

УДК 533.6.011

СИЛЬНАЯ ПЕРЕКОНДЕНСАЦИЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА МЕЖДУ КРУГОВЫМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

АБРАМОВ А. А.

На основе численного решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования Монте-Карло рассмотрен процесс переноса вещества между двумя коаксиальными круговыми цилиндрическими поверхностями, поддерживаемыми при различных температурах. Проведено исследование характеристик течения от определяющих параметров.

1. Задача о перекоонденсации материала между двумя бесконечными параллельными пластинами решалась численно как для модельных кинетических уравнений [1, 2], так и для уравнения Больцмана [3, 4]. Рассмотрим аналогичную задачу о перекоонденсации между двумя коаксиальными круговыми цилиндрическими поверхностями.

Необходимо решить стационарное уравнение Больцмана (1.1) с граничными условиями (1.2) на коаксиальных цилиндрических испаряющихся поверхностях с радиусами R_1 и R_2

$$v \frac{df}{dR} = \int (f' f'_i - f f_i) g b db d\varepsilon dv_i, \quad g = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}| \quad (1.1)$$

$$f(v_R > 0, R = R_1) = (a_1 n_{ev1} + n_{r1}) (h_1 / \pi)^{3/2} \exp(-h_1 v^2) \quad (1.2)$$

$$f(v_R < 0, R = R_2) = (a_2 n_{ev2} + n_{r2}) (h_2 / \pi)^{3/2} \exp(-h_2 v^2)$$

$$h_i = m/2kT_i, \quad P_{ev} = n_{ev} kT = A \exp(-q/kT)$$

Здесь приняты следующие обозначения: f — функция распределения молекул; \mathbf{v} — скорость молекулы; b — прицельное расстояние; ε — азимутальный угол; a_i — коэффициент испарения; T_i , n_{ev} и n_{ri} — температура, плотность насыщенного пара и плотность отраженных молекул i -й поверхности; $i=1, 2$ соответственно для внутреннего и внешнего цилиндров; q — теплота перехода.

Параметры n_{ev} , T_i , a_i считаются заданными. При постановке предполагается, что давление насыщенного пара меняется с температурой по экспоненциальному закону [5].

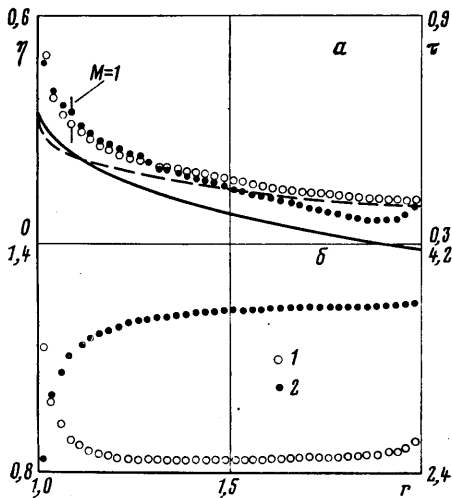
2. Задача (1.1) — (1.2) решалась численно методом прямого моделирования Монте-Карло для модели молекул газа — «твердых шаров». Пространство между коаксиальными цилиндрическими поверхностями разбивалось на m_p цилиндрических ячеек шириной $H = L/m_p$, где $L = R_2 - R_1$.

Процесс моделирования состоит из двух этапов — свободного перелета молекул в течение контрольного времени Δt_k и их последующего столкновения в ячейках. Столкновения молекул в ячейках осуществлялись по схеме, предложенной в работе [6]. Скорости молекул после столкновения определялись по формулам

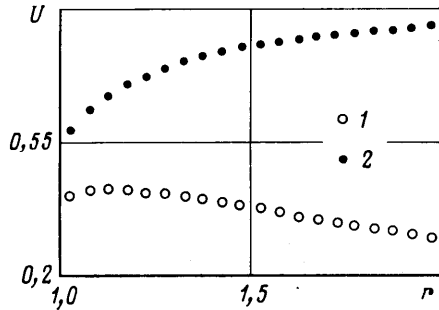
$$\mathbf{v}' = 0,5(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + g\mathbf{n}), \quad \mathbf{v}'_i = 0,5(\mathbf{v} + \mathbf{v}_i - g\mathbf{n})$$

где \mathbf{n} — случайный вектор, равномерно распределенный по поверхности единичной формы.

Для вычисления макроскопических характеристик применялась методика, использованная в [7], согласно которой определение макровеличин проводится усреднением по времени соответствующих микроскопических характеристик молекул вдоль их траекторий, пересекающих данную ячей-



Фиг. 1



Фиг. 2

ку. Например, средняя радиальная скорость молекул u_{Rj} в ячейке с номером j вычисляется по формуле

$$u_{Rj} = \frac{\sum_{l=1}^N \int_0^{t_L} v_R^{(l)}(t) \Phi_j^{(l)}(t) dt}{\sum_{l=1}^N \int_0^{t_L} \Phi_j^{(l)}(t) dt} \quad (2.1)$$

где $t_L = L \Delta t_k$ — суммарное время наблюдения системы; N — суммарное количество молекул; $\Phi_j^{(l)}(t) = 1$, тогда l -я молекула при своем движении находится в j -й ячейке, и $\Phi_j^{(l)}(t) = 0$ в противном случае. Ранее [6, 8] при использовании метода прямого статистического моделирования Монте-Карло для определения макровеличин в ячейках вычислялись суммы соответствующих микроскопических характеристик молекул после проведения процессов перелета и столкновений. Например, радиальная скорость вычислялась по формуле

$$u_{Rj} = \frac{\sum_{s=1}^L \sum_{l(s)}^{(j)} v_R^{(l)}(t_s)}{\sum_{s=1}^L \sum_{l(s)}^{(j)} 1} \quad (2.2)$$

Здесь сумма $\sum_{l(s)}^{(j)}$ означает суммирование по всем молекулам, находя-

щимся в ячейке с номером j в момент времени $t_s = s \Delta t_k$, $s = 1, 2, \dots, L$, l — номер молекулы.

Использование формулы (2.2) приводит к тому, что в процессе вычисления в статистических суммах нет слагаемых, соответствующих молекулам, которые в течение времени Δt_k пролетают рассматриваемую ячейку. В (2.2) также не учитывается, что молекула, выбывающая из ячейки, некоторое время находится в ней. От этих недостатков свободно соотношения (2.1). Можно сказать, что использование усреднения (2.1) соответствует более полному макроскопическому описанию динамической системы, чем использование соотношений (2.2). Использование соотношений (2.1)

в работе [7] показало, что законы сохранения макроскопических величин выполняются существенно точнее, уменьшается статистический разброс при вычислении плотности, скорости и температуры газа в ячейках.

3. Задача (1.1) – (1.2) решалась численно при $a_1 = a_2 = 1$.

На фиг. 1 представлены результаты расчета профилей плотности (точки 1) и температуры (точки 2) для двух случаев: а) перекоонденсации материала с внутреннего цилиндра на внешний при $\beta = 2,0$, $r_1 = 1,0$, $\text{Kn} = 0,009$, $T_1/T_2 = 4,0$; б) перекоонденсации с внешнего цилиндра на внутренний при $\text{Kn} = 0,043$, $T_1/T_2 = 0,25$ и тех же значениях β , r_1 . Безразмерные параметры определяются соотношениями

$$\beta = q(kT_1)^{-1}, \quad r = RL^{-1}, \quad \text{Kn} = 2(\sqrt{\pi} n_{ev1} \sigma L)^{-1}, \quad \sigma = \pi d^2$$

$$\eta = n n_{ev1}^{-1}, \quad U = u_R (2kT_1/m)^{-1/2}, \quad \tau = T \cdot T_1^{-1}$$

где d – диаметр молекулы; η , U , τ – безразмерные значения плотности, скорости и температуры.

Течение для первого случая за линией $M = 1$, указанной на фиг. 1, является сверхзвуковым (M – число Маха). Сплошной и штриховой линиями приведены результаты расчета профилей температуры и плотности газа, полученные на основе решения уравнений Эйлера с граничным условием скольжения нулевого порядка, взятыми из [9]. Этот режим соответствует течению, когда внешний цилиндр не испаряет и полностью поглощает попавшие на него молекулы. Оно является предельным, за исключением тонких кнудсеновских слоев, для данной задачи при $\beta \rightarrow \infty$, $\text{Kn} \rightarrow 0$.

Из приведенных данных видно, что результаты, полученные для рассчитанной ситуации и предельной, находятся в хорошем соответствии друг с другом. Отметим, что степень разреженности газа более точно характеризует не введенное выше число Kn , а число $\text{Kn}_* = 2(\sqrt{\pi} n_* \sigma L)^{-1}$, где n_* – средняя плотность газа в течении. Результаты на фиг. 1 соответствуют величине $\text{Kn}_* = 0,05$. Поскольку величина n_* меняется при изменении других параметров задачи, результаты удобнее сравнивать, используя величину числа Kn .

На фиг. 2 представлены результаты расчета профиля безразмерной скорости U в двух случаях: точки 1 соответствуют $\text{Kn} = 0,5$, $\beta = 2,0$, $r_1 = 1,0$, $T_2/T_1 = 0,5$; точки 2 – $T_2/T_1 = 0,25$, остальные параметры те же, что и в первом случае. Увеличение температуры T_2 приводит к увеличению числа молекул, испаренных внешней цилиндрической поверхностью. Вследствие этого течение ускорения (точки 2) сменяется течением торможения, причем скорость на начальном участке течения увеличивается и лишь потом газ тормозится.

Наибольший интерес с практической точки зрения представляют величины потоков массы и энергии между поверхностями

$$M_R = (n u_R)_1 / n_{ev1} (2kT_1/m)^{1/2} \quad \text{и} \quad Q_R = E_1 / n_{ev1} kT_1 (2kT_1/m)^{1/2}$$

где $(n u_R)_1$ и E_1 – потоки массы и энергии на единицу поверхности внутреннего цилиндра.

Ниже приведены значения безразмерных потоков массы M_R и энергии Q_R для параметров $\beta = 2,0$, $r_1 = 1,0$ в зависимости от числа Кнудсена Kn , а также в зависимости от отношения температур T_1/T_2 при $\text{Kn} = 0,5$:

Kn	$T_1/T_2 = 4,0$					
	∞	20	1,0	0,5	0,019	0,009
M_R	0,281	0,280	0,278	0,278	0,251	0,247
Q_R	0,564	0,558	0,556	0,556	0,524	0,520
Kn	$T_1/T_2 = 0,25$					
	∞	20	1,0	0,5	0,088	0,043
M_R	-0,350	-0,358	-0,441	-0,488	-0,563	-0,572
Q_R	-4,493	-4,498	-4,764	-4,946	-5,257	-5,320

Kn = 0,5

T_2/T_1	0,25	0,50	0,75	2,0	3,0	4,0
M_R	0,276	0,239	0,134	-0,345	-0,454	-0,488
Q_R	0,553	0,515	0,328	-1,771	-3,460	-4,946

Знак ∞ соответствует предельному переходу $Kn \rightarrow \infty$, т. е. свободномолекулярному режиму течения газа. Значения результатов численного расчета при $Kn=20$ хорошо согласуются со свободномолекулярными значениями.

Влияние величины β на M_R и Q_R при $r_1=1,0$, $Kn=0,5$ и двух значениях отношений температур представлены ниже:

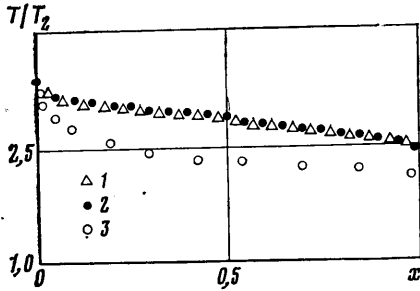
β	0,5	1,0	2,0	4,0
$T_1/T_2 = 4,0$				
M_R	0,206	0,262	0,276	0,276
Q_R	0,490	0,544	0,553	0,553
$T_1/T_2 = 0,25$				
M_R	0,033	-0,080	-0,488	-3,214
Q_R	-0,937	-1,744	-4,946	-29,328

Исследование влияния величины β на режим течения обнаруживает интересную особенность. С уменьшением величины β при $T_2/T_1=4,0$ величина скорости меняет знак, т. е. газ начинает течь в сторону более нагретого цилиндра. Этот эффект имеет следующее объяснение. Для $Kn \geq 0(1)$ можно записать

$$M_R = M_\infty \left[1 + O \left(\frac{1}{Kn} \right) \right],$$

$$M_\infty = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{J_{ev2}}{J_{ev1}} \right)$$

$$J_{evi} = a_i n_{evi} \left(\frac{kT_i}{2m\pi} \right)^{1/2}$$



Фиг. 3

где M_∞ — величина безразмерного расхода на единицу поверхности внутреннего цилиндра в свободномолекулярном режиме; J_{evi} — количество молекул, испаряемых в единицу времени с единицы площади i -й поверхности. При $a_1=a_2=1$ с учетом того, что давление насыщенного пара меняется по экспоненциальному закону, получим соотношение

$$J_{ev1}/J_{ev2} = (T_2/T_1)^{1/2} \exp\{-\beta(1-T_1/T_2)\}$$

Отсюда вытекает, что при малых значениях параметра β в случае $T_2 > T_1$ может быть $J_{ev2} < J_{ev1}$. Поэтому величина M_∞ при уменьшении β меняет знак, т. е. газ начинает двигаться в сторону более нагретого цилиндра.

При уменьшении числа Kn направление течения газа начинает определяться величиной P_{ev1}/P_{ev2} и данный эффект исчезает.

Ниже представлены результаты расчетов тех же величин в зависимости от радиуса внутреннего цилиндра при $\beta=2,0$, $Kn=0,5$:

r_1	0,25	1,0	2,0	4,0	10,0	100,0	1000,0
$T_1/T_2 = 4,0$							
M_R	0,279	0,276	0,272	0,267	0,261	0,254	0,254
Q_R	0,557	0,553	0,550	0,545	0,537	0,528	0,528

$$T_1/T_2 = 0,25$$

M_R	-0,470	-0,488	-0,463	-0,440	-0,420	-0,402	-0,402
Q_R	-5,044	-4,946	-4,613	-4,324	-4,077	-3,889	-3,871

Отметим немонотонное изменение M_R в зависимости от r_1 в случае перекоонденсации с внешнего цилиндра на внутренний. Возникающая немонотонность обусловлена наличием столкновений молекул в газе, так как в свободномолекулярном режиме величина M_R не зависит от r_1 .

При стремлении $r_1 \rightarrow \infty$ осуществляется выход на плоскую перекоонденсацию. Интересно сравнить полученные при этом предельном переходе результаты с уже имеющимися по плоской перекоонденсации [3, 4]. На фиг. 3 в координатах $x=r-r_1$ представлены результаты расчета профиля температуры между пластинами (точки 1) при $r_1=10^3$ в предположении, что вторая пластина с температурой T_2 полностью поглощает молекулы, падающие на нее, и не испаряет ($\beta \rightarrow \infty$). Температура, как и в [3, 4], отнесена к T_2 ; величина $T_1/T_2=4,0$; число Кнудсена $Kn \approx 0,2$ соответствует числу Кнудсена в [3, 4]. Точками 2 представлены результаты работы [3], точками 3 — [4]. Отметим, что в работе [3] на всех рисунках приведены неправильные масштабы по оси абсцисс. На фиг. 3 приводятся результаты (точки 3), полученные после корректировки данных работы [3] ее автором. Между результатами настоящей работы и работы [3], как это видно на фиг. 3, имеет место хорошее согласие. Результаты работы [4], данные сплошными кружками, неправильны. Достаточно отметить, что в рассматриваемом случае температура газа посередине между пластинами меньше $0,64T_1$ — предельной температуры, которая реализуется в случае $Kn \rightarrow 0$, чего не может быть.

Все расчеты, проведенные в данной работе, осуществлялись при числе полос m_p , меняющемся в зависимости от числа Kn в пределах 20—80. Среднее число молекул в ячейке $S=N/m_p=10$, где N — суммарное количество моделирующих течение молекул.

Автор выражает благодарность В. С. Галкину, М. Н. Когану, Н. К. Макашеву за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макашев Н. К. Сильная перекоонденсация в одно- и двухкомпонентном разреженном газе при произвольном значении числа Кнудсена. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 5, с. 130—138.
2. Бишаев А. М., Рыков В. А. Перекоонденсация одноатомного газа при малых числах Кнудсена. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 3, с. 709—717.
3. Черемисин Ф. Г. Движение разреженного газа между бесконечными плоскопараллельными эмитирующей и поглощающей поверхностями. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 176—178.
4. Yen S. M. Solutions of the kinetic equations for the nonequilibrium gas flow between emitting and absorbing surfaces. — Rarefied Gas Dynamics. Ed. Becker M., Fiebig M. DEVL-Ress, Pocz-Wahn, Germany, 1974, v. 1, p. A15/1—A15/10.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
6. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, ч. 1, т. 15, № 5, с. 1195—1209, ч. 2, т. 15, № 6, с. 1553—1567.
7. Абрамов А. А. О вычислениях макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло. — Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 315—318.
8. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
9. Абрамов А. А. Решение задачи о сильном испарении одноатомного газа методом Монте-Карло. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 1, с. 185—188.

Москва

Поступила в редакцию
1.VII.1983