

УДК 532.59

РАЗРЫВЫ ПЕРЕМЕННЫХ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОСТИ

БАХОЛДИН И. Б.

В работе рассматривается нелинейная система уравнений гиперболического типа, описывающая распространение уединенных волн [1]. Уединенная волна характеризуется в этом приближении двумя переменными: плотностью энергии, приходящейся на единицу длины, отсчитываемой вдоль ее гребня, и направлением нормали к гребню волны. Эволюция волны, описываемая указанной системой, может приводить к появлению разрывов, на которых терпят скачок плотность энергии и направление гребня волны [2]. Для установления условий на разрывах привлекается решение, описывающее взаимодействие непараллельных солитонов [3, 4]. С помощью получающихся условий решается задача о распаде произвольного разрыва в переменных, характеризующих солитон.

1. Рассмотрим распространение слабонелинейных слабодиспергирующих уединенных волн в слое жидкости медленно меняющейся глубины. Если радиус кривизны фронта достаточно велик по сравнению с длиной волны и по нормали к фронту на участке порядка длины волны глубина меняется мало, то в сечении по нормали волна представляется солитоном и ее энергия переносится по лучевой трубке.

Решение уравнения Кортевега-де-Вриза в виде солитона описывается соотношениями [6]

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{3\eta_0}{4h^3}} (x - Vt) \right\}, \quad V = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{\eta_0}{2h} \right) \quad (1.1)$$

Здесь η — возвышение свободной поверхности, t — время; h — невозмущенная глубина; V — скорость солитона; g — ускорение силы тяжести.

Полагая η_0/h малой величиной, найдем плотность энергии солитона, т. е. энергию, приходящуюся на единицу длины фронта

$$E = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \rho g h^3 \left(\frac{\eta_0}{h} \right)^{1/2}, \quad V(E, h) = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3E^{2/3}}{8h(\rho g)^{1/3}} \right)$$

Распространение волн описывается следующей системой [5]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \alpha}{V(E, h)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos \alpha}{V(E, h)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (E \cos \alpha) - \frac{\partial}{\partial x} (E \sin \alpha) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь X, Y — горизонтальная система координат; α — угол между касательной к фронту и осью X .

Первое соотношение выражает тот факт, что каждая точка фронта движется со скоростью $V(E, h)$ по нормали и к фронту, второе — закон сохранения энергии $E dl$ вдоль лучевой трубки; dl — ширина трубки.

Если $\partial V / \partial E > 0$, что имеет место для решения (1.1), то система (1.2) гиперболического типа.

Введем безразмерную величину

$$\beta = E^{1/2} / (h(\rho g)^{1/2}) = 2/\sqrt{3} (\eta_0/h)^{1/2}$$

Система (1.1) может быть записана в следующей характеристической форме:

$$\left(C \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) - \frac{1,5}{C} \left(C \frac{\partial \beta}{\partial n} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) = 0,5C \frac{\partial h}{\partial s} / h + 1,5\beta \frac{\partial h}{\partial n} / h$$

$$\left(C \frac{\partial \alpha}{\partial n} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) + \frac{1,5}{C} \left(C \frac{\partial \beta}{\partial n} - \frac{\beta}{2} \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) = 0,5C \frac{\partial h}{\partial s} / h - 1,5\beta \frac{\partial h}{\partial n} / h$$
(1.3)

где $C=1+\beta^2$, $\partial/\partial n$ — производная по нормали, $\partial/\partial s$ — по касательной к фронту.

Перейдем к безразмерным переменным [6]; старые переменные обозначим штрихом

$$x' = lx, y' = ly, t' = \epsilon t / \sqrt{gh_0}, \eta' = a\eta_0, h' = h_0 h, \epsilon = a/h_0, \delta = h_0^2/l^2$$

Здесь l, d, h_0 — характерные длина, амплитуда и глубина, а ϵ и δ — малые параметры.

Система (1.3) при таком переходе не меняет своего вида. Угол между характеристиками равен $\beta(1+O(\epsilon))$, а величина β имеет порядок $\epsilon^{1/2}$.

Из соотношения (1.1) ясно, что длина волны λ , т. е. длина участка по нормали к фронту, где $\eta/\eta_0 > c_1$ (обычно полагают $c_1 = 0, 1$), имеет порядок h'/β или $(\delta/\epsilon)^{1/2}$. В системе (1.3) отсутствует соотношение масштаба глубины и горизонтального масштаба, поскольку в нее входят только логарифмические производные глубины. Поэтому каждому решению системы (1.3) соответствуют реальные волны с разным соотношением длины волны и уклона дна, а также кривизны фронта.

Устремляя h' к нулю, получаем короткие по сравнению с горизонтальным масштабом волны ($\delta \ll \epsilon$), для которых ошибка аппроксимации системой (1.3) не зависит от длины волны и имеет порядок $\epsilon^{1/2}$. Ошибка здесь возникает в связи с тем, что солитон уравнения Кортевега-де-Вриза не является точным решением уравнений движения жидкости. Дальнейшее рассмотрение разрывов проводится над плоским дном. Изменив масштаб, локально гладкое дно можно считать плоским.

В нелинейных гиперболических системах нередко возникают пересечения характеристик, вводятся разрывы. Выясним, чему они соответствуют в данном случае. Очевидно, решение здесь распадается на два взаимодействующих солитона.

Для удобства описания солитона введем локальный горизонтальный масштаб l_1 , такой, что $\delta_1 = \beta^2/\epsilon$, в отличие от глобального масштаба $\delta \ll \epsilon$, который используется для описания движения фронта. Пусть X — радиус-вектор введенной таким образом горизонтальной системы координат; уединенная волна описывается соотношениями

$$\eta = K^2 \operatorname{sech}^2 \theta$$

$$\theta = KX - \omega t + \theta_0, \quad \omega = KC(1 + \frac{1}{2}\epsilon K^2), \quad K = \sqrt{3}/(2\epsilon^{1/2})\beta$$

В работах [3, 4] с помощью асимптотического метода, применяемого к уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, получены стационарные решения для двух взаимодействующих солитонов, пересекающихся под углом $\psi = \alpha_1 - \alpha_2$, имеющие некоторую зону взаимодействия (т. е. участок, где решение имеет несолитонный вид) и переходящие при удалении от зоны пересечения по определенным направлениям в солитонную форму. На фиг. 1 схематично изображены варианты решения; стрелки указывают направление распространения солитонов. Солитоны пронумерованы, $K_2 \geq K_1$.

На интервале $0 < \psi < (3\epsilon)^{1/2}(K_2 - K_1)$ имеется четырехсолитонная конфигурация. Задние провзаимодействовавшие волны 3 и 4 отличаются от передних 1 и 2 только сдвигом по фазе и поэтому отстают от них. Этот

эффект схематично изображен пунктиром между пересекающимися солитонами.

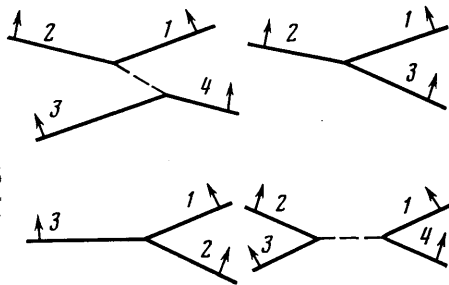
При $\psi = (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 - K_1)$ — резонансное взаимодействие трех солитонов

$$K_3 = K_2 - K_1, \quad \omega_3 = \omega_2 - \omega_1 \quad (1.4)$$

на интервале $(3\varepsilon)^{1/2} (K_2 - K_1) < \psi < (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 + K_1)$ нет регулярного стационарного решения.

При $\psi = (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 + K_1)$ — снова резонансное взаимодействие трех солитонов, получаемое из описанного ранее просто переменной индексов 3 и 2. При $\psi > (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 + K_1)$ — снова четырехсолитонная конфигурация, но здесь задние волны обгоняют передние. При увеличении угла сдвиг по фазе стремится к нулю, решение переходит в суперпозицию двух солитонов.

В случае трехсолитонных конфигураций ширина зоны взаимодействия (т. е. ширина участка фронта волны, где решение имеет несолитонный



Фиг. 1

вид) имеет порядок λ/ψ , в случае четырехсолитонных конфигураций — $\lambda(1+|\Delta|)/\psi$, что связано с наличием сдвига по фазе Δ . Если решение не близко к точке резонанса, он не слишком велик. По соображениям, указанным ранее, устремляем длину волны к нулю и получаем, что в масштабе, используемом в системе (1.3), решения в первом и пятом случаях являются просто пересечениями двух солитонов, а во втором и четвертом — столкновениями трех солитонов. Поскольку зоны взаимодействия между солитонами пренебрежимо малы, то такие конфигурации могут быть «вклеены» в систему (1.3), а решения рассматриваются как структуры образовавшихся разрывов.

2. Рассмотрим трехсолитонную конфигурацию $\psi = (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 - K_1)$, которая аналогична разрывам. Покажем, что резонансные условия имеют смысл условий сохранения массы, энергии, импульса.

Разрывы в решениях системы (1.2) представляют собой изломы фронта, на которых терпит скачок плотность энергии. Система (1.2) имеет форму законов сохранения. Их можно проинтегрировать и получить предполагаемые условия на разрыве [5]

$$\left[\frac{\sin \alpha}{V} \right] U + \left[\frac{\cos \alpha}{V} \right] = 0, \quad [E \cos \alpha] U - [E \sin \alpha] = 0 \quad (2.1)$$

где $U = dx/dy$ — наклон линии разрыва к оси Y .

Первое соотношение кинематическое — условие сплошности фронта. Второе — закон сохранения энергии в лучевой трубке, проходящей через разрыв.

Очевидным дефектом таких условий является несохранение массы и импульса в системе из двух волн с прямолинейным фронтом, которую локально представляет собой разрыв. Введением системы из трех волн открывается возможность удовлетворить еще один закон сохранения. За-

пишем условия сохранения импульса, массы, энергии и два кинематических условия в системе координат, связанной с разрывом (т. е. в такой, где $U=0$). При этом будем полагать, что волна 2 слева от линии разрыва, а волны 1 и 3 — справа

$$\begin{aligned} P_2 \sin \alpha_2 = P_1 \sin \alpha_1 + P_3 \sin \alpha_3, \quad m_2 \sin \alpha_2 = m_1 \sin \alpha_1 + m_3 \sin \alpha_3 \\ E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1 + E_3 \sin \alpha_3, \quad \frac{V_2}{\cos \alpha_2} = \frac{V_1}{\cos \alpha_1} = \frac{V_3}{\cos \alpha_3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь P_i , m_i , E_i — плотности на единицу длины фронта соответственно импульса, массы и энергии солитонов. Если эти величины зависят только от одного параметра, например, E_i , то число уравнений в системе (2.2) совпадает с числом переменных E_i , α_i . Однако для невысоких волн на мелкой воде, распространяющихся в системе координат, связанной с разрывом, под углами порядка $\epsilon^{1/2}$, выполнение сохранения импульса фактически обеспечивается сохранением массы. Действительно, воспользуемся соотношением мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

где u — осредненная по глубине скорость жидкости.

Погрешности при вычислении величин импульса, массы, энергии имеют порядка ϵ , умноженного на соответствующую величину (большей точности для решения системы (1.3) и не требуется).

Пусть $\eta = F(x-t)$, тогда $u = F(x-t)$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi, \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi))^2 d\xi \quad (2.3)$$

(формулы (2.3) безразмерны, $h=1$).

Перенос через разрыв составляющей импульса по оси X равен $P_2 \sin \alpha = P \sin^2 \alpha = PO(\epsilon)$.

Поэтому в данном приближении закон сохранения импульса в проекции на ось X можно не рассматривать.

Проекция составляющей импульса на ось Y равна

$$P_y = P \cos \alpha = P + PO(\epsilon) = m + PO(\epsilon)$$

Поэтому закон сохранения импульса в проекции на ось Y эквивалентен закону сохранения массы.

Соотношения (1.4) в системе координат, связанной с линией пересечения солитонов, имеют решение [4]

$$\begin{aligned} K_3 = K_2 - K_1 + O(\epsilon) \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/2} \{2K_2 - K_1 + O(\epsilon), 2K_1 - K_2 + O(\epsilon), -K_2 - K_1 + O(\epsilon)\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пользуясь равенствами (2.2), получаем

$$P = 2K, \quad m = 2K, \quad E = \frac{4}{3}K^3 \quad (2.5)$$

Полагая в законах сохранения массы и энергии $\sin \alpha = \alpha$, а в кинематических условиях $V/\cos \alpha = 1 + \alpha^2/2 + \epsilon K^2/2$ и подставляя в них соотношения (2.5), получаем, что указанные законы тождественно удовлетворены, т. е. решения (2.4) по существу являются приближенными решениями соотношений (2.2).

К каждой из трех волн можно применить систему (1.3), при этом граничных условий (2.4) на линии пересечения солитонов достаточно для решения задачи.

У первой волны обе характеристики являются приходящими на линию разрыва, у второй волны — одна уходящая характеристика и одна приходящая, у третьей волны — обе характеристики уходят и потому эта волна полностью определяется по первым двум, что видно из соотношений (2.4). По аналогии с разрывами можно говорить об эволюционности трехсолитонной конфигурации.

Соотношение на трехсолитонной конфигурации, не содержащее параметров третьей волны, имеет вид

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 - K_1) = 1,5 (\beta_2 - \beta_1) + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (2.6)$$

Поэтому, если нет необходимости рассмотрения третьей волны, трехсолитонную конфигурацию можно рассматривать просто как разрыв с кубичной по интенсивности разрыва потерей энергии

$$\beta_2^3 \sin \alpha_2 = \beta_1^3 \sin \alpha_1 - 0,5 (\beta_2 - \beta_1)^3 (\beta_2 + \beta_1) \\ V_2 / \cos \alpha_2 = V_1 / \cos \alpha_1$$

Соотношения на таком разрыве даны в системе координат, связанной с разрывом.

В силу этого в разрывах малой интенсивности можно использовать условие сохранения энергии, не учитывая наличия отделившейся третьей волны, что удобно, например, в численных расчетах, использующих законы сохранения при размазывании разрыва.

Соотношение на разрыве (2.1), не содержащее U , имеет вид

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (3\varepsilon)^{1/2} (K_2 - K_1) \left[1 + O \left(\left(\frac{|K_2 - K_1|}{K_1} \right)^2 \right) \right] + O(\varepsilon^{3/2})$$

При выделении разрыва соотношение (2.6) более удобно, поскольку совпадает с условием сохранения инварианта Римана на характеристике системы (1.3)

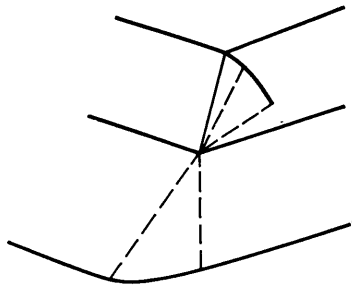
$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1,5}{\langle C \rangle} (\beta_2 - \beta_1) = 1,5 (\beta_2 - \beta_1) + O(\varepsilon^{3/2})$$

Здесь $\langle \rangle$ — обозначает среднее значение величины.

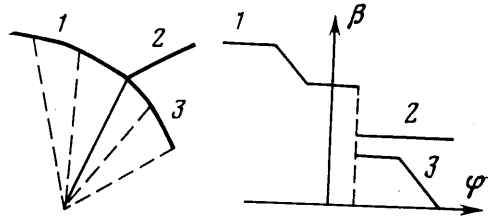
Система (1.2) имеет автомодельные (зависящие от x/y) решения, центрированные простые волны [2], у которых веер характеристик одного семейства сходится в одной точке, а инвариант Римана второго семейства сохраняется. Таким образом, соотношение на разрыве неотлично от соотношения на простой волне и трехсолитонную конфигурацию можно рассматривать как возникшую после опрокидывания центрированной простой волны, получив автомодельное решение с разрывом. На фиг. 2 изображены фронты волны в различные моменты времени (жирная линия), траектория разрыва (тонкая линия) и сходящиеся характеристики простых волн (штриховая линия). По смыслу задачи на конце третьей волны введена простая волна с падением β до нуля.

3. Задачу о взаимодействии двух солитонов при использовании системы (1.3) можно рассматривать как задачу о распаде произвольного разрыва. В силу того что соотношение на разрыве совпадает с соотношением на простой волне, имеется некоторая аналогия в решениях при ψ и $-\psi$.

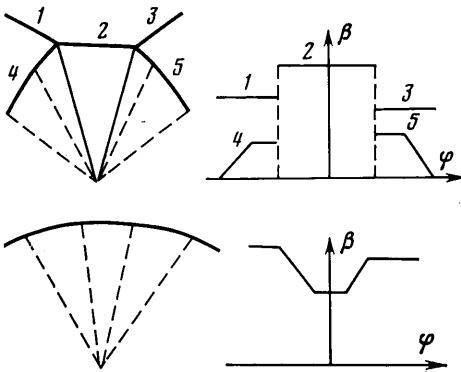
Будем строить автомодельные решения из простых волн, трехсолитонных конфигураций и пересечений солитонов при $\psi > 1,5(\beta_1 + \beta_2)$. В этом случае задача решается однозначно. Результаты ее решения приведены на фиг. 3–5. На этих фигурах изображены фронт волны в некоторый момент времени, траектория разрывов и характеристики простых волн, а также вид графика $\beta(\varphi)$, где φ — полярный угол системы координат с центром в точке распада. Некоторые графики двузначные, поскольку на них помимо параметра β основной волны приведена его величина на третьих волнах в трехсолитонных конфигурациях и волнах,



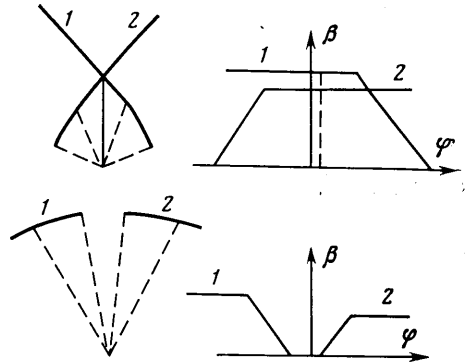
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

возникших после пересечения. При наличии нескольких волн волны и соответствующие им графики перенумерованы. Изломы на графике $\beta(\varphi)$ соответствуют слабым разрывам, по которым простая волна соединяется с однородной волной. Третьи волны не обязательно более слабые, чем первые, как это изображено на графиках.

При $-1,5(\beta_2 - \beta_1) < \psi < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$ решение состоит из простой волны и трехсолитонной конфигурации (фиг. 3).

При $\psi = -1,5(\beta_2 - \beta_1)$ — из одной простой волны, а при $\psi = 1,5(\beta_2 - \beta_1)$ — из одной трехсолитонной конфигурации.

При $1,5(\beta_2 - \beta_1) < \psi < 1,5(\beta_2 + \beta_1)$ решение содержит два разрыва, а при $-1,5(\beta_2 - \beta_1) < \psi < -1,5(\beta_2 - \beta_1)$ — две простые волны (фиг. 4).

При $\psi > 1,5(\beta_2 + \beta_1)$ решение состоит из одного пересечения солитонов, а при $\psi < -1,5(\beta_2 + \beta_1)$ — из двух простых волн, в которых β падает до нуля, т. е. имеется зона, где волна отсутствует (фиг. 5).

4. При использовании трехсолитонных конфигураций и пересечений при $\psi > 1,5(\beta_1 + \beta_2)$ автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва существует и единственно, что указывает на возможность получения разрывных решений системы (1.3) и в более сложных случаях. Сделаем некоторые выводы о свойствах этих решений.

Пересечения солитонов в зоне $0 < \psi < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$ не были использованы. Анализируя решение задачи о распаде разрыва, можно показать, что вторая волна в таких конфигурациях обязательно имеет одну уходящую характеристику. Поэтому для их поддержания необходимо наличие волн, идущих сзади. Следовательно, при решении системы (1.3) непосредственно из одной волны они не возникают.

При формальном решении задачи о распаде разрыва из допущения только трехсолитонных конфигураций следует, что при переходе из зоны $\psi < 1,5(\beta_2 + \beta_1)$ в зону $\psi > 1,5(\beta_2 + \beta_1)$ угол между траекториями трехсолитонных конфигураций уменьшается до нуля, а затем становится отрицательным, т. е. решение о распаде разрыва перерождается в решение за-

дачи об образовании разрыва $\psi > 1,5(\beta_2 + \beta_1)$. Это и обуславливает введение пересечений.

Из такого решения нетрудно показать, что у пересечений при $\psi > 1,5(\beta_2 + \beta_1)$ все четыре характеристики приходящие, причем касание характеристической линии пересечения возможно, только если одна из волн имеет нулевую амплитуду. В отличие от трехсолитонной конфигурации, которая может возникать из центрированной простой волны, в случае пересечения нельзя построить непрерывного автомодельного решения такого типа в силу того, что при $\psi < -1,5(\beta_1 + \beta_2)$ имеется участок, где нет волны. Нельзя также построить автомодельного решения с одной трехсолитонной конфигурацией, приводящего к пересечению. Пересечение не возникает, по-видимому, непосредственно из непрерывного решения, для его образования необходимо столкновение двух и более трехсолитонных конфигураций.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth. Pt2.— J. Fluid Mech., 1971, v. 46, № 3, p. 611–622.
2. Реутов В. А. О поведении возмущений уединенной и периодических волн на поверхности тяжелой жидкости.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5, с. 156–159.
3. Miles J. W. Obliquely interacting solitary waves.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 1, p. 157–169.
4. Miles J. W. Resonantly interacting solitary waves.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 1, p. 171–179.
5. Куликовский А. Г., Реутов В. А. Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980. № 2, с. 53–61.
6. Уизем Дж. Линеиные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, 568 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1983