

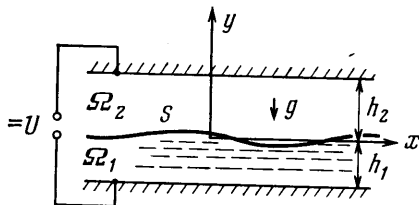
УДК 532.592.013.4:538.3/4

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ
ЖИДКОСТИ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, ВЕТВЛЕНИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ
РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

ЖАКИН А. И.

Плоские нелинейные волны в мелкой воде описываются уравнением Кортевега – де Вриза (КДВ) [1–3]. В данной работе проводятся теоретические исследования по изучению нелинейных волн и нелинейных равновесных форм на поверхности заряженной жидкости. Рассматривается влияние поля на скорость движения и форму гидродинамического солитона. Исследуется ветвление равновесных форм. Решаются в нелинейной постановке задачи о равновесных формах заряженной жидкости и динамике нелинейных уединенных форм (лунок, канавок) на поверхности.

1. Постановка задачи. Пусть горизонтальный слой жидкости толщиной h_1 помещен между плоскопараллельными пластинами (электродами) так, что расстояние между свободной поверхностью в плоском состоянии и верхним электродом равно h_2 (фиг. 1). Предполагаем жидкость несжимае-



Фиг. 1

мой, невязкой, идеально проводящей, движение жидкости – потенциальным. В этом случае движение жидкости в безразмерных переменных описывается решением задачи

$$\varphi_{yy} + \mu^2 \Delta_1 \varphi = 0 \quad (\Omega_2), \quad \psi_{yy} + \mu^2 \Delta_1 \psi = 0 \quad (\Omega_1) \quad (1.1)$$

$$y = \varepsilon f: \varphi = 1 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon f_x = \mu^{-2} \psi_y - \varepsilon \nabla_1 \psi \nabla_1 f \quad (1.3)$$

$$\psi_x + \frac{1}{2\mu^2} (\psi_y^2 + \mu^2 |\nabla_1 \psi|^2) + \varepsilon f - \frac{1}{2} \beta h^2 (\varphi_y^2 + \mu^2 |\nabla_1 \varphi|^2) - \varepsilon \mu^2 \operatorname{div}_1 [(1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 f|^2)^{-1/2} \nabla_1 f] = C(t) \quad (1.4)$$

$$y = -1: \psi_y = 0; \quad y = h: \varphi = 0 \quad (1.5)$$

$$\beta = \frac{U^2}{4\pi\rho h_2^2 u_0^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\rho h_1 u_0^2}, \quad u_0^2 = gh_1,$$

$$\varepsilon = a/h_1, \quad \mu = h_1/\lambda, \quad h = h_2/h_1$$

Здесь индекс 1 в дифференциальных операторах указывает на то, что они берутся в плоскости xz ; $f=f(t, \mathbf{r}_1)$, $\mathbf{r}_1=(x, z)$ — отклонение свободной поверхности по вертикали от плоского уровня; $\Omega_1(\Omega_2)$ — область, занимаемая жидкостью (газом); ρ — плотность, α — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость — газ; ψ , φ — потенциалы скорости и электрического поля, g — ускорение свободного падения, U — напряжение на электродах. В качестве единиц измерения выбраны величины

$$\begin{aligned} [t] &= \lambda/u_0, [\psi] = \lambda u_0, [\varphi] = U \\ [f] &= a, [y] = h_1, [x] = [z] = \lambda \end{aligned}$$

где a — характерная амплитуда f , λ — горизонтальный размер, на котором существенно меняются характеристики движения.

2. Длинноволновое приближение. Нелинейные гидродинамические волны. В дальнейшем будем считать отклонение свободной поверхности малым, но конечным $\varepsilon \ll 1$, т. е. будем разыскивать решение с точностью до членов порядка ε^2 . Представим решение в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (2.1)$$

где φ_i , ψ_i ($i=1, 2, \dots$) являются функциями ε . Однако эта зависимость при изменении $-\infty < x, z < \infty$ не является аналитической. Подставляя (2.1) в (1.1), (1.2), получим $\psi_0=0$, $\varphi_0 = -y/h + 1$, а φ_1 , φ_2 определяется задачами

$$\varphi_{1yy} + \mu^2 \Delta_1 \varphi_1 = 0 \quad (-\infty < x, z < \infty; 0 \leq y \leq h) \equiv (\Omega_{10}) \quad (2.2)$$

$$y=0: \varphi_1 = f/h; \quad y=h: \varphi_1 = 0$$

$$\varphi_{2yy} + \mu^2 \Delta_1 \varphi_2 = 0 \quad (\Omega_{10})$$

$$y=0: \varphi_2 = -f\varphi_{1y}; \quad y=h: \varphi_2 = 0 \quad (2.3)$$

Очевидно, решения задачи (2.2), (2.3) определяются через отклонение свободной поверхности f . Используя преобразование Фурье, находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{h} \int f_* G_1 dk, \quad G_1 = \frac{\text{sh } \mu k (h-y)}{\text{sh } \mu h k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} \quad (2.4)$$

$$\varphi_2 = - \int (f\varphi_{1y})_* G_1 dk, \quad \mathbf{k}\mathbf{r}_1 = k_x x + k_z z \quad (2.5)$$

$$k = |\mathbf{k}|, \quad dk = dk_x dk_z$$

где f_* , $(f\varphi_{1y})_*$ — преобразования Фурье функций f , $f\varphi_{1y}|_{y=0}$.

Для дальнейшего решения задачи (1.1) — (1.5) воспользуемся следующим приемом. Введем функцию $\Phi(t, \mathbf{r}_1) = \psi_1|_{y=0}$. Тогда аналогично тому, как были получены φ_1 , φ_2 , для ψ_1 , ψ_2 получаем

$$\psi_1 = \int \Phi_* G_2 dk, \quad G_2 = \frac{\text{ch } \mu k (1+y)}{\text{ch } \mu k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} \quad (2.6)$$

$$\psi_2 = - \int (f\psi_{1y})_* G_2 dk \quad (2.7)$$

Задача свелась к отысканию двух функций f , Φ , для нахождения которых используем граничные условия (1.3), (1.4) (остальные условия (1.2), (1.5) были использованы при нахождении (2.4) — (2.7)). Подставляя разложения (2.1) в (1.3), (1.4) и используя (2.4) — (2.7), получим с точностью до членов порядка ε

$$f_t - \mu^{-2} \psi_{1y} + \varepsilon \nabla_1 \Phi \nabla_1 f - \varepsilon \mu^{-2} (\psi_{2y} + f\psi_{1yy}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_t + f - \mu^2 \gamma \Delta_1 f + \beta h \varphi_{1y} + \varepsilon \left[-\psi_{1y} f_t + \frac{1}{2\mu^2} (\psi_{1y}^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Phi|^2) + \right. \\ \left. + \beta h (\varphi_{1yy} f + \varphi_{2y}) - \frac{1}{2} (h^2 \varphi_{1y}^2 + \mu^2 |\nabla_1 f|^2) \right] = C_1(t) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Здесь частные производные берутся при $y=0$.

Дальнейший анализ будем проводить в длинноволновом приближении, т. е. предполагаем, что преобразования Фурье f_* , Φ_* существенно отличны от нуля лишь при малых k и параметр $\mu \ll 1$. Физически эти условия означают, что $f(t, r_1)$, $\Phi(t, r_1)$ представляются в виде суперпозиции длинноволновых мод, волновые числа которых удовлетворяют условиям

$$kh_1 \ll 1, \quad kh_2 \ll 1 \quad (2.10)$$

Раскладывая подынтегральные выражения в (2.4), (2.7) в ряд по μ и подставляя полученные выражения в (2.8), (2.9) с точностью до членов порядка $\varepsilon \approx \mu^2$, будем иметь

$$f_t + \Delta_1 \Phi + \varepsilon \operatorname{div}(f \nabla_1 \Phi) + \frac{\mu^2}{3} \Delta_1^2 \Phi = 0 \quad (2.11)$$

$$\Phi_t = \left(1 - \frac{\beta}{h}\right) f + \mu^2 \left(\frac{\beta h}{3} - \gamma\right) \Delta_1 f + \frac{\varepsilon}{2} \left(|\nabla_1 \Phi|^2 - \frac{3\beta}{h^2} \cdot f^2\right) = C_1 \quad (2.12)$$

Эта система уравнений примечательна в двух отношениях. Во-первых, при напряженностях полей $E = U/h_2$ меньших критического $E_* = \sqrt{4\pi\rho gh_2}$ на временах порядка $t \leq \min(\varepsilon^{-1}, \mu^{-2})\lambda/c_0$ ($c_0 = (gh_1 - E^2 h_1/4\pi\rho h_2)^{-1/2}$ — фазовая скорость линейных волн) она эквивалентна уравнению типа КДВ, а при $E \sim E_*$ система описывает новые стационарные состояния (ответвляющиеся решения) и их динамику. Во-вторых, в плоском случае система (2.11), (2.12) отличается от приближения Буссинеска (см., например, [2, с. 140]). Это отличие обуславливается разной зависимостью Φ от μ .

Критическое значение напряженности E_* можно вычислить из (2.11), (2.12) по первому методу Ляпунова (относительно бесконечно малых периодических возмущений). Заметим, что этот результат вытекает из дисперсионного соотношения между частотой и волновым числом для бесконечно малых возмущений плоской поверхности

$$\omega^2 = \left(\frac{\alpha}{\rho} k^2 + g - \frac{E^2}{4\pi\rho} k^2 \operatorname{cth} kh_2\right) k \operatorname{th} kh_1 \quad (2.13)$$

при выполнении условий (2.10).

Используя метод «многих масштабов» (см. [2, с. 117]) из (2.11), (2.12) в плоском случае $\Delta_1 \equiv \partial^2/\partial x^2$ и в докритической области $1 - \beta/h \gg \varepsilon$ получаем уравнение типа КДВ

$$u_t + \lambda_0 u_x + \varepsilon \frac{3}{2\lambda_0} \left(\lambda_0^2 - \frac{\beta}{h^2}\right) uu_x + \frac{\mu^2}{6\lambda_0} (\lambda_0^2 + \beta h - 3\gamma) u_{xxx} = 0$$

$$\lambda_0^2 = 1 - \beta/h, \quad f = u, \quad \Phi_x = \lambda_0 u$$

Это уравнение выполняется на временах порядка $t \leq \varepsilon^{-1} \lambda_0^{-1}$ (размерное $t \leq \lambda/\varepsilon c_0$) [2].

Исследуем влияние поля на форму и скорость движения солитона. Именно, разыскивая решение в виде $f = f_0/\operatorname{ch}^2 b\xi$, $\xi = x - \lambda_0(1 + \delta)t$, получим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{\beta}{h^2 \lambda_0^2}\right) f_0, \quad b^2 = \frac{2\delta}{2\mu^2} \left(1 + \frac{\beta h - 3\gamma}{\lambda_0^2}\right) \quad (2.14)$$

Отсюда следует $\delta \sim \varepsilon$, а так как λ_0 с ростом поля убывает, то можно сделать вывод, что наличие заряда на поверхности жидкости уменьшает скорость движения гидродинамического солитона. При $A \equiv (\lambda_0^2 - \beta/h^2) (\lambda_0^2 + \beta h - 3\gamma)^{-1} > 0$ волна будет иметь форму возвышения ($f_0 > 0$), при $A < 0$ — форму впадины ($f_0 < 0$). Обратная величина параметра b пропорциональна ширине Δ_0 солитона. Из (2.14) следует, что электрическое поле может как увеличивать Δ_0 , так и уменьшать. Для волны возвышения при $\lambda_0^2 h^2 > \beta$, $\lambda_0^2 + \beta h > 3\gamma$ ширина Δ_0 уменьшается с ростом поля, причем при $\lambda_0^2 h = \beta$ ($E = E_* \sqrt{h_2/(h_1 + h_2)}$) электрическое поле разрушает солитон ($\Delta_0 = \infty$). Для солитона, имеющего форму впадины $\lambda_0^2 h^2 > \beta$, $3\gamma > \lambda_0^2 + \beta h$, ширины Δ_0 с

ростом поля будет увеличиваться при $(3\gamma-1)(1+h) > h^2(h-h^{-1})$ и уменьшаться при $(3\gamma-1)(1+h) < h^2(h-h^{-1})$.

3. Неустойчивость и ветвление. Покажем, что в плоском случае ветвление происходит жестким образом. Вывод о характере потери устойчивости (мягком или жестком) основан на анализе выражения для амплитуды ответвившегося решения. Для вычисления амплитуды воспользуемся схемой [4]. Как показывают вычисления, нетривиальное решение может существовать при разложении по степеням надкритичности $\mu = (\beta - \beta_*)^{1/2}$, где β_* — искомое критическое значение параметра β , при котором происходит ветвление следующей краевой задачи, вытекающей из (1.1)–(1.5) при $h_1 = h_2 = \lambda$

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\Omega_2); \quad y_1 = 1; \quad \varphi = 0$$

$$y = f: \quad \varphi = 1, \quad f^{-1/2}\beta |\nabla\varphi|^2 - \gamma f_{xx}(1+f_x^2)^{-\gamma/2} = C \quad (3.1)$$

Решение (3.1) ищем в виде следующих асимптотических рядов по μ , при этом получим последовательность краевых задач (3.3)

$$f = \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots, \quad \varphi = y - 1 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \dots, \quad C = C_0 + \mu C_1 + \dots \quad (3.2)$$

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (-\infty < x < \infty; \quad 0 \leq y \leq 1) \equiv (\Omega_0); \quad y = 1: \quad \varphi_i = 0$$

$$y = 0: \quad \varphi_i = W_i, \quad f_i + \beta_* \varphi_{iy} + \gamma f_{ixx} = H_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.3)$$

В дальнейшем понадобятся три первых приближения, для которых

$$W_1 = f_1, \quad H_1 = C_1; \quad W_2 = f_2 - \varphi_{1y} f_1$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \beta_* |\nabla\varphi_1|^2 - \beta_* \varphi_{1yy} f_1 + C_2; \quad W_3 = f_3 - \varphi_{1y} f_2 - \varphi_{2y} f_1$$

$$H_3 = \beta_* \left(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |\nabla\varphi_1|^2 f - \varphi_{2yy} f_1 - \varphi_{1yy} f_2 \right) -$$

$$- \varphi_{1y} + \frac{3}{2} \gamma f_{1x}^2 f_{1xx} + C_3$$

Решение задачи первого приближения имеет вид

$$f_1 = \beta_1 \cos k_* x, \quad \varphi_1 = \beta_1 \frac{\text{sh } k_* (1-y)}{\text{sh } k_*} \cos k_* x, \quad C_1 = 0$$

где $\beta_1 = \text{const}$, k_* — волновое число, на котором достигается минимум

$$\beta_* = \min_{k > 0} (1 + \gamma k^2) \text{th } k/k \quad (3.4)$$

Для разрешения задач (3.3) $i = 2, 3$ необходимо, чтобы выполнялись условия разрешимости. Сделаем замену $\varphi_2 = \psi_2 + \Phi_2$, где ψ_2 определяется задачей

$$\Delta\psi_2 = 0(\Omega_0); \quad y = 1: \quad \psi_2 = 0; \quad y = 0: \quad \psi_2 = -\varphi_{1y} f_1$$

получаем условие разрешимости при $i = 2$ в виде

$$y = 0: \quad \int_0^{2\pi/k_*} (H_2 - \beta_* \psi_{2y}) \cos k_* x \, dx = 0$$

Можно убедиться, что это условие выполняется тождественно. При $i = 3$ условие разрешимости записывается как

$$y = 0: \quad \int_0^{2\pi/k_*} (H_3 - \beta_* \psi_{3y}) \cos k_* x \, dx = 0 \quad (3.5)$$

где $\psi_3(x, y)$ определяется задачей

$$\Delta\psi_3 = 0(\Omega_0); \quad y = 1: \quad \psi_3 = 0; \quad y = 0: \quad \psi_3 = -\varphi_{1y} f_2 - \varphi_{2y} f_1$$

После проведения вычислений из интегрального условия (3.5) находим

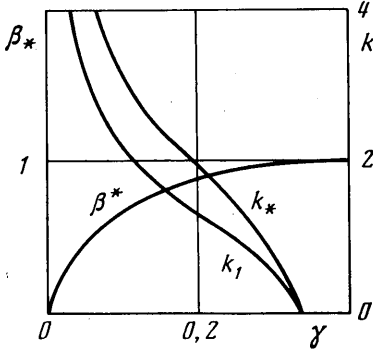
$$B_1 = \{k_* \beta_* [B^{3/2} \operatorname{th} k_* - 2 \operatorname{cth} 2k_* - 1/2 \operatorname{cth} k_*] + 3/2 k_* - \operatorname{cth} k_* (k_* \operatorname{cth} 2k_* + 1) - 3/8 \gamma k_*^2 \operatorname{th} k_*\}^{-1/2} \quad (3.6)$$

$$B = \frac{\beta_* k_*^2 [\operatorname{cth} k_* \operatorname{cth} 2k_* - 1/2 + 1/4 (\operatorname{cth}^2 k_* - 1)]}{1 + 4\gamma k_*^2 - 2\beta_* k_* \operatorname{cth} 2k_*}$$

В этом выражении k_* в силу (3.4) является функцией γ . Зависимости $k_* = k_*(\gamma)$, $\beta_* = \beta_*(\gamma)$ изображены на фиг. 2. Из (3.4) можно получить

$$\begin{aligned} \gamma \rightarrow 0: & k_* \approx 1/\sqrt{\gamma}, \quad \beta_* = 2\sqrt{\gamma} \\ \gamma \rightarrow 1/3 - 0: & k_*^2 \approx 22,5(1/3 - \gamma) \rightarrow 0, \\ & \beta_* \approx 1 - 22,5(1/3 - \gamma)^2 \rightarrow 1; \quad \gamma \geq 1/3: k_* = 0, \quad \beta_* = 1. \end{aligned}$$

В области $\gamma \geq 1/3$ с учетом $k_* \ll 1$, $\beta_* \approx 1$ коэффициент β_1 легко вычисляется $\beta_1 = k_* \sqrt{(1/3 - \gamma)^{8/3}}$. Отсюда следует, что β_1 при $\gamma > 1/3$ не существует, т. е. в этом случае переход от плоской поверхности к периодическим валам происходит жестким образом. В области $0 < 1/3 - \gamma \ll 1$ имеем $\beta_1 = 2\sqrt{15}(1/3 - \gamma)$.



Фиг. 2

Численные вычисления показали, что при $1/3 - \gamma \gg 10^{-3}$ подкоренное выражение в (3.6) отрицательно, т. е. при $0 < \gamma < 1/3 - 10^{-3}$ ветвление также происходит жестким образом. Таким образом, мягкая потеря устойчивости возможна лишь в длинноволновой области, когда $1/3 - 10^{-3} < \gamma < 1/3$. Здесь возникает вопрос о возможности мягкой потери устойчивости по отношению к возмущениям, длины волн которых не совпадают с критической. Исследование соотношения (3.6) показало, что для каждого γ существует такое k_1 что для всех $k < k_1$ ветвление происходит мягким образом, при $k > k_1$ — жестким. Зависимость $k_1 = k_1(\gamma)$ изображена на фиг. 2. При $\gamma \rightarrow 0$: $k_1 \approx 1/\sqrt{2\gamma} \rightarrow \infty$, при $\gamma \rightarrow 1/3 - 0$ кривые $k_1(\gamma)$, $k_*(\gamma)$ сливаются. В области $\gamma \ll 1$ для значений k , мало отличающихся от k_1 , имеем $\beta_1 = 1/3 \sqrt{\gamma(k_1 - k)}$, где $k_1 = 1/\sqrt{2\gamma}$.

4. Нелинейные равновесные формы. Жесткий характер потери устойчивости не позволяет строить ответившиеся решения с помощью асимптотических разложений по степеням надкритичности. Эволюцию возмущений удастся проследить с помощью нелинейного рассмотрения в длинноволновом приближении (2.10).

Считая потенциал скорости $\Phi = \text{const}$, $h_1 = h_2 = h$ из (2.12) для отклонения свободной поверхности имеем следующее уравнение (размерный вид)

$$\begin{aligned} \Delta_1 f &= a_1 f + a_2 f^2 + C, \quad C = \text{const} \quad (4.1) \\ a_1 &= \frac{3(E^2 - E_*^2)}{h^2(E^2 - E_\alpha^2)}, \quad a_2 = \frac{9E^2}{2h^3(E^2 - E_*^2)} \\ E_*^2 &= 4\pi\rho gh, \quad E_\alpha^2 = \frac{12\pi\alpha}{h} \end{aligned}$$

Ниже будет показано, что это уравнение справедливо при конечной надкритичности $|1 - \beta| \sim \epsilon$, тогда как выводы предыдущего анализа в п. 3 справедливы в случае бесконечно малой надкритичности $|1 - \beta| \rightarrow 0$.

Решение уравнения (4.1) должно удовлетворять некоторым условиям. Если решение периодическое, то из несжимаемости жидкости вытекает

$$\int_s f dx dz = 0 \quad (4.2)$$

где S — область периодичности. Если f симметрична относительно оси y и убывает к нулю на бесконечности, то

$$|r_1|=0: \nabla_1 f=0, \quad |r_1| \rightarrow \infty: f \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

Сделав в (4.1) следующую замену, получим

$$f = \pm \frac{a_1}{a_2} u(\xi, \eta), \quad \xi = x\sqrt{\pm a_1}, \quad \eta = z\sqrt{\pm a_1}$$

$$\Delta u = \pm u + u^2 + C, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad C \equiv \text{const} \quad (4.4)$$

Здесь верхний знак берется при $a_1 > 0$, нижний — при $a_1 < 0$. С учетом условий (4.2), (4.3) видно, что решение для f определяется универсальной функцией $u(\xi, \eta)$, не зависящей от параметров задачи. Поэтому амплитуда отклонения определяется параметром $a_1/a_2 = 2h(1-\beta)/3\beta$, откуда и вытекает сформулированное выше утверждение $|1-\beta| \sim \varepsilon$.

Уравнение (4.4) легко исследуется в плоском случае $\Delta = \partial^2/\partial \xi^2$. Умножая (4.4) на $du/d\xi$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{3} \left(u^3 \pm \frac{3}{2} u^2 + 3Cu + C_1 \right) \equiv \frac{2}{3} P(u) \quad (4.5)$$

Обозначим корни полинома $P(u)$ через $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ (если $P(u)$ имеет только один действительный корень, то ограниченных решений не существует). Тогда периодическое решение уравнения (4.5) можно найти в явном виде через эллиптический косинус

$$u = u_2 - (u_2 - u_1) \operatorname{cn}^2 \left(\xi \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{6}}, m \right), \quad m = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (4.6)$$

Свойства решения (4.6) подробно обсуждаются в работах [1, 2]. При $u_2 = u_3$ из (4.6) с учетом $\operatorname{cn}(u, 1) = \operatorname{sch} u$ (см. [5, с. 121]) получаем решение в виде «уединенной формы»

$$u = -\frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(\xi/2)}, \quad f = -\frac{a}{\operatorname{ch}^2 bx}, \quad a = h \left(1 - \frac{E_*^2}{E^2} \right), \quad b = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{3(E^2 - E_*^2)}{4(E^2 - E_\alpha^2)}} \quad (4.7)$$

Отметим, что это решение можно получить из (4.5) при знаке «плюс», положив $C_1 = C = 0$.

Из (4.7) видно, что в закритической области $E > E_*$, $E > E_\alpha$ нелинейные равновесные формы могут иметь вид уединенных «канавок». С ростом поля глубина канавки растет, причем при $E > E_\alpha$ ширина канавки убывает, при $E < E_\alpha$ — возрастает. В докритической области $E < E_\alpha$, $E < E_*$ возможны решения типа уединенных валов. В этом случае высота вала уменьшается с ростом поля и при $E = E_*$ он исчезает. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в промежуточном случае $E_\alpha < E < E_*$ при $E_\alpha < E_*$ либо $E < E < E_\alpha$ при $E < E_\alpha$ уединенные решения вида (4.7) не образуются.

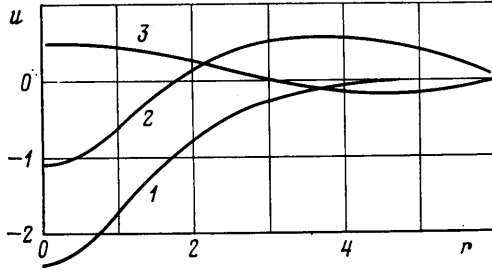
Качественное исследование уравнения (4.5) при знаке «минус» показало, что в этом случае форма поверхности описывается периодическим решением (4.6) (кноидальные периодические валы). По поводу влияния электрического поля на периодические формы отметим, что с ростом напряженности меняются амплитуда (при $E > E_*$ — увеличивается, $E < E_\alpha$ — уменьшается) и ширина валов, которая при $E_\alpha < E < E_*$ увеличивается, при $E < E < E_\alpha$ уменьшается.

Численное решение уравнения (4.4) в осесимметричном случае при знаке «плюс» и условиях (4.3) показало, что существует единственное решение, описывающее равновесные формы типа углублений (лунки). Это

решение представлено ниже:

r	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$-u$	2,4	2,37	0,27	0,21	1,93	1,72	1,51
r	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6
$-u$	1,30	1,1	0,92	0,76	0,63	0,51	0,42
r	2,8	3	3,2	3,4	3,6	4	5
$-u$	0,34	0,27	0,22	0,17	0,14	0,08	0,009

График этой функции представлен кривой 1 на фиг. 3. Уравнение (4.4) при нижнем знаке и граничных условиях (4.3) имеет осциллирующие решения (фиг. 3, кривые 2, 3), амплитуда которых $u(0)$ может быть любой из промежутка $(-1,3; 1)$. Отметим, что амплитуды осцилляций с



Фиг. 3

ростом r уменьшаются, так что максимальное значение $u(r)$ достигается в центре ($r=0$).

Таким образом, неосциллирующие лунки (фиг. 3, кривая 1) образуются в единственном случае, когда $E > E_*$, $E > E_\alpha$, причем с ростом поля глубина лунки растет пропорционально $h(1-E_*/E)$, а радиус лунки изменяется по закону

$$R = 4h\sqrt{(E^2 - E_\alpha^2)/3(E^2 - E_*^2)}$$

При $E < E_*$, $E < E_\alpha$ возможно образование неосциллирующих бугорков (перевернутая кривая 1, фиг. 3), которые являются неустойчивыми образованиями. В остальных случаях возможно образование осциллирующих лунок и бугорков (фиг. 3, кривые 2, 3).

Для рассмотрения механизма образования лунок и бугорков рассмотрим распределение поверхностной плотности заряда q_s . С точностью до членов порядка ϵ имеем

$$q_s = \frac{E}{4\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{E - E_*}{E} u \right)$$

Так как $u < 0$, то бугорки ($E < E_*$, E_α) представляют собой области повышенной, а лунки ($E > E_*$, E_α) — пониженной поверхностной плотности заряда. Отсюда вытекает, что образование лунок (бугорков) связано с уменьшением (увеличением) распределения плотности поверхностной кулоновской силы.

5. Движение уединенных поверхностных форм. Будем рассматривать движение уединенных форм поверхности при таких условиях, когда форма слабо деформируется. Такое движение реализуется в двух случаях: либо когда движение рассматривается на малом промежутке времени, либо когда скорость движения лунки мала. Эти два случая можно выделить следующим приемом. Разыскивая решение системы (2.11), (2.12) в следующем виде, с точностью до членов порядка ϵ получим

$$\begin{aligned} f &= F(\tau, r_1) + \epsilon_1 F_1(\tau, r_1) + \epsilon_1^2 F_2(\tau, r_1) + \dots \quad (\tau = \epsilon_1 t, \epsilon_1 = \sqrt{\epsilon}) \\ \Phi &= \epsilon_1 (\Psi(\tau, r_1) + \epsilon_1 \Psi_1(\tau, r_1) + \epsilon_1^2 \Psi_2(\tau, r_1) + \dots) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$F_{\tau} + \Delta_1 \Psi = 0, \quad \delta_0 \Psi_{\tau} + \Delta_1 F - \alpha_1 F - \alpha_2 F^2 + C = 0 \quad (5.2)$$

$$\delta_0 = \varepsilon \gamma_1, \quad \alpha_1 = (\beta/h - 1) \gamma_1$$

$$\alpha_2 = 3\varepsilon \beta \gamma_1 / 2h^2, \quad \gamma_1 = 3/\mu^2 (\beta h - 3\gamma)$$

Из представления (5.1) следует, что для решения вида бегущей волны, двигающейся вдоль оси

$$F = F(\xi, z), \quad \Psi = \Psi(\xi, z), \quad \xi = x - \lambda_1 \tau = x - \lambda_1 \sqrt{\varepsilon} t \quad (5.3)$$

малость параметра $\lambda_1 \sqrt{\varepsilon}$ связана с малой скоростью движения жидкости. Нетрудно видеть, что в общем случае при определении последующих членов разложения (5.1) F_i, Ψ_i ($i=1, 2, \dots$) появляются секулярные члены, пропорциональные $\varepsilon_i t$. Поэтому в этом случае условие справедливости (5.2) накладывает ограничение на время движения $t \ll \varepsilon^{-1/2}$.

Система уравнений (5.2) приводится к одному уравнению для F

$$\delta_0 F_{\tau\tau} = \Delta_1 (\Delta_1 F - \alpha_1 F - \alpha_2 F^2) \quad (5.4)$$

Следующей заменой (5.4) приводится к уравнению для универсальной функции $u(\xi, \xi, \eta)$

$$F = \frac{|\alpha_1|}{\alpha_2} u(\xi, \xi, \eta), \quad \xi = \tau |\alpha_1| \sqrt{\delta_0}$$

$$\xi = x \sqrt{|\alpha_1|}, \quad \eta = z \sqrt{|\alpha_1|}$$

$$u_{\xi\xi} = \Delta (\Delta u - u - u^2), \quad \Delta = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2$$

где верхний знак берется при $\alpha_1 > 0$, нижний — при $\alpha_1 < 0$.

В плоском случае $\Delta_1 = \partial^2 / \partial x^2$ система (5.2) допускает решение в виде бегущей волны (5.3)

$$F = \frac{a}{\text{ch}^2 b \xi} \quad V = \Psi_x = -\lambda_1 F, \quad \xi = x - \lambda_1 \tau \quad (5.5)$$

$$a = -\frac{3(\alpha_1 + \lambda_1^2 \delta_0)}{2\alpha_2}, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1 + \lambda_1^2 \delta_0}$$

Отсюда видно, что при $\lambda_1^2 \delta_0 \gg |\alpha_1|$ амплитуда волны существенно зависит от скорости ее движения. Например, при $\alpha_1 > 0$ решение (5.5) есть бегущая канавка, глубина которой растет по мере увеличения скорости ее движения (параметра λ_1). При $\lambda_1^2 \delta_0 \ll \alpha_1$ амплитуда волны не зависит от скорости ее движения. Далее, при $\lambda_1 \rightarrow 0$ бегущая канавка (5.5) переходит в неподвижную (4.7). В случае малых скоростей движения $\lambda_1^2 \delta_0 \ll |\alpha_1|$ аналогичным образом можно исследовать движение осесимметричных форм. Для бегущей волны, например, уравнение свободной поверхности F удовлетворяет уравнению вида (4.1), а потенциал скорости выражается как

$$\Psi = \frac{\lambda_1}{2\pi} \int F_1(\xi_2) \ln \frac{1}{r_{12}} d\xi_2$$

где индекс 1 относится к фиксируемой точке, 2 — к текущей, r_{12} — расстояние между ними.

Подобный подход можно применить также к исследованию нелинейных форм и нелинейных волн на поверхности слоя намагничивающейся (поляризующейся) жидкости в поперечном магнитном (электрическом) поле, а также к исследованию явлений на заряженной поверхности жидкого гелия [6]. Можно показать, что во всех этих случаях нелинейные равновесные формы в длинноволновом приближении описываются уравнением вида (4.1), а движение поверхностных форм — уравнением (5.4). Например, в случае заряженной поверхности жидкого гелия в металлическом

приближении [6] вместо уравнения (2.12) будем иметь

$$\Phi_t + (1-\beta)f + \frac{\mu^2}{3} (\beta_1 + \beta_2 h - 3\gamma) \Delta_1 f + \frac{\varepsilon}{2} \left[|\nabla_1 \Phi|^2 - 3 \left(\frac{\beta_2}{h^2} - \beta_1 \right) f^2 \right] = C \quad (5.6)$$

$$\beta = \varepsilon_1 \beta_1 + \frac{\beta_2}{h}, \quad \beta_1 = \varepsilon_1 \frac{E_{10}^2}{d}, \quad \beta_2 = \frac{E_{20}^2}{d}, \quad d = 4\pi r u_0^2$$

$$E_{10} = (4\pi e n_0 h_2 + U) / \delta_1, \quad E_{20} = (\varepsilon_1 U - 4\pi e n_0 h_1) / \delta_1, \quad \delta_1 = h_1 + \varepsilon_1 h_2$$

где n_0 — поверхностная концентрация электронов, e — заряд протона, ε_1 — диэлектрическая проницаемость жидкого гелия (постановка задачи описана в [6]). Остальные обозначения совпадают с ранее введенными.

Из (5.6) при $\Phi = \text{const}$ получаем уравнение для нелинейных равновесных форм, которое по виду совпадает с (5.4). Применяя преобразование (5.1), приходим к (5.2), в котором

$$\delta_0 = \varepsilon \gamma_1, \quad \alpha_1 = (\beta - 1) \gamma_1, \quad \alpha_2 = {}^{3/2} \varepsilon (\beta_2 h^2 - \beta_1) \gamma_1 \\ \gamma_1 = 3/\mu^2 (\beta_1 + \beta_2 h - 3\gamma)$$

В связи с этим замечанием можно предположить, что так называемые много-электронные лунки [6] на поверхности жидкого гелия являются нелинейными образованиями. Далее учет даже слабой поляризуемости жидкого гелия ($\varepsilon_1 = 1,06$) приводит к выводу о возможности образования на его поверхности лунок и при отсутствии поверхностного заряда, но при наличии достаточно сильного поперечного поля. Как показывают расчеты, при $h_1 = h_2 = 1$ мм напряжение, приводящее к образованию лунок, имеет порядок 9,45 кВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
2. Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 319 с.
3. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 343 с.
6. Шикин В. Б., Лейдерер П. О колебаниях и устойчивости заряженной поверхности гелия. — ЖЭТФ, 1981, т. 81, вып. 1, с. 184—201.

Харьков

Поступила в редакцию
11.IV.1983