0$ для определения комплексной постоянной $z=\alpha+i\beta$. Если течение во внешней области сверхзвуковое [4], решение этого уравнения дает множество значений z с одинаковыми действительными частями α и последовательностью мнимых частей β_n , представляющей собой арифметическую прогрессию

$$\alpha = \ln \left| \frac{(A c_0 + B)(c_1 + 1)}{(A c_1 + B)(c_0 + 1)} \right| \left[\ln \frac{c_0(c_1 + 1)}{c_1(c_0 + 1)} \right]^{-1}$$

$$\beta_n = m\pi \left[\ln \frac{c_0(c_1 + 1)}{c_1(c_0 + 1)} \right]^{-1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь m равно либо $2n$, либо $2n+1$, в зависимости от того, отрицательно или положительно выражение, стоящее под знаком модуля.

Если течение за ударной волной дозвуковое, постоянные z оказываются действительными

$$\alpha_n = \left[\arctg \frac{(A-B)c_i}{(Ac_r+B)(c_r+1)+Ac_i^2} + \frac{\pi}{2} + \pi n \right] \left[\arctg \frac{c_i}{c_r(c_r+1)+c_i^2} \right]^{-1}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \beta = 0$$

Из этой последовательности должны быть исключены значения $\alpha_n > 1$, не удовлетворяющие условию затухания возмущений течения при $x \rightarrow \infty$.

Для завершения построения асимптотического решения остается выписать разложения параметров течения в области энтропийного слоя

$$u = u_0 \left[U_0(\Psi) + \frac{F_z'(x) U(0)}{R_0(\Psi) U_0(\Psi)} + \dots \right], \quad p = p_0 [1 + F_z'(x) P(0) + \dots]$$

$$\rho = \rho_0 [R_0(\Psi) + F_z'(x) R_0(\Psi) R(0) + \dots]$$

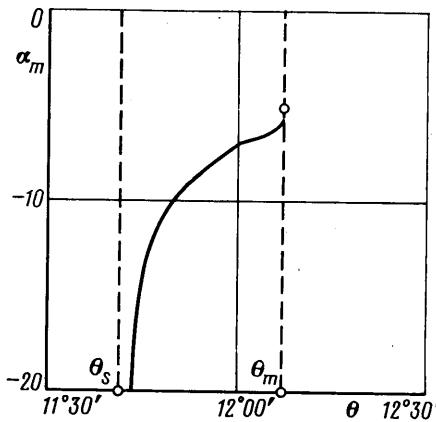
Разложение для v может быть получено из разложения для u заменой множителя u_0 на v_0 .

Ниже приведены результаты расчетов величины $\alpha_m = \max \{\alpha_n < 1\}$, позволяющей оценить скорость затухания возмущений течения при $x \rightarrow \infty$.

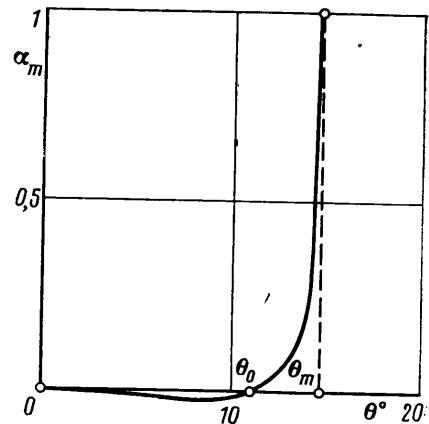
На фиг. 1 показана зависимость величины α_m от θ ($\kappa=1,4$, $M_\infty=1,5$) для случая, когда дозвуковое течение во внешней области принадлежит к первому типу ($C_s < C < C_m$). При $\theta \rightarrow \theta_s$, $\alpha_m \rightarrow -\infty$, поскольку в этом случае $M \rightarrow 1$ и, следовательно, $c_s \rightarrow 0$. В точке $\theta = \theta_m$ график имеет вертикальную касательную. Это объясняется тем, что в рассматриваемой точке производная $d\alpha_m/dC$ существует и отлична от 0, в то время как по смыслу θ_m

$$\frac{\partial \theta}{\partial C} \Big|_{\theta=\theta_m} = 0 \quad (4)$$

На фиг. 2 приведен график $\alpha_m(\theta)$ ($\kappa=1,4$, $M_\infty=1,6$) для случая внешнего течения второго типа ($C_m < C < \infty$). В точке $\theta = \theta_m$ график также имеет вертикальную касательную, причем $\alpha_m(\theta_m) = 1$. Последнее связано с тем,



Фиг. 1



Фиг. 2

что ударной волне $y_s = Cx + \varepsilon x + \dots$, $\varepsilon \ll 1$, соответствует тело $y_b = x[\operatorname{tg} \theta(C) + \varepsilon \partial \operatorname{tg} \theta(C)/\partial C + \dots]$, поправочный член в форме которого обращается в 0 в силу (4). При $M_\infty > 1,483$, $\kappa=1,4$ кривая α_m имеет две точки пересечения с осью θ (на фиг. 2 это точки 0 и $\theta = 10^\circ 54'$). Для меньших значений M_∞ график α_m монотонно стремится к 0 при $\theta \rightarrow 0$.

В заключение рассмотрим вопрос об области применимости полученных решений в случае, когда клин имеет большую, но конечную безразмерную длину X . При сверхзвуковом течении за ударной волной построенное решение справедливо вплоть до характеристики, выходящей из задней оконечности клина. В случае дозвукового течения за ударной волной возмущения порождаются не только затуплением носка, но и влиянием задней кромки. Поэтому решение, описывающее влияние затупления, справедливо только в области $1 \ll x \ll X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.: Гостехиздат, 1952. 466 с.
2. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. Ellinwood J. W. Asymptotic hypersonic-flow theory for blunted slender cones and wedges. — J. Math. and Phys., 1967, v. 46, № 3, p. 281–298.
4. Мануйлович С. В., Терентьев Е. Д. Об асимптотическом решении задачи обтекания затупленного клина сверхзвуковым потоком совершенного газа. — Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 6, с. 46–57.
5. Якура Дж. Теория энтропийных слоев и затупление носка в гиперзвуковом течении. — В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964, с. 296–324.

Москва

Поступила в редакцию
12.V.1983