МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1984

УДК 533.6.011.34

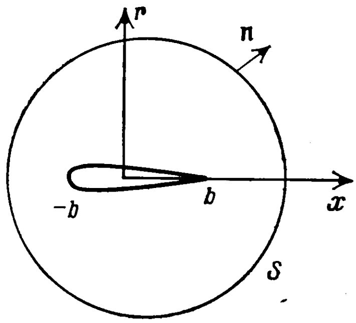
О ПРОПУЛЬСИВНОМ К.П.Д. ВИБРИРУЮЩИХ ТЕЛ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

КОГАН М. Н., УСТИНОВ М. В.

В работе [1] рассмотрена вариационная задача о минимальной мощности, необходимой для получения заданной тяги для крыла в сверхзвуковом потоке, поверхность которого может вибрировать. В настоящей работе найден теоретически максимальный к.п.д. тел в дозвуковом потоке, форма которых моделируется нестационарными источниками. Для осесимметричных тел найдена форма, дающая к.п.д., сколь угодно близкий к теоретическому пределу.

Полученные результаты позволяют сделать оценку возможного совершенства не только искусственно создаваемых аппаратов, но и живых существ, поскольку последние движутся с дозвуковыми скоростями.

1. Рассмотрим осесимметричное тело длиной $2b$, которое периодически деформируется, все время оставаясь осесимметричным и сохраняя постоянной свою длину. Пусть это тело обтекается дозвуковым потоком с числом Маха M, скоростью u, скоростью звука a, плотностью ρ. Окружим тело произвольной неподвижной поверхностью S (см. фигуру). Пусть течение



потенциальное и возмущения, вносимые телом в поток, малы. Тогда, используя соотношения, полученные в [1], и переходя к цилиндрическим координатам $r=\sqrt{y^2+z^2}$ и x, получим следующие выражения для средней за период силы сопротивления $\langle X\rangle$ и мощности $\langle N\rangle$, подводимой от тела к лазу

$$\langle X\rangle=\frac{\rho}{T}\int_0^T dt\iint_S\left[-\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 n_x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 n_x-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r}n_r-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 n_x\right]dS$$

$$\langle N\rangle=-\frac{\rho}{T}\int_0^T dt\iint_S\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial t}n_r+\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}n_x-\frac{M}{a}n_x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]dS \qquad (1.1)$$

$$\beta=\sqrt{1-M^2},\qquad n_x=\cos(\mathbf{n},\mathbf{x}),\qquad n_r=\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})$$

где $\Phi=ux+\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости, T — период колебаний тела, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Заменим тело нестационарными источниками, расположенными на отрезке $[-b; b]$ оси X с плотностью $g(\xi, t)$. Используя выражение для потенциала нестационарного источника (см., например, [2]), напишем выражение для добавочного потенциала φ

$$\varphi=\int\limits_{-b}^{b}\frac{1}{R(\xi)}g\left(\xi,t+\frac{M(x-\xi)-R(\xi)}{a\beta^2}\right)d\xi,\quad R(\xi)=\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2r^2}\quad (1.2)$$

Найдем вид добавочного потенциала φ на больших расстояниях от тела. Для этого $R(\xi)$ разложим в ряд по степеням $\xi/\sqrt{x^2+\beta^2r^2}$

$$R(\xi)=R(0)\left[1-\frac{x\xi}{R(0)}+O\left(\frac{\xi^2}{R^2(0)}\right)\right]\qquad(1.3)$$

В знаменателе подынтегрального выражения (1.2) оставим только первый член разложения (1.3). Выражение для g требует более внимательного рассмотрения. Подставляя в него разложение (1.3), получим

$$g\left(\xi,t+\frac{M(x-\xi)-R(\xi)}{a\beta^2}\right)=$$

$$=g\left(\xi,t+\frac{M(x-\xi)-R(0)}{a\beta^2}-\frac{x\xi}{a\beta^2R(0)}+O\left(\frac{\xi^2}{a\beta^2R(0)}\right)\right)$$

Так как g меняется на свой порядок при изменении времени на величину порядка T, то можно отбросить только те члены, которые малы по сравнению с периодом. Считая, что $\xi\sim b$ и $b/(aT)\sim1$, видим, что только член $O[\xi^2/(a\beta^2R(0))]$ мал по сравнению с T и может быть отброшен. Таким образом, добавочный потенциал φ на больших расстояниях от тела имеет вид

$$\varphi=\int\limits_{-b}^{b}\frac{g(\xi,t^*)}{R(0)}d\xi,\qquad t^*=t+\frac{M(x-\xi)-R(0)}{a\beta^2}+\frac{x\xi}{a\beta^2R(0)}$$

Дифференцируя это выражение и оставляя наиболее медленно убывающие с расстоянием члены, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\frac{M}{a\beta^2R(0)}-\frac{x}{a\beta^2R^2(0)}\right)\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial g}{\partial t^*}(\xi,t^*)\,d\xi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{r}{aR^2(0)}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial g}{\partial t^*}(\xi,t^*)\,d\xi,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{R(0)}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial g}{\partial t^*}(\xi,t^*)\,d\xi$$

Подставляя производные потенциала в (1.1), переходя к координатам $R=R(0)$ и $\theta=\arccos(x/R)$, принимая за S поверхность $R=\text{const}$, получим при больших R следующие выражения для $\langle X\rangle$ и $\langle N\rangle$:

$$\langle X\rangle=\frac{2\pi}{a^2R^4T}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^\pi\left[\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial g}{\partial t^*}d\xi\right]^2(M-\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$\langle N\rangle=\frac{2\pi}{aR^2T}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^\pi\left[\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial g}{\partial t^*}d\xi\right]^2\sin\theta\,d\theta\qquad(1.4)$$

Таким образом, средняя за период сила сопротивления и мощность выразились через интенсивность источников $g(\xi,\ t)$. Это позволяет формулировать вариационные задачи для $g(\xi,\ t)$ и затем, решив их, находить оптимальные формы тела.

Переходя к безразмерным переменным $g'=g/ub$, $\xi'=\xi/b$, $t'=t/T$, разлагая g' в комплексный ряд Фурье и подставляя это разложение в (1.4), получим

$$g'(\xi',t')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\xi')\exp(2\pi int');\qquad c_n=c_{-n}^*$$

$$C_x=\frac{16\pi^3}{\beta^4}\left(\frac{b}{aT}\right)^2\int_0^1 dt'\int_0^\pi\left[\int_{-1}^1\sum_{\substack{n=-\infty\\ m=-\infty}}^{+\infty} E_{nm}\,d\xi\right](M-\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$C_N=\frac{16\pi^3}{M\beta^2}\left(\frac{b}{aT}\right)^2\int_0^1 dt'\int_0^\pi\left[\int_{-1}^1\sum_{\substack{n=-\infty\\ m=-\infty}}^{+\infty} E_{nm}\,d\xi\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$E_{nm}=nmc_n(\xi')c_m(\xi')\exp(2\pi i(n+m)t^*);\quad C_x=\frac{2\langle X\rangle}{\rho u^2b^2};\quad C_N=\frac{2\langle N\rangle}{\rho u^3b^2}$$

Проинтегрировав по t' слагаемые, для которых $m\neq n$, заметим, что они равны нулю. Поэтому остается только одинарная сумма и выражения для C_x и C_N принимают вид

$$C_x=\sum_{n=1}^{\infty}C_x(n);\qquad C_N=\sum_{n=1}^{\infty}C_N(n)\tag{1.5}$$

$$C_x(n)=KD^2\int_{-1}^{1}\Phi^2(x)\,(M-x)\,dx\tag{1.6}$$

$$C_N(n)=\frac{K\beta^2}{M}D^2\int_{-1}^{1}\Phi^2(x)\,dx\tag{1.7}$$

$$\Phi^2(x)=\left|\int_{-1}^{1}c_n(\xi')\exp\left(\frac{2\pi iD}{\beta^2}(x-M)\xi'\right)d\xi'\right|^2\tag{1.8}$$

$$D=\frac{nb}{aT}\cdot\quad K=\frac{32\pi^3}{\beta^4}\cdot\quad x=\cos\theta$$

2. Поставим задачу о нахождении минимума мощности (C_N) при заданной тяге (C_x). Сначала решим ее для $C_x(n)$ и $C_N(n)$. Предположим, что интегральное уравнение (1.8) разрешимо относительно $c_n(\xi)$ для той функции $\Phi(x)$, которая дает минимум $C_N(n)$ при заданном $C_x(n)$. (В дальнейшем будет показано, что при $\omega\to\infty$ такое решение имеется.) По принципу взаимности задача о минимуме $C_N(n)$ при заданном $C_x(n)$ эквивалентна задаче о минимуме $C_x(n)$ при заданном $C_N(n)$, которую и будем решать.

Если эту задачу решать методом множителей Лагранжа, то получится, что она не имеет решения в классе непрерывных функций. Для нахождения решения учтем, что в интеграл для $C_x(n)$ функция $\Phi^2(x)$ входит с весом $(M-x)$, который достигает минимума при $x=1$, а в интеграл для $C_N(n)$ она входит с весом 1. Поэтому, чтобы получить минимум $C_x(n)$ при заданном $C_N(n)$, нужно выбрать $\Phi^2(x)$, имеющую резкий максимум в точке минимума $(M-x)$, т. е. при $x=1$. Поэтому решением этой задачи является $\delta(x-1)$. При $\Phi^2(x)=\delta(x-1)$ получим

$$C_x(n)=KD^2(M-1);\qquad C_N(n)=\frac{K\beta^2}{M}D^2$$

При этом для максимального к. п. д. получим

$$\eta_{\max}=-\left(\frac{C_x(n)}{C_N(n)}\right)_{\max}=\frac{M}{M+1}\tag{2.1}$$

Это выражение совпадает с формулой для максимального к. п. д. вибрирующего крыла на сверхзвуковой скорости [1].

Покажем теперь, что интегральное уравнение (1.8) имеет решение для функции $\Phi^2(x)$, сколь угодно близкой к $\delta(x-1)$. Рассмотрим функцию $c_n(\xi)$ вида

$$c_n(\xi)=c\sqrt{D}\exp\left(\frac{2\pi i}{\beta^2}D(M-1)\xi\right),\quad \xi\in[-1,1];\quad c_n(\xi)=0,\quad \xi\notin[-1,1] \tag{2.2}$$

тогда

$$\left|\int_{-1}^{1}c_n(\xi)\exp\left(\frac{2\pi i}{\beta^2}D(x-M)\xi\right)d\xi\right|^2=2c\sqrt{D}\frac{\sin\chi}{\chi};\quad \chi=\frac{2\pi D(x-1)}{\beta^2} \tag{2.3}$$

Функция (2.3) заметно отлична от нуля при $-\pi<\chi<\pi$. Обозначая через Δx «ширину» функции (2.3), т. е. интервал, в котором она заметно отлична от нуля, получим $\Delta x\sim\beta^2/(2D)$. Отсюда видно, что функция (2.3) становится бесконечно узкой при $D\to\infty$, а интеграл от нее остается при этом конечным. Значит, функция (2.3) стремится к $d\delta(x-1)$ при $D\to\infty$ (здесь d – некоторая постоянная). Постоянная не влияет на к.п.д., так как в d раз увеличиваются и $C_x(n)$ и $C_N(n)$.

Из проведенного рассмотрения видно, что при увеличении n к. п. д. монотонно возрастает. Это означает, что в рядах (1.5) целесообразно оставить только члены с максимально возможным n, или с наибольшей реализуемой частотой. Поэтому максимально возможный к. п. д. определяется формулой (2.1).

Можно показать, что и для любого пространственного тела, которое можно моделировать источниками, к. п. д. определяется также формулой (2.1)

3. Найдем форму осесимметричного тела, дающую к. п. д., сколь угодно близкий к максимальному. Если взять плотность распределения источников, полученную при $c_n(\xi)$, определяемой формулой (2.2), то получится тело с отрицательной площадью поперечного сечения. Для того чтобы сделать ее положительной, добавим к ней не зависящее от времени распределение источников $g_1=ubf(\xi)$. В результате получим

$$g(\xi,t)=2c\sqrt{D}\,ub\cos\frac{2\pi n}{T}\left(t-\frac{1-M}{a\beta^2}\xi\right)+ubf(\xi) \tag{3.1}$$

$$\int_{-b}^{b}f(\xi)\,d\xi=0 \tag{3.2}$$

Условие (3.2) обеспечивает замкнутость тела. Как видно из (1.6) и (1.7), не зависящая от времени часть плотности распределения источников вклад в C_x и C_N не дает, и поэтому ее добавление не влияет на к. п. д.

Граничное условие непротекания на поверхности тела, заданного уравнением $r=l(x,t)$, в линейном приближении, имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=l(x,t)}=u\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial l}{\partial t} \tag{3.3}$$

Для решения этого уравнения найдем потенциал при малых r. Подставляя $g(\xi,t)$ вида (3.1) в (1.2), получим

$$\varphi=ub\int_{-b}\frac{\omega(x,r,\xi,t)}{R(\xi)}d\xi=ub\int_{-b}\frac{\omega(x,r,x,t)}{R(\xi)}d\xi+$$

$$+ub\int_{-b}^{b}\frac{\omega(x,r,\xi,t)-\omega(x,r,x,t)}{R(\xi)}d\xi$$

$$\omega(x,r,\xi,t)=2c\sqrt{D}\cos\frac{2\pi n}{T}\left(t+\frac{M(x-\xi)-R(\xi)}{a\beta^2}\right)$$

Здесь первое слагаемое стремится к бесконечности при $r\to 0$, а второе — к постоянному пределу. Поэтому при достаточно малых r вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым. Проинтегрировав первое слагаемое по ξ и оставив только максимальные члены при $r\to 0$, получим

$$\varphi=-2\ln r\left[ubf(x)+2ubc\sqrt{D}\cos\frac{2\pi n}{T}\left(t-\frac{(1-M)}{a\beta^2}x\right)\right]$$

Подставляя это выражение в (3.3) и вводя новую функцию $g=l^2/2$, получим линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial g}{\partial t}=-2bf(x)-4bc\sqrt{D}\cos\frac{2\pi n}{T}\left(t+\frac{(M-1)x}{a\beta^2}\right)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $g(-b)=0$, имеет вид

$$g=-\frac{4bc\sqrt{D}\,TaM(M+1)}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{T}\left(2t-\frac{(2M+1)x-b}{aM(M+1)}\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n}{T}\left(\frac{x+b}{aM(M+1)}\right)-2b\int_{-b}^{x}f(\xi)\,d\xi \qquad (3.4)$$

Для того чтобы тело имело постоянную по времени длину, необходимо, чтобы $g(b)=0$. Это условие выполняется, если

$$\frac{2\pi D}{M(M+1)}=\pi m \qquad (3.5)$$

Таким образом, постоянство длины тела ведет к дискретному изменению D. Однако это не влияет на предыдущие рассуждения, так как для них неважно, каким образом D стремится к бесконечности. Подставляя (3.5) в (2.4), получим окончательное выражение для площади поперечного сечения тела

$$S=-4\pi b\int_{-b}^{x}f(\xi)\,d\xi-\frac{16b^2c\sqrt{D}}{m}\cos\left[\pi mM(M+1)\frac{a}{b}t-\right.$$
$$\left.-\pi m\left(M+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{b}-\frac{\pi m}{2}\right]\sin\frac{\pi m}{2}\left(\frac{x}{b}+1\right)$$

Отсюда видно, что форма тела, дающая к. п. д., близкий к максимальному, представляет собой бегущую волну, перемещающуюся по телу со скоростью $aM(M+1)/(M+{}^1/_2)$. Полученная форма тела при надлежащем выборе $f(\xi)$ физически реализуема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н., Устинов М. В.* О пропульсивном к.п.д. вибрирующего крыла в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 132—139.
2. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 159 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1983