

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
№ 4 · 1984

УДК 532.5.013.4

**ВЛИЯНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ
КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ**

БОГОЯВЛЕНСКИЙ А. Б., ЯВОРСКАЯ И. М.

Исследуется влияние вертикальных колебаний на возникновение конвекции во вращающемся плоском слое жидкости при подогреве снизу. В этом случае в задаче появляется модулируемый параметр — ускорение силы тяжести. Модуляция параметра может значительно влиять на возникновение конвективной неустойчивости. В непродающимся слое модуляция параметра исследовалась в работах [1–3]. Наличие вращения существенно усложняет задачу математически, вводя дополнительную зависимость решения от чисел Тэйлора Та и Прандтля Пр. Кроме того, во вращающихся жидкостях при $Pr < 1$ на пределе устойчивости оказывается возможным появление колебательного режима конвекции. Модуляция параметра во вращающейся жидкости может приводить к изменению не только предела устойчивости и критической длины волны, но и собственной частоты колебательной конвекции. Влияние модуляции параметра на конвективную устойчивость вращающейся жидкости рассматривалось в [4] только для частного случая синусоидального изменения градиента температуры с малой амплитудой при $Pr = 1$, т. е. изучалось влияние модуляции лишь на стационарный режим конвекции.

В настоящей работе влияние вертикальных синусоидальных колебаний слоя на возникновение конвекции во вращающейся жидкости с произвольными числами Прандтля исследуется в двух случаях: колебаний высокой частоты с произвольной амплитудой и малой амплитуды, но произвольной частоты. Границы слоя предполагаются свободными от напряжений.

1. Постановка задачи. Плоский вращающийся вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью Ω слой вязкой несжимаемой жидкости подвергается вертикальным смещениям с частотой v_p и амплитудой η_p . В этом случае ускорение силы тяжести имеет осциллирующую по времени компоненту $g = g_0 + v_p^2 \eta_p \sin v_p t$. Система линейных уравнений, описывающих возникновение конвекции в плоском слое вращающейся жидкости, на границах которого приложена постоянная разность температур ΔT_0 , в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 w &= Ra(1 + \eta \sin v_0 t) \Delta_1 \theta - Ta^{\nu_2} \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \xi &= Ta^{\nu_2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \left(Pr \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta = w \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad Ra = \frac{\beta g \Delta T_0 h^3}{\nu \kappa}, \quad Ta = \frac{4 \Omega^2 h^4}{\nu^2} \\ Pr &= \frac{\nu}{\kappa}, \quad \eta = \frac{v_p^2 \eta_p}{g}, \quad v_0 = \frac{v_p h^2}{\nu} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $w = z_0 v$ и $\xi = z_0 \operatorname{rot} v$ — вертикальные компоненты скорости и вихря, θ — возмущение температуры, z_0 — единичный направленный по вертикали вектор, β , ν и κ — коэффициенты объемного расширения, вязкости

и температуропроводности, h — толщина слоя, Ra , Ta и Pr — числа Рэлея, Тэйлора и Прандтля, η и v_0 — относительные амплитуды и частота вибраций. В качестве характерных масштабов длины, скорости, времени и температуры выбраны соответственно h , η/h , h^2/v и ΔT_0 . Из (1.1) следует, что случай $\text{Pr}=1$ — особый в математическом отношении, поскольку при $\text{Pr}=1$ система (1.1) сводится к уравнению 2-го порядка, а не 3-го, как обычно.

Далее для упрощения задачи будет рассмотрен случай свободных от напряжения границ. Границные условия в переменных w , ξ и θ примут вид

$$z=0; \quad 1: \quad w=w_{zz}=\xi_z=\theta=0 \quad (1.2)$$

Решение системы (1.1) при граничных условиях (1.2) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} w &= w(t) \sin \pi z \exp i(k_1 x + k_2 y) \\ \theta &= \theta(t) \sin \pi z \exp i(k_1 x + k_2 y) \\ \xi &= \xi(t) \cos \pi z \exp i(k_1 x + k_2 y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подстановка (1.3) в (1.1) и замена независимого переменного и функций приводит к системе уравнений для зависящих от времени амплитуд

$$\begin{aligned} u' + u &= v \\ v' + v &= R(1 + \eta \sin \omega \tau) \theta - uT \\ \text{Pr} \theta' + \theta &= v \\ R &= \frac{k^2 \text{Ra}}{(\pi^2 + k^2)^3}, \quad T = \frac{\pi^2 \text{Ta}}{(\pi^2 + k^2)^3}, \quad \omega = \frac{v_p h^2}{v (\pi^2 + k^2)} \\ t &= \frac{\tau}{\pi^2 + k^2}, \quad \xi = \text{Ta}^{1/2} \pi u, \quad w = (\pi^2 + k^2) v, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по τ .

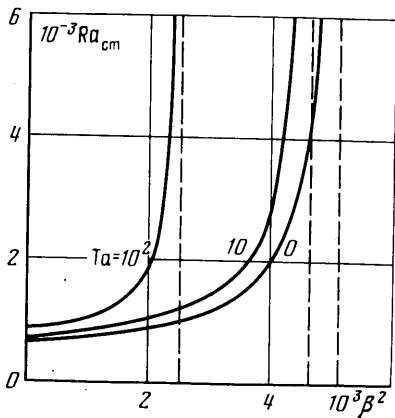
2. Случай модуляции высокой частоты. Если частота модуляции велика, то для решения задачи можно использовать метод усреднения [5]: представить решения в виде суммы быстро и медленно меняющихся во времени составляющих и получить для них отдельные системы уравнений. Затем система для быстро меняющихся, составляющих решается приближенно, с учетом только главных членов. Полученные решения подставляются в систему для медленно меняющихся компонентов и система осредняется по периоду модуляции $2\pi/\omega$. После исключения из осредненной системы вертикальных составляющих скорости и вихря получим уравнение для осредненного возмущения температуры θ_0

$$\begin{aligned} \text{Pr} \theta_0''' + K \theta_0'' + \left(N - R + R^2 \frac{\alpha^2}{2} \right) \theta_0' + \left(M - R + R^2 \frac{\alpha^2}{2} \right) \theta_0 &= 0 \\ K &= 2 \text{Pr} + 1, \quad N = 2 + \text{Pr} + \text{Pr} T, \quad M = 1 + T, \quad \alpha^2 = \frac{\eta^2}{\text{Pr} \omega^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

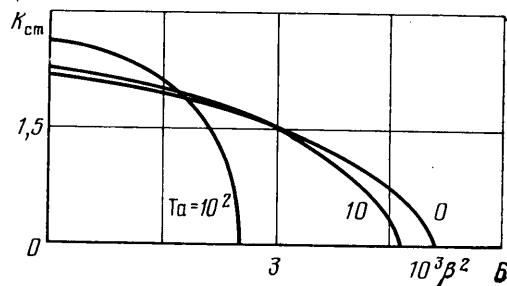
Представив решение в нормальных модах и подставив его в (2.1), найдем критические числа Рэлея R_c и R_o для монотонной и колебательной неустойчивости соответственно, а также частоту нейтральных колебаний σ

$$R_i = \frac{1}{\alpha^2} [1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha^2 (A_i + B_i T)}] \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \text{Pr}}{1 + \text{Pr}} [T - T^*], \quad T^* = \frac{1 + \text{Pr}}{1 - \text{Pr}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где для стационарной конвекции $i=c$ и $A_c=B_c=1$, а для колебательной $i=o$, $A_o=2(\text{Pr}+1)$, $B_o=2\text{Pr}^2/(\text{Pr}+1)$.

Выражение для σ^2 показывает, что частота нейтральных колебаний на пределе устойчивости при вибрациях высокой частоты не меняется и для существования колебательной конвекции необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: $\text{Pr}<1$, $T>T^*$.

При малых амплитудах модуляции получим асимптотическую формулу

$$R_i = (A_i + B_i T) \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} (A_i + B_i T) \right] \quad (2.3)$$

Первый член в правой части соответствует критическим числам Рэлея во вращающемся слое без модуляции. Как следует из (2.2), критическое значение числа Рэлея зависит от числа Тэйлора T и параметра вибрации α^2 . Оба эффекта — вибрация и вращение — приводят к стабилизации теплопроводного режима. Предельное значение параметра вибрации, при котором наступает полная стабилизация, уменьшается с увеличением угловой скорости

$$\alpha_{i*}^2 = \frac{1}{2(A_i + B_i T)} \quad (2.4)$$

Минимальное значение числа Рэлея Ra_{im} , соответствующее пределу устойчивости, достигается при критическом значении волнового числа k_{im} , которое является корнем уравнения

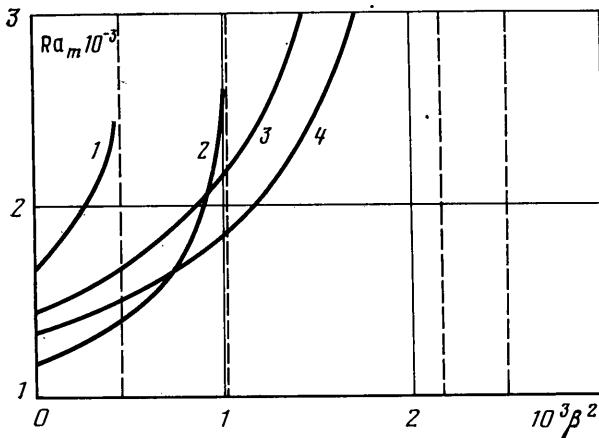
$$\begin{aligned} & 2a^5 - 3\pi^2 a^4 - \pi^2 \frac{B_i}{A_i} a^2 Ta + \frac{A_i \beta^2}{2\pi^2} [2a^4 - 4\pi^2 a^3 - \\ & - \pi^2 \frac{B_i}{A_i} a Ta - \pi^4 \frac{B_i}{A_i} Ta] = 0 \quad (2.5) \\ & a = k_{im}^2 + \pi^2, \quad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{(\pi^2 + k^2)^2} = \frac{\nu \kappa v_p^2 \eta_p^2}{g^2 h^4} \end{aligned}$$

На основании (2.4) получим

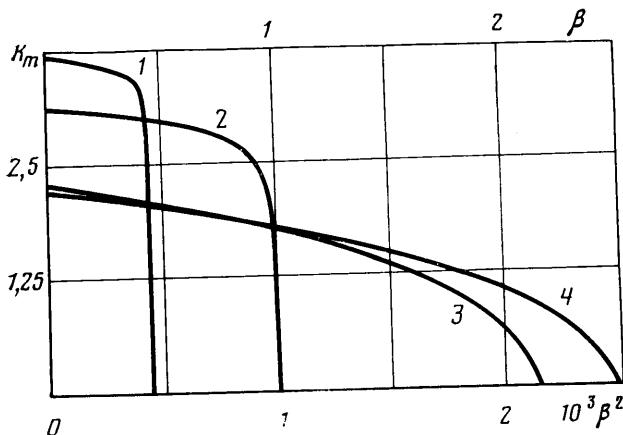
$$\beta^2 \leq \frac{\pi^2 + k^2}{2[A_i(\pi^2 + k^2)^3 + \pi^2 B_i Ta]} \quad (2.6)$$

Предельному значению β_{i*}^2 , определяемому по (2.6) при знаке равенства, соответствует $Ra_{im}=\infty$ и $k_{im}=0$, т. е.

$$\beta_{i*}^2 = \frac{1}{2[A_i \pi^4 + B_i Ta]}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Зависимости минимального критического числа Рэлея Ra_{cm} и волнового числа k_{cm} от параметра модуляции β^2 при различных значениях числа Тэйлора показаны на фиг. 1, 2. Штриховыми линиями обозначены предельные значения параметра вибрации $\beta_{c*2}(Ta)$. Оба эффекта – вращение и вибрация – повышают устойчивость жидкости относительно стационарных возмущений. Критическое волновое число k_{cm} с ростом параметра вибрации падает до нуля.

Предел устойчивости относительно колебательных возмущений зависит не только от Та и β^2 , но и от числа Прандтля; при этом для Та и Гр должны выполняться условия $Pr < 1$, $T > T^*$. На фиг. 3, 4 приведены графики зависимости минимальных критических чисел Рэлея Ra_{cm} , Ra_{om} и волновых чисел k_{cm} , k_{om} от параметра модуляции β^2 при различных значениях Та и Гр. Кривые 1 и 2 характеризуют монотонные кривые (Ra_{cm}, k_{cm}) при Та=1000 и 400 соответственно. Кривые 3, 4 сочленены на неустойчивости (Ra_{cm}, k_{cm}) при Та=1000 и 400 соответственно. Кривые 3, 4 соответствуют $Ra_{om}(\beta^2)$, $k_{om}(\beta^2)$ при Та=1000 и различных значениях числа Прандтля (3 – Гр=0,1; 4 – Гр=0,025). Кривая $Ra_{om}(\beta^2)$ при Та=400, Гр=0,025 расположена правее соответствующей кривой при Та=1000, Гр=0,025, но в масштабах фиг. 3 эти кривые практически совпадают. Поэтому в дальнейшем, говоря о поведении Ra_{om} и k_{om} при Та=400, Гр=0,025, будем ссылаться на кривые 4.

С ростом значения числа Прандтля ($Pr < 1$) кривые $Ra_{om}(\beta^2)$ сдвигаются вверх и влево (стабилизация) и соответственно асимптоты $\beta^2 = \beta_{c*2}$ (штриховые линии) сдвигаются влево. Совместное рассмотрение кривых 2, 4 (Та=400) показывает, что если $Ra_{om}(0) > Ra_{cm}(0)$, то кривые $Ra_{cm}(\beta^2)$, $Ra_{om}(\beta^2)$ пересекаются при условии $\beta_{c*2} \geq \beta_{c*2}$. Таким образом, при одних и тех же значениях Та с ростом β^2 монотонная неустойчивость может сменяться колебательной.

Граница области в пространстве параметров Гр, Та, β^2 , в которой Ra_{om} имеет реальный смысл порога колебательной неустойчивости, имеет форму поверхности

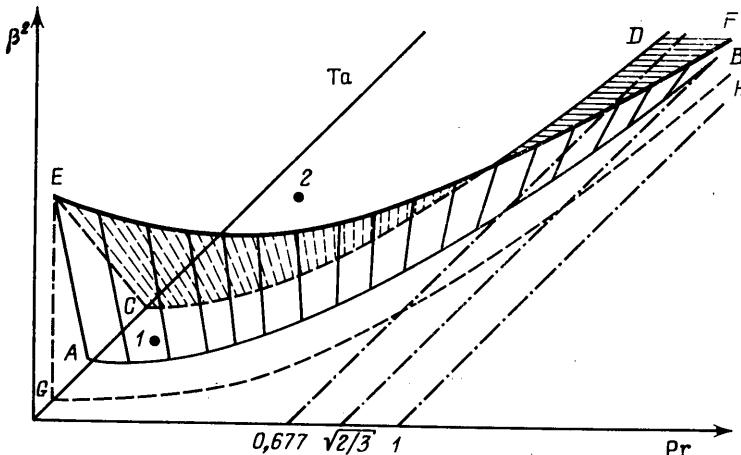
$\beta^2 = \beta^2(\text{Pr}, \text{Ta})$ и определяется решением следующей системы:

$$\frac{\partial \text{Ra}_o}{\partial k} = 0, \quad \sigma^2 = 0 \quad (2.7)$$

Условие $\beta^2 = 0$ дает линию пересечения (AB) данной поверхности с плоскостью (Pr, Ta) . Уравнение этой линии (см. [7])

$$\text{Ta} = \frac{27\pi^4(1+\text{Pr})^4(1-\text{Pr})^2}{(2-3\text{Pr}^2)^3}$$

При $\beta^2 = \beta_{o*}^2$ значение $k_{om} = 0$, поэтому $\text{Ta} = \pi^4(1+\text{Pr})/(1-\text{Pr}) \equiv G(\text{Pr})$. Условно поверхность (2.7) показана на фиг. 5 редкой штриховкой.



Фиг. 5

В пространстве параметров $(\text{Pr}, \text{Ta}, \beta^2)$ геометрическое место точек, описываемое уравнением $\text{Ra}_{cm} = \text{Ra}_{om}$, образует поверхность. При $\beta^2 = 0$ эта поверхность пересекает плоскость (Pr, Ta) по кривой (CD) , которая имеет асимптоту $(\text{Ta} \rightarrow \infty)$ при $\text{Pr} = 0,677$ и подробно исследована в [7]. Вторая кривая (EF) в пространстве $(\text{Pr}, \text{Ta}, \beta^2)$, через которую проходит данная поверхность, описывается уравнением $\beta_{o*}^2 = \beta_{c*}^2$. Ее проекция (GH) на плоскость (Pr, Ta) имеет вид $\text{Ta} = G(\text{Pr})$. Поверхность $\text{Ra}_{cm} = \text{Ra}_{om}$ показана на фиг. 5 более частой штриховкой (форма поверхности рассчитывается численно и на фигуре показана условно), она является границей области в пространстве параметров, в которой реализуется колебательная неустойчивость.

Строго не показано, но физически ясно, что поверхность $\beta^2 = \beta^2(\text{Pr}, \text{Ta})$ в пространстве $(\text{Pr}, \text{Ta}, \beta^2)$, определяемая системой (2.7), при значениях числа Тэйлора

$$G(\text{Pr}) < \text{Ta} \leq \frac{27\pi^4(1+\text{Pr})^4(1-\text{Pr})^2}{(2-3\text{Pr}^2)^3}$$

находится ниже поверхности, определяемой условием $\text{Ra}_{cm} = \text{Ra}_{om}$. Поэтому при $\text{Ta} > G(\text{Pr})$ всегда существует такое значение параметра β^2 , начиная с которого на пределе устойчивости возникают колебательные движения жидкости.

Точками 1 и 2 на фиг. 5 отмечены значения параметров $\text{Pr} = 0,025$; $\text{Ta} = 400$ и $\text{Pr} = 0,025$; $\text{Ta} = 1000$, которым соответствуют кривые 2, 4 и 1, 4 на фиг. 3 и 4.

3. Колебания малой амплитуды. Влияние колебаний малой амплитуды, но произвольной частоты можно исследовать, используя метод асимптотических разложений. Для этого исключим из системы (1.4) u и v и получим уравнение третьего порядка для ϑ

$$\begin{aligned} \text{Pr} \vartheta''' + K \vartheta'' + (N - R) \vartheta' + (M - R) \vartheta = & \eta R [\vartheta' \sin \omega \tau + \\ & + \vartheta (\sin \omega \tau + \omega \cos \omega \tau)] = \eta R f(\omega \tau, \vartheta, \vartheta') \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку во вращающемся слое при отсутствии модуляции возможна критическая конвекция двух типов: стационарная и колебательная,

при разложении решения в ряд по амплитуде следует учесть возможность изменения при модуляции фазы колебаний ψ [6]. Будем искать решение задачи в виде

$$\begin{aligned}\theta(\psi, \omega\tau) &= \theta_0(\psi) + \eta\theta_1(\psi, \omega\tau) + \eta^2\theta_2(\psi, \omega\tau) + \dots \\ R &= R_0 + \eta R_1 + \eta^2 R_2 + \dots \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \sigma_0 + \eta\sigma_1 + \eta^2\sigma_2 + \dots\end{aligned}\quad (3.2)$$

С помощью (3.2) найдем разложение по η производных $d^k\theta/d\tau^k$ ($k=1, 2, 3$), представим в виде ряда по η правую часть (3.1)

$$\begin{aligned}\eta Rf(\omega\tau, \theta, \psi') &= \eta R_0 f(\omega\tau, \theta_0, \psi'_0) + \eta^2 [f'_0(\omega\tau, \theta_0, \psi'_0)\theta_1 R_0 + \\ &+ f'_{\theta'}(\omega\tau, \theta_0, \psi'_0)\left(\sigma_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial \psi} + D\theta_1\right)R_0 + R_1 f(\omega\tau, \theta_0, \psi'_0)] \\ D &= \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \tau}\end{aligned}\quad (3.3)$$

и подставим полученные результаты в (3.1). Приравнивая члены при одинаковых степенях η , получим уравнения для последовательных приближений. В частности, для нулевого приближения найдем

$$\left[\text{Pr} \sigma_0^3 \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} + K \sigma_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + (N - R_0) \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \psi} + M - R_0 \right] \theta_0 = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) имеет два известных решения [7], соответствующих наступлению на пределе устойчивости стационарной (индекс c) и колебательной (o) неустойчивости

$$\theta_0^c = \lambda = \text{const}, \quad \sigma_0 = 0, \quad R_0^c = T + 1$$

$$\theta_0^o = \lambda \cos \psi \equiv \lambda \cos (\sigma_0 \tau + \varphi), \quad \sigma_0^2 = (M - R_0^o)/K = (N - R_0^o)/\text{Pr}$$

$$R_0^o = 2(\text{Pr} + 1) \left[1 + \frac{\text{Pr}^2}{(1 + \text{Pr})^2} T \right], \quad \text{Pr} < 1, \quad T > T^*$$

Далее удобно рассмотреть отдельно случаи стационарной и колебательной конвекции, что позволяет опустить индексы c и o , не рискуя внести путаницу. Уравнения (3.1) и (3.3) для первого и второго приближений в случае стационарной конвекции существенно упрощаются

$$L_0 \theta_1 = (R_1 + R_0 \sin \omega\tau + R_0 \omega \cos \omega\tau) \lambda \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}L_0 \theta_2 &= (R_1 + R_0 \sin \omega\tau) \theta_1' + (R_2 + R_1 \sin \omega\tau + R_1 \omega \cos \omega\tau) \lambda + \\ &+ (R_1 + R_0 \sin \omega\tau + R_0 \omega \cos \omega\tau) \theta_1\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$L_0 = \text{Pr} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + K \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (N - R_0) \frac{\partial}{\partial \tau} + M - R_0$$

Условие разрешимости (3.5) требует, чтобы правая часть не содержала периодических членов, частота которых совпадает с характеристической частотой однородного уравнения, т. е. постоянных, а отсюда следует, что $R_1 = 0$. Решение (3.5) имеет вид

$$\theta_1 = C_1 \cos \omega\tau + C_2 \sin \omega\tau \quad (3.7)$$

$$C_1 = -R_0 \lambda \frac{\omega^2(\text{Pr} + 1) - (1 - \text{Pr})(T - T^*)}{\omega V^2(\omega)}, \quad C_2 = -R_0 \lambda \frac{(\omega^2 + 1)\text{Pr} + (1 - \text{Pr})T}{V^2(\omega)}$$

$$V^2(\omega) = (2\text{Pr} + 1)^2 \omega^2 + (1 + \text{Pr} + \text{Pr} T - T - \text{Pr} \omega^2)^2$$

Уравнение для второго приближения с учетом первого записывается

$$L_0 \vartheta_2 = R_0 \left[\left(\frac{2C_2 \omega + C_1}{2} \sin 2\omega \tau + \frac{C_1 \omega - C_2}{2} \cos 2\omega \tau \right) + \frac{C_2}{2} \right] + R_2 \quad (3.8)$$

Из условия разрешимости (3.8) следует, что $R_2 = -C_2 R_0 / 2\lambda$.

Таким образом, получаем следующее выражение для поправки к критическому значению числа Рэлея:

$$R_2 = \frac{(\omega^2 + 1) Pr + (1 - Pr) T}{2V^2(\omega)} \quad R_0^2 = \Lambda R_0^2 \quad (3.9)$$

В случае высоких частот получаем асимптотическую формулу

$$R^c = R_0 [1 + \eta^2 R_0 / 2 Pr \omega^2 + \dots]$$

совпадающую с точностью до членов порядка η^2 / ω^2 с полученным в предыдущем параграфе значением (2.3) для R_c . Критическое число Рэлея, определяющее границу монотонной неустойчивости во вращающемся плоском слое, не зависит от числа Прандтля. То же самое справедливо для случая высокочастотной модуляции поля силы; при произвольной частоте модуляции, как следует из (3.9), это не верно.

На фиг. 6 представлены зависимости Λ от ω^2 при различных значениях чисел Тэйлора и Прандтля. Штриховые кривые соответствуют $Pr = 7$ и $T = 0,3$ и 5, штрихпунктирные — $Pr = 2$ и $T = 0$ и 3, сплошная — $Pr = 1$ и произвольным числам Тэйлора. Из (3.9) и фиг. 6 ясно, что макси-

мальная стабилизация в жидкостях с $Pr \leq 1$ и в невращающихся жидкостях ($T = 0$) при произвольных числах Pr достигается при малых частотах. Однако следует иметь в виду, что при $\omega^2 = 0$ разложение по малым амплитудам перестает быть справедливым (см. (3.7)). При $Pr > 1$, в интервале частот $0 < \omega^2 < [(Pr - 1)T - Pr]/Pr$ наблюдается дестабилизация слоя; для существования этого интервала необходимо, чтобы $T > > Pr/(Pr - 1)$. Максимальная стабилизация достигается при некотором конечном значении частоты модуляции ω_m , являющемся корнем уравнения

$$\begin{aligned} & Pr^3 \omega^4 + 2 Pr^2 [Pr + (1 - Pr) T] \omega^2 - \\ & - (Pr - 1) (6 Pr^2 + 4 Pr + 1) T + \\ & + (Pr - 1)^2 Pr T^2 + Pr^3 = 0 \end{aligned}$$

Значение ω_m растет с увеличением чисел Тэйлора и Прандтля. Однако максимальная степень стабилизации, измеряемая параметром Λ при $\omega = \omega_m$, с ростом чисел Прандтля и Тэйлора падает (фиг. 6).

Для нахождения предела колебательной неустойчивости обратимся

снова к уравнениям для первого и второго приближений

$$L\dot{\vartheta}_1 = \lambda \{R_0 f_0(\omega \tau, \vartheta_0, \vartheta'_0) + Q_1(\sigma_1, R_1) \sin \psi + Q_2(\sigma_1, R_1) \cos \psi\} \quad (3.10)$$

$$L\dot{\vartheta}_2 = \lambda \{f_1(\omega \tau, \vartheta_0, \vartheta'_0) + Q_1(\sigma_2, R_2) \sin \psi + Q_2(\sigma_2, R_2) \cos \psi\} \quad (3.11)$$

$$L = \Pr D^3 + K D^2 + (N - R_0) D + M - R_0$$

$$Q_1(\sigma_i, R_i) = (N - R_0 - 3 \Pr \sigma_0^2) \sigma_i - \sigma_0 R_i$$

$$Q_2(\sigma_i, R_i) = 2K\sigma_0\sigma_i + R_i \quad (i=1, 2)$$

$$f_0 = -\sigma_0 \sin \omega \tau \sin \psi + \cos \psi (\sin \omega \tau + \omega \cos \omega \tau)$$

$$\begin{aligned} f_1 = & [(\sin \omega \tau + \omega \cos \omega \tau) \vartheta_1 + \sin \omega \tau (D\vartheta_1 - \lambda \sigma_1 \sin \psi)] R_0 - \\ & - 3 \Pr \sigma_1 \left(\lambda \sigma_0 \sigma_1 \sin \psi + \frac{\partial}{\partial \psi} D^2 \vartheta_1 \right) + \\ & + K \sigma_1 \left(\lambda \sigma_1 \cos \psi - 2 \frac{\partial}{\partial \psi} D \vartheta_1 \right) - (N - R_0) \sigma_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \psi} + \\ & + R_1 (f_0 + \vartheta_1 + D\vartheta_1 - \lambda \sigma_1 \sin \psi) \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (3.10) в виде двойного ряда Фурье. При этом разложим функцию f_0 также в двойной ряд Фурье

$$\vartheta_1(\psi, \omega \tau) = \sum_{nm} f_{nm} e^{i(n\omega \tau + m\psi)} \quad (3.12)$$

$$f_0 = \sum_{nm} f_{nm}^\circ e^{i(n\omega \tau + m\psi)} \quad (3.13)$$

$$f_{nm}^\circ = \frac{1}{4\pi^2} \iint_0^{2\pi} f_0(\lambda \cos \psi, -\lambda \sigma_0 \sin \psi) e^{-i(n\omega \tau + m\psi)} d\psi d(\omega \tau)$$

Применяя оператор L к ϑ_1 , получим

$$L\vartheta_1 = \sum_{nm} \Delta_{nm} f_{nm} e^{i(n\omega \tau + m\psi)}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm} = & -i \Pr (\sigma_0 m + n\omega)^3 - K(\sigma_0 m + n\omega)^2 + i(N - R_0)(\sigma_0 m + n\omega) + M - R_0 = \\ & = [\sigma_0^2 - (\sigma_0 m + n\omega)^2] [K + i \Pr (\sigma_0 m + n\omega)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.10) с учетом (3.13) и (3.14) следует

$$\begin{aligned} \sum_{nm} \Delta_{nm} f_{nm} e^{i(n\omega \tau + m\psi)} = & R_0 \sum_{nm} f_{nm}^\circ e^{i(n\omega \tau + m\psi)} + \\ & + Q_1(\sigma_1, R_1) \sin \psi + Q_2(\sigma_1, R_1) \cos \psi \end{aligned} \quad (3.15)$$

Чтобы ϑ_1 не содержало резонансных членов, необходимо

$$Q_1(\sigma_1, R_1) \sin \psi + Q_2(\sigma_1, R_1) \cos \psi = -R_0 \sum_{nm} f_{nm}^\circ e^{i(n\omega \tau + m\psi)}$$

откуда находим

$$Q_1(\sigma_1, R_1) = -\frac{R_0}{2\pi^2} \iint_0^{2\pi} f_0 \sin \psi d(\omega \tau) d\psi \quad (3.16)$$

$$Q_2(\sigma_1, R_1) = -\frac{R_0}{2\pi^2} \iint_0^{2\pi} f_0 \cos \psi d(\omega \tau) d\psi$$

Подстановка f_0 в (3.16) показывает, что $Q_1(\sigma_1, R_1) = Q_2(\sigma_1, R_1) = 0$ и, следовательно, $R_1 = \sigma_1 = 0$, т. е. первые поправки к критическому числу Рэлея и собственной частоте колебаний равны нулю. Приравнивание в (3.15) членов при одинаковых гармониках позволяет найти коэффициенты разложения (3.12)

$$f_{nm} = R_0 f_{nm}^0 / \Delta_{nm} \quad (\Delta_{nm} \neq 0) \quad (3.17)$$

Как следует из (3.13), только четыре члена ряда для f_0 отличны от нуля и равны

$$f_{\pm 1, \pm 1}^0 = \bar{f}_{\mp 1, \mp 1}^0 = \frac{1}{4} (\omega \pm \sigma_0 \mp i) \quad (3.18)$$

Используя (3.17) и (3.18), найдем решение уравнения (3.10)

$$\dot{\theta}_1 = - \frac{R_0 \omega}{s_1 s_2} [X_1 \cos \omega \tau \cos \psi + X_2 \sin \omega \tau \sin \psi +$$

$$+ X_3 \sin \omega \tau \cos \psi + X_4 \cos \omega \tau \sin \psi] \quad (3.19)$$

$$X_1 = (\Pr + 1) [K^2 (\omega^2 - 2\sigma_0^2) + \Pr^2 (\omega^2 - \sigma_0^2) (\omega^2 + 2\sigma_0^2)]$$

$$X_2 = (\Pr + 1) [K^2 + 3 \Pr^2 (\omega^2 - \sigma_0^2)] \omega \sigma_0 = \sigma_0 X_5$$

$$X_3 = [K^3 + \Pr^3 (\sigma_0^2 - \omega^2)^2 + (3 \Pr + 1) K \Pr \omega^2 - (\Pr + 3) K \Pr \sigma_0^2] \omega$$

$$X_4 = -2\sigma_0 [K^3 + \Pr^3 (\sigma_0^2 - \omega^2)^2 + K^2 \Pr \sigma_0^2 + K \Pr^2 (\sigma_0^2 + 2\omega^2)]$$

$$s_{1,2} = \omega (\omega \pm 2\sigma_0) [K^2 + \Pr^2 (\sigma_0^2 \pm \omega^2)]$$

Из условия отсутствия резонансных членов во втором приближении (3.11) находим

$$Q_1(\sigma_2, R_2) = - \frac{1}{2\pi^2} \iint_0^{2\pi} f_1 \sin \psi d(\omega \tau) d\psi$$

$$Q_2(\sigma_2, R_2) = - \frac{1}{2\pi^2} \iint_0^{2\pi} f_1 \cos \psi d(\omega \tau) d\psi$$

Используем решение в первом приближении (3.19) для нахождения вида функции f_1 и вычисления $Q_1(\sigma_2, R_2)$ и $Q_2(\sigma_2, R_2)$

$$Q_1(\sigma_2, R_2) = \frac{R_0^2 \omega}{s_1 s_2} (X_2 - \sigma_0 X_5); \quad Q_2(\sigma_2, R_2) = \frac{R_0^2 \omega}{s_1 s_2} (X_2 \sigma_0 + X_3)$$

и найдем выражения для первых поправок к критическому числу Рэлея и собственной частоте колебаний

$$R_2 = R_0^2 \Lambda = \frac{R_0^2 \omega}{2s_1 s_2} \frac{[2T^* - (3\Pr + 2)T]X_5 \sigma_0^2 + (2T^* + \Pr T)X_3}{2T^* + \Pr T}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_0^2 \omega}{2s_1 s_2} \frac{TX_2}{2T^* + \Pr T}$$

Для случая высоких частот получаются следующие асимптотические представления:

$$R_2 = \frac{R_0^2}{2 \Pr \omega^2}; \quad \sigma_2 = \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{\Pr^2 \omega^4} \frac{\sigma_0 (\Pr + 1) T}{2T^* + \Pr T}$$

согласующиеся с результатами предыдущего параграфа.

При $\Pr \rightarrow 0$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$R_2 = R_0^2 \Lambda (\Pr = 0) = \frac{R_0^2 [1 - (T-1)^2]}{2[\omega^2 - 4(T-1)]}; \quad \sigma_2 = \frac{R_0^2 T \sigma_0}{4[\omega^2 - 4(T-1)]} \quad (3.20)$$

Из (3.20) следует, что Λ меняет знак при $T=2$ и $\omega=2\sigma_0=2\sqrt{T-1}$, т. е. стабилизация колебательной конвекции в жидкостях с очень малым Pr имеет место в двух областях плоскости (T, ω^2)

$$1 < T < 2; \quad \omega^2 > 4\sigma_0^2 = 4(T-1) \quad \text{и} \quad T > 2, \quad \omega^2 < 4\sigma_0^2$$

Значения параметров, лежащие в остальной части плоскости (T, ω^2) , соответствуют дестабилизации слоя за счет модуляции силы тяжести.

Найденные критические числа Рэлея Ra^c и Ra^o и частота нейтральных колебаний — функции волнового числа k . Критические волновые числа k_0^i ($i=c, o$), при которых числа Рэлея достигают минимума в отсутствие модуляции, известны (см., например, [7]). Однако модуляция силы тяжести может изменить значение критического волнового числа k^i . В самом деле, представим k^i в виде ряда по η и найдем его из условия $\partial \text{Ra}^i / \partial k = 0$

$$k^i = k_0^i + \eta k_1^i + \eta^2 k_2^i + \dots, \quad k_1^i = 0$$

$$k_2^i = - \left(\frac{\partial \text{Ra}_2^i}{\partial k} \right)_{k_0^i} / \left(\frac{\partial^2 \text{Ra}_0^i}{\partial k^2} \right)_{k_0^i} \quad (3.21)$$

Оценим влияние изменения волнового числа на минимальное значение критического числа Рэлея и частоту нейтральных колебаний

$$\begin{aligned} \text{Ra}_m^i &= \text{Ra}_0^i(k_0^i) + \eta \left(\frac{\partial \text{Ra}_0^i}{\partial k} \right)_{k_0^i} k_1^i + \\ &+ \eta^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \text{Ra}_0^i}{\partial k^2} \right) k_1^2 + \left(\frac{\partial \text{Ra}_0^i}{\partial k} \right) k_2^i + \text{Ra}_2^i \right]_{k_0^i} + \dots = \\ &= \text{Ra}_0^i(k_0^i) + \eta^2 \text{Ra}_2^i(k_0^i) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что изменение критического волнового числа за счет модуляции не влияет с точностью до членов $O(\eta^2)$ на значение минимальных критических чисел Ra_m^i . Однако частота нейтральных колебаний меняется

$$\sigma^*(k^i) = \sigma_0^*(k_0^i) + \eta^2 [(\partial \sigma_0^* / \partial k) k_2^i + \sigma_2^*] + \dots \quad (3.22)$$

Здесь $\sigma^* = (k^2 + \pi^2)\sigma$. Поскольку $(\partial^2 \text{Ra}_0^i / \partial k^2)_{k_0^i} > 0$, увеличение (уменьшение) длины волны критических возмущений соответствует положительным (отрицательным) значениям производной $(\partial \text{Ra}_2^i / \partial k)_{k_0^i}$, знак и величина которой определяются значениями параметров Pr , T и ω .

Таким образом, модуляция силы тяжести произвольной частоты и малой амплитуды может приводить в зависимости от значений чисел Тэйлора, Прандтля и частоты модуляции как к стабилизации, так и дестабилизации слоя относительно стационарных и колебательных возмущений и изменению критического волнового числа и частоты нейтральных колебаний, которые рассчитываются по формулам (3.21) и (3.22). Заметим, что все проведенное выше рассмотрение справедливо в общем нерезонансном случае, когда частота модуляции и частота нейтральных колебаний не находятся в резонансе.

ЛИТЕРАТУРА

- Гершунин Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. — ПММ, 1963, 27, № 5. с. 779—783.
- Гершунин Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. — ПММ, 1970, 34, № 3, с. 470—480.

3. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О численном определении границ конвективной неустойчивости в системе с периодически применяемым параметром.— В кн.: Гидродинамика. Вып. 3. Пермь, 1971, с. 29—37 (Уч. зап. Пермск. ун-та, № 248).
4. Rauscher J. W., Kelly R. E. Effect of modulation on the onset of thermal convection in a rotating fluid.— Int. J. Heat and Mass. Transfer, 1975, v. 18, № 10, p. 1216—1217.
5. Landau L. D., Lifshits E. M. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
7. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
8. Venzian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection.— J. Fluid Mech., 1969, v. 35, № 2, p. 243—254.

Москва

Поступила в редакцию
1.IX.1983