

УДК 533.6.011.5

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СЛАБЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

КРАСНОБАЕВ К. В.

В работах [1, 2] исследовалось сверхзвуковое обтекание источника рентгеновского излучения звездным ветром. Было найдено, что при достаточно высокой мощности энерговыделения в потоке образуется головная ударная волна, а за источником возникает зона пониженной плотности и высокой температуры газа. Если же приток энергии к газу мал, то течение всюду остается сверхзвуковым [2]. Вопрос об образовании ударной волны в случае слабого прогрева газа излучением в [2] не рассматривался. Вместе с тем, основываясь на качественной аналогии между сверхзвуковым обтеканием непроницаемых тел и источников излучения, естественно ожидать, что при небольшой мощности энерговыделения возможно появление ударной волны, не пересекающей ось симметрии. Ниже указываются условия, при которых это действительно имеет место, устанавливается количественная аналогия между сверхзвуковым обтеканием тонких тел и источников излучения, а также определяется область течения, где такая аналогия отсутствует.

Рассмотрим стационарное двумерное (плоское или осесимметричное) обтекание источника излучения идеальным совершенным газом. Невозмущенный поток считается плоскопараллельным, а плотность, давление и скорость газа в нем равными соответственно ρ_0 , p_0 , u_0 . При этом число Маха $M_0 = u_0(\gamma p_0/\rho_0)^{-1/2} > 1$ (γ — показатель адиабаты). Для описания движения используются координаты z , r . При этом вектор скорости u_0 параллелен оси z .

Обусловленный поглощением излучения приток энергии к единице массы газа в единицу времени обозначим через q . Далее для простоты принимается, что q зависит только от координат и обращается в нуль вне круга (сферы) радиуса L с центром в начале координат. Такой вид функции q соответствует условиям, когда область взаимодействия газа с излучением оптически прозрачна и отнесенный к единице массы коэффициент поглощения слабо зависит от параметров газа. Подобные условия, в частности, могут быть реализованы в лабораторных экспериментах (см., например, монографии [3, 4] и библиографию в них). Теоретические аспекты сверхзвукового обтекания лазерного луча впервые исследовались в [5]. Отметим также, что задача о сверхзвуковом обтекании источников излучения по своей постановке близка к рассматриваемой в теории обтекания тонких тел горючими смесями [6].

Источник излучения назовем слабым, если приобретаемая в результате нагрева тепловая энергия единицы массы газа много меньше кинетической энергии, т. е. $Q = q_0 L / u_0^3 \ll 1$, где q_0 — некоторое характерное значение q . Если $Q \ll 1$ и, кроме того, величины ρ , u , p мало отличаются от ρ_0 , p_0 , u_0 , то можно линеаризовать уравнения гидродинамики и ввести потенциал скорости φ , для определения которого получим

$$\varphi_{zz} = a^2 \left(\varphi_{rr} + \frac{n\varphi_r}{r^n} \right) + \alpha(z, r) \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{1}{M_0^2 - 1}; \quad \alpha = -\frac{(\gamma - 1)q}{a_0^2(M_0^2 - 1)}; \quad a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

где $n=0, 1$ соответственно для плоского и осесимметричного движений.

Граничным условием для φ служит отсутствие возмущений скорости при $z=-\infty$. В соответствии с общими свойствами решений гиперболических уравнений это граничное условие может быть перенесено на плоскость $z=z_0$, причем $z_0 < -L$. Ниже z_0 определена как точка пересечения характеристик AB , касающихся границы зоны энерговыделения, с осью z (фиг. 1, на которой зона энерговыделения заштрихована).

Решениями уравнений (1), удовлетворяющими поставленным граничным условиям, являются функции [7]

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2a} \int_0^{z-z_0} dx_1 \int_{r-a[(z-z_0)-x_1]}^{r+a[(z-z_0)-x_1]} \alpha(x_1, y_1) dy_1 \quad (2)$$

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{z-z_0} dz_1 \int_{R \leq a[(z-z_0)-z_1]} \frac{\alpha(z_1, \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) dx_1 dy_1}{\sqrt{a^2[(z-z_0)-z_1]^2 - R^2}} \quad (3)$$

$$R^2 = x_1^2 + (y_1 - r)^2$$

В выражении для R учтена осевая симметрия течения.

Анализ формул (2) и (3) позволяет сделать следующие выводы.

Для плоского течения область возмущений поля скоростей ограничена слева лучами характеристик AB , A_1B_1 и дугой окружности AA_1 , справа — лучами характеристик CD и CD_1 (последние при продолжении касаются границы зоны энерговыделения в точках E и E_1). В области $BACD$ $\varphi = \varphi(z - z_0 - r/a)$. Воспользовавшись результатами теории сверхзвукового обтекания тонких тел [8, 9], можно увидеть, что потенциал скорости (2) отвечает обтеканию тела, профиль которого ξ дается соотношением

$$\xi \left[(z - z_0) - \frac{r}{a} \right] = \frac{\gamma - 1}{2a_0^2 u_0} \int_0^{z-z_0} dx_1 \int_{r-a[(z-z_0)-x_1]}^{r+a[(z-z_0)-x_1]} q dy_1 \quad (4)$$

Соотношение, подобное (4), легко получить и для области $B_1A_1CD_1$. Только теперь ξ будет зависеть от переменной $(z - z_0 + r/a)$.

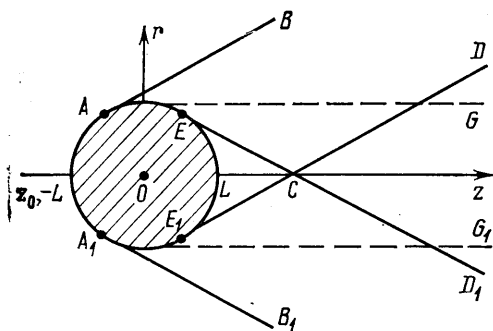
Подчеркнем, что установленная аналогия между полями скоростей при обтекании источника излучения и профиля (4) не означает, что в $BACD$ (или в $B_1A_1CD_1$) аналогичны и распределения плотности. В самом деле, из линеаризованных уравнений гидродинамики получаем следующую формулу для возмущения плотности:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{M_0^2}{u_0} \varphi_z + \frac{M_0^2 - 1}{u_0} \int_{-\infty}^z \alpha dz \quad (5)$$

Видно, что (5) отличается от выражения для возмущенной плотности при адиабатическом движении газа наличием дополнительного слагаемого в правой части. Поэтому распределения

плотности при обтекании профиля (4) и источника излучения будут одинаковыми только вне области GAA_1G_1 .

Так как внутри GAA_1G_1 $\varphi_z = 0$ при $z = \infty$, а $\alpha \leq 0$ и $M_0 > 1$, то из (5) следует, что за источником образуется зона разрежения шириной $2L$.



Фиг. 1

В случае осесимметричного течения движение газа возмущено всюду в области правее линии BA_1B_1 . Для возмущений плотности остается справедливой формула (5). На больших расстояниях от источника ($R \gg L$) подынтегральное выражение в (3) упрощается и тогда потенциал скорости $\varphi(z, r)$ отвечает обтеканию тела вращения, площадь поперечного сечения которого $S(z)$ меняется по закону

$$\frac{dS}{dz} = \frac{(\gamma-1)M_0}{u_0^3} \iint q dx_2 dy_2 \quad (6)$$

Здесь интегрирование проводится в плоскости (x_2, y_2) , причем ось x_2 перпендикулярна плоскости (z, r) , а ось y_2 лежит в этой плоскости и параллельна характеристике $z-z_0-r/a=\text{const}$.

Интересно, что на достаточно больших расстояниях от источника правая часть (4) и величина S в (6) определяются лишь суммарной мощностью энерговыделения внутри круга (сферы) радиуса L и не зависят от детального вида функции q . Соответственно ордината профиля (4) и радиус тела вращения (6) стремятся к некоторому постоянному значению.

Выражения (2), (3) могут быть использованы при построении нелинейной теории обтекания слабых источников излучения. Рассмотрим для определенности осесимметричное течение. Если $R \gg L$, то справедливо (6) и (3) принимает вид

$$\varphi(z, r) = -\frac{u_0}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{2r}} \int_0^{\xi} \frac{S'(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}}, \quad \xi = z-z_0 - \frac{r}{a} \ll \frac{r}{a} \quad (7)$$

Формула (7) для потенциала скорости совпадает с известной из теории сверхзвукового обтекания тонких тел вращения [9]. При этом возмущения компонент скорости газа можно представить в форме (см., например, [9])

$$\frac{\varphi_z}{u_0} = -\sqrt{\frac{a}{2r}} F(\xi), \quad \frac{\varphi_r}{u_0} = \frac{1}{\sqrt{2ar}} F(\xi), \quad F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi} \frac{S''(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} \quad (8)$$

Характерные особенности кривой $F(\xi)$ те же, что и при обтекании тел вращения.

Нелинейная модификация решения (8) осуществляется путем введения характеристической переменной $\xi(z, r)$ согласно уравнению [9]

$$z-z_0 = \frac{r}{a} - \frac{(\gamma+1)M_0^4 a^{3/2}}{\sqrt{2}} F(\xi) r^{1/2} + f(\xi)$$

Если на некоторой кривой $r=r_0(z)$ φ_z и φ_r могут быть с достаточной точностью заменены их значениями, получаемыми из линейной теории, то $f(\xi)$ удобно определить в соответствии с равенством

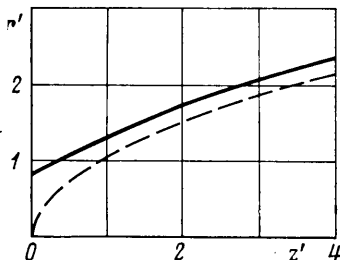
$$z-z_0 = \frac{r}{a} - \frac{(\gamma+1)M_0^4 a^{3/2}}{\sqrt{2}} F(\xi) (r^{1/2} - r_0^{1/2}(\xi)) + \xi \quad (9)$$

Равенство (9) позволяет обычным образом [8, 9] провести анализ эффекта опрокидывания возмущений и найти форму слабой ударной волны. Подчеркнем лишь, что при достаточно малых $F'(\xi)$ (связь $F(\xi)$ с мощностью энерговыделения q следует из (6) и (8)) опрокидывание произойдет на некотором удалении от области энерговыделения и ударная волна не будет пересекать ось z .

В заключение отметим, что метод линеаризации становится непригодным, когда $M_0 \approx 1$ или $M_0 \gg 1$.

Достаточно общий подход к исследованию трансзвуковых течений с притоком тепла предложен недавно в [10].

В случае же гиперзвукового обтекания источников излучения (не обязательно слабых) при $z \gg L$ естественно воспользоваться автомодельным решением, которое описывает установившееся обтекание тонких тел и получается путем обобщения теории сильного взрыва [11, 12]. Входящая в автомодельное решение величина E_0 (количество энергии, подведенное к слою газа единичной в направлении z толщины), вообще говоря, должна



Фиг. 2

быть определена путем численных расчетов. С целью проверки применимости автомодельного решения к задачам обтекания источников излучения были проведены численные расчеты поля течения для различных. Использовалась та же разностная схема, что и в [2]. В процессе расчетов определялась и величина E_0 .

В качестве примера на фиг. 2 сплошной кривой изображен профиль ударной волны, полученный при расчете обтекания источника с $q=q_0 \exp[-(z^2+4r^2)/L^2]$, $Q=2$, $M_0=10$, $\gamma=1,4$, $r'=r/L$, $z'=z/L$. Штриховая линия — автомодельный профиль ударной волны. Выбор E_0 соответствовал данным расчетов. Видно, при больших z/L имеется удовлетворительное согласие между результатами расчетов и автомодельным решением.

Полезно также подчеркнуть, что полученные выше результаты могут быть использованы и при анализе нестационарных явлений, протекающих в первоначально покоившемся газе, который нагревается слабым пучком излучения переменной по времени интенсивности. В этом случае q является функцией координат и времени t , а уравнение для потенциала скорости принимает вид

$$\varphi_{,ii} = a_0^2 \Delta \varphi - (\gamma - 1) q \quad (10)$$

(Δ — оператор Лапласа).

Решения (10) для плоского и цилиндрически-симметричного нестационарных движений имеют тот же вид, что и (2), (3). Воспользовавшись этим, можно определить зависимость поля течения от основных параметров источника и момент опрокидывания волны давления. При этом нет необходимости прибегать к часто используемому (см. [4]) предположению об изобаричности движения в зоне энерговыделения.

Автор благодарит В. П. Стулова и М. М. Гилянского за обсуждение работы и весьма полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснобаев К. В., Сюняев Р. А. Обтекание рентгеновского источника звездным ветром. — Письма в Астрон. журн., 1977, т. 3, № 3, с. 124—128.
2. Краснобаев К. В., Сюняев Р. А. Расчет обтекания рентгеновского источника звездным ветром. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 106—112.
3. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980. 415 с.
4. Уолш Дж., Ульрих П. Б. Тепловое расплывание лазерного пучка в атмосфере. — В кн.: Распространение лазерного пучка в атмосфере. М.: Мир, 1981, с. 278—385.
5. Белоконов В. А., Руденко О. В., Хохлов Р. В. Аэродинамические явления при сверхзвуковом обтекании лазерного луча. — Акуст. журн., 1977, т. 23, № 4, с. 632—634.
6. Течение газа с подводом тепла вблизи внешней поверхности тела. — Обзор ОНТИ ЦАГИ, 1971, № 347. 312 с.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
9. Уилем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
10. Карabutov А. А., Руденко О. В. Модифицированный метод Хохлова для исследования нестационарных трансзвуковых течений сжимаемого газа. — Докл. АН СССР, 1979/ т. 248, № 5, с. 1082—1085.
11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965. 386 с.
12. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1983