

УДК 532.546

## ФИЛЬТРАЦИОННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ЗЕМЛЯНОГО КАНАЛА МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., КАСИМОВ А. Р.

Исследуется задача нахождения оптимальной формы поперечного сечения земляного канала с точки зрения минимума фильтрационных потерь методом обратных краевых задач [1].

Согласно [2–4], потери на фильтрацию из каналов достигают 50% подаваемой воды, что существенно снижает КПД оросительных систем. Поэтому естественным является нахождение такой формы поперечного сечения канала, которая обеспечила бы при заданной площади сечения минимум фильтрационных потерь.

В монографии [2] дан критический анализ ряда работ по нахождению наилучшей в фильтрационном отношении формы поперечного сечения трапецеидального канала. Наиболее полное решение в упомянутом классе сечений получено в [5], где в качестве частного случая рассмотрен и прямоугольный канал, специально исследованный в [6]. Особый интерес представляет работа [7], в которой построено оптимальное сечение канала в классе произвольных профилей для случая фильтрации без подпора. Этот же канал изучен в [8] как частный случай некоторого класса криволинейных каналов, которые строятся по заданной области годографа скорости.

Метод обратных краевых задач (ОКЗ), примененный к исследованию задач фильтрации из каналов в [9], позволяет получить решение задачи оптимизации при различных гидрогеологических условиях.

Будем предполагать фильтрацию плоской, установившейся, подчиняющейся закону Дарси; грунт основания – однородным и изотропным; капиллярность, инфильтрацию и испарение учитывать не будем. Обозначим через  $Q$  приведенный фильтрационный расход из канала, т. е. расход, отнесенный к коэффициенту фильтрации, приходящийся на единицу длины канала, а через  $S$  – площадь поперечного («живого») сечения канала. Назовем  $S$ -оптимальным канал, расход  $Q$  из которого достигает минимума среди всех каналов заданной площади. Канал, площадь которого максимальна среди всех каналов с заданным расходом, назовем  $Q$ -оптимальным.

**1. Фильтрация без подпора.** Сущность метода ОКЗ при расчете фильтрации из каналов [9] заключается в возможности нахождения формы поперечного сечения канала и кривых депрессии по заданной эпюре фильтрационного расхода из канала. Этот метод в отличие от полуобратного, когда канал отыскивается по задаваемой характеристике во вспомогательной плоскости, или метода функциональных уравнений, основанного на подборе коэффициентов в формуле Герсеванова (см., например, [10]), базируется на задании характеристики канала непосредственно в физической плоскости.

Пусть

$$\psi = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1)$$

– заданная вдоль ширины канала эпюра приведенного расхода,  $l$  – ширина канала, причем  $Q = f(l)$  (фиг. 1). Функцию  $f(x)$  будем предполагать монотонно возрастающей, а обратную функцию – удовлетворяющей условию Гельдера, что обеспечит существование встречающихся ниже сингулярных интегралов.

Введем, как обычно, в рассмотрение приведенный, т. е. отнесенный к коэффициенту фильтрации, комплексный потенциал  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где  $z = x + iy$  – комплексная координата физической плоскости

течения. В силу сделанных предположений  $w(z)$  будет функцией, аналитической в области фильтрации  $G_z$ . В плоскости  $w$  области  $G_z$  соответствует полуплоскость  $G_w$ . Отобразив конформно  $G_w$  на полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  функцией

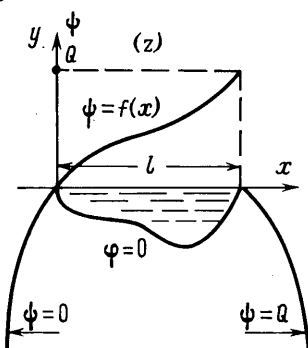
$$\zeta = \cos(\pi w/iQ) \quad (1.2)$$

и решив для функции Жуковского  $z^* = z + iw$  в этой полуплоскости смешанную краевую задачу, получим

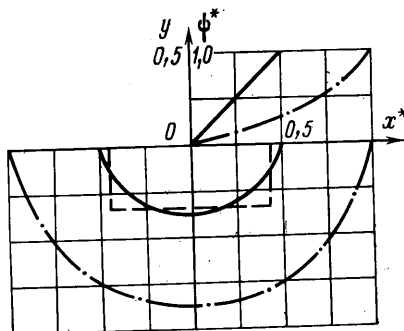
$$z^* = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) - \psi(\tau)}{(\tau - \zeta)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (1.3)$$

где, согласно (1.1),  $x(\tau) = f^{-1}[\psi(\tau)]$ , а  $\psi(\tau) = \pi^{-1}Q \arccos \tau$  по (1.2).

Осуществив в (1.3) предельный переход при  $\zeta \rightarrow \xi \in [-1, 1]$ , найдем па-



Фиг. 1



Фиг. 2

раметрические уравнения контура канала

$$x = x(\xi), \quad y = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) - \psi(\tau)}{(\tau - \xi)\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (1.4)$$

Для определения площади поперечного сечения будем иметь

$$S = - \int_0^l y(x) dx = \int_{-1}^1 y(\xi) x'(\xi) d\xi$$

где  $y(x)$  — уравнение контура канала, а функции  $y(\xi)$  и  $x'(\xi)$  определяются из (1.4).

Введем функцию  $\eta(\xi) = x(\xi) - \psi(\xi)$  и представим ее в виде ряда по полиномам Чебышева 1-го рода  $T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi)$

$$\eta(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(\xi) + b_0 \quad (1.5)$$

что можно сделать для любой гильдеровой функции (см., например, [11]). Поскольку суммирование всюду ниже ведется от 1 до  $\infty$ , пределы в знаке  $\sum$  будем опускать. С учетом (1.5) уравнение (1.4) можно представить в виде

$$x = \psi(\xi) + \sum b_n T_n(\xi) + b_0, \quad y = - \sum b_n U_n(\xi) \quad (1.6)$$

где  $U_n(\xi) = \sin(n \arccos \xi)$  — многочлены Чебышева 2-го рода.  
Тогда для  $S$  найдем

$$S = \frac{Q}{\pi} \int_{-1}^1 \sum b_n U_n(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \int_{-1}^1 \sum b_n U_n(\xi) \sum n b_n U_n(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Учитывая ортогональность многочленов  $U_n(\xi)$  на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $(1-\xi^2)^{-1/2}$ , получим

$$S = -\frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{2Q}{\pi} \sum \frac{b_{2n-1}}{2n-1} \quad (1.7)$$

Суть дальнейших исследований заключается в определении коэффициентов рядов (1.6), которые дают максимум функции  $S(b_1, b_2, \dots)$  при заданном  $Q$  или минимум  $Q(b_1, b_2, \dots)$  при заданном  $S$ .

**Q-оптимальный канал.** Функция  $S(b_1, b_2, \dots)$  может быть представлена в виде

$$S = \sum S_n, \quad S_n = -\frac{\pi}{2} n b_n^2 + \frac{Q}{\pi} [1 - (-1)^n] \frac{b_n}{n}$$

Очевидно, что максимум  $S$  не превышает суммы максимумов  $S_n$ . Максимум  $S_n$  достигается при  $b_n = Q[1 - (-1)^n] / \pi^2 n^2$ , следовательно, при таких  $b_n$  величина  $S$  будет максимальной. Из условия  $\eta(1) = 0$  найдем, что  $b_0 = -Q/4$ . Таким образом, канал, определенный уравнениями

$$x = Q \left[ -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \arccos \xi + \frac{2}{\pi^2} \sum \frac{T_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)^2} \right] \quad u = -\frac{2Q}{\pi^2} \sum \frac{U_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)^2} \quad (1.8)$$

будет  $Q$ -оптимальным.

Заметим, что ряды, входящие в (1.8), сходятся равномерно, поскольку мажорируются сходящимся рядом обратных квадратов.

Из (1.8) нетрудно получить выражение для производной  $dy/dx(\xi)$ , откуда, в частности,  $dy/dx(\pm 1) = \infty$ , т. е. угол заложения откосов  $Q$ -оптимального канала равен  $\pi/2$ .

Ширина  $l = Q/2$  определяется из (1.8) при  $\xi = -1$ ; глубина  $H = 2QG/\pi^2$ , где  $G$  — постоянная Каталана. Площадь  $S$  находится по (1.7):  $S = 7Q^2 \zeta(3) / 4\pi^3$ , где  $\zeta(3) \approx 1,202$ ;  $\zeta(p)$  — дзета-функция Римана. Значение «коэффициента формы»  $\mu = Q/\sqrt{S}$ , введенного в [5] в качестве безразмерной характеристики фильтрационных свойств канала, для  $Q$ -оптимального канала равно  $\mu = 2\pi\sqrt{\pi}/\sqrt{7\zeta(3)} \approx 3,8392$ .

Воспользовавшись формулой  $\arccos \xi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{T_{2n-1}(\xi)}{(2n-1)^2}$  от параметрических уравнений (1.8) можно перейти к одному уравнению

$$y = -\frac{4l}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \quad (1.9)$$

Эпюра (1.1) для канала (1.9) имеет вид  $\psi = 2x$ . Канал с такой эпюрой при наличии на некоторой глубине горизонтального дренирующего слоя был рассмотрен в [9].

**S-оптимальный канал.** Пусть теперь задана площадь  $S$  и требуется найти канал с минимальным расходом  $Q$ . Для этого выразим из (1.7)  $Q$  через  $S$  и  $b_n$

$$Q = \frac{\pi}{2} \left( S + \frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 \right) \left( \sum \frac{b_{2n-1}}{2n-1} \right)^{-1} \quad (1.10)$$

Представить  $Q$  в виде суммы  $Q_n$  здесь не удастся.

Рассмотрим пространство  $B$ , элементами которого являются всевоз-

возможные последовательности действительных чисел  $(b_1, b_2, \dots)$ , такие, что  $\sum nb_n^2 < \infty$ , а следовательно, и  $\sum b_{2n-1}/(2n-1) < \infty$ . Очевидно, что  $B$  — линейное пространство. За норму в  $B$  примем функционал  $\|b\| = (\sum nb_n^2)^{1/2}$ . Выполнимость трех аксиом нормы очевидна. Полнота  $B$  доказывается аналогично случаю пространства  $l_2$  (см., например, [12]). Таким образом,  $B$  — банахово пространство и задача состоит в нахождении минимума функционала (1.10), который является дифференцируемым, т. е.

$$\frac{d}{dt} Q(b+th) \Big|_{t=0} = \frac{1}{A^2} \left[ \pi A \sum nb_n h_n - \left( S + \frac{\pi}{2} \|b\|^2 \right) \sum \frac{h_{2n-1}}{2n-1} \right]$$

где  $h = (h_1, h_2, \dots)$  — произвольный вектор из  $B$ ,  $A = \sum b_{2n-1}/(2n-1)$ .

Необходимые условия экстремума функционала  $Q$  имеют вид  $Q'(b_0)h = 0$ . Выбирая за  $h$  последовательно элементы вида  $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , где лишь  $n$ -й член последовательности отличен от нуля и равен 1, получим систему уравнений для определения коэффициентов  $b_n$

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2\pi A n^2} \left( S + \frac{\pi}{2} \|b\|^2 \right) \quad (1.11)$$

которые дают экстремум функционалу  $Q$ .

Используя (1.11), находим  $b_n = 2[1 - (-1)^n] \sqrt{S} / [n^2 \sqrt{7\pi\zeta(3)}]$ . Тогда по (1.10) определим  $Q = 2\pi \sqrt{\pi S} / \sqrt{7\zeta(3)}$  и для  $b_n$  получим то же выражение, что и для  $Q$ -оптимального канала.

В силу выпуклости функционала (1.10) коэффициенты (1.11) определяют его минимум. Таким образом, уравнение  $S$ -оптимального канала так же, как и  $Q$ -оптимального, имеет вид (1.9).

На фиг. 2 сплошными линиями показаны оптимальный канал и правая половина его эпюры расходов, а штриховой — оптимальный по классу прямоугольных каналов (согласно [5]), имеющий ту же площадь, причем здесь и ниже все каналы в силу их симметрии представлены в системе координат  $(x^*, y)$ , где  $x^* = x - l/2$ , а их эпюры — в системе координат  $(x^*, \psi^*)$ , где  $\psi^* = \psi - Q/2$ . Приняв площадь  $S$  этих каналов за 1, нетрудно найти, что  $Q$  для канала, построенного по (1.9), будет на 5,67% меньше, чем для прямоугольного. Интересно отметить, что если, например, заменить трапециевидальный канал, рассчитанный в [2] (с. 205–206), оптимальным той же площади, то экономия воды за счет уменьшения фильтрации составит 6,2%.

Отметим, что в [7] методом аналитического продолжения получена формула Герсеванова и на ее основе решена задача нахождения  $Q$ -оптимального канала. Вполне естественно, что уравнение (1.9) совпадает с соответствующим интегральным представлением из [7]. Однако метод ОКЗ позволяет просто находить оптимальный канал и при более сложных, чем рассмотренные выше, гидрогеологических условиях.

**2. Фильтрация с подпором.** Рассмотрим случай наличия подпора, т. е. когда скорость на бесконечности обращается в нуль. Хорошо известно (см. например, [10]), что при наличии подпора решение задачи фильтрации из канала в грунт бесконечной мощности содержит один неизвестный параметр, характеризующий степень подпора и который определяется обычно заданием в плоскости течения  $z$  точки, через которую должна проходить депрессионная кривая.

Если в п. 1 функция  $z^*(\xi)$  не имела особенностей в точке  $\xi = \infty$ , то при наличии подпора эта функция имеет на бесконечности простой полюс. Поэтому, решив краевую задачу в этом классе функций аналогично тому, как это делалось в п. 1, получим параметрические уравнения контура канала в виде

$$x = \frac{Q}{\pi} \arccos \xi + \sum b_n T_n(\xi) + b_0, \quad y = - \sum b_n U_n(\xi) - C \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.1)$$

где  $\xi \in [-1, 1]$ ,  $C$  — неопределенный параметр (положительная постоянная). Можно показать, что все каналы с одинаковым приведенным расходом  $Q$  имеют одно и то же значение  $C$ . Тогда для определения  $C=C(Q)$  можно построить «модельный» канал, в качестве которого удобно использовать плоский горизонтальный канал. Таким образом, величина  $C$  будет найдена, поскольку для «модельного» канала решение задачи известно [10].

Используя (2.1), найдем

$$S = -\frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{2Q}{\pi} \sum \frac{b_{2n-1}}{2n-1} + \frac{2QC}{\pi} - \frac{\pi C b_1}{2}$$

По аналогии с п. 1 легко получить уравнения  $Q$ -оптимального канала:  $l=Q/2+C$ ,  $H=2QG/\pi^2+C/2$

$$S = \frac{7Q^2 \zeta(3)}{4\pi^3} + \frac{CQ}{\pi} + \frac{\pi C^2}{8}, \quad x(\psi) = \frac{\psi}{2} + C \sin^2 \frac{\pi \psi}{2Q}$$

На фиг. 2 в качестве примера штрихпунктирной линией изображен  $Q$ -оптимальный канал и правая половина его эпюры для  $C=Q/2$ .

**3. Фильтрация в горизонтальный дренарующий слой.** Пусть на глубине  $T$  расположен горизонтальный сильнопроницаемый слой. Решение обратной задачи фильтрации из канала для этого случая получено в [9]. По аналогии с вышеизложенным его можно представить в виде

$$x = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda) + \sum b_n T_n(\xi) + b_0, \quad y = - \sum b_n U_n(\xi) \quad (3.1)$$

где  $\xi \in [-1, 1]$ ,  $F(\arcsin \xi, \lambda)$  — эллиптический интеграл 1-го рода,  $K = F(\pi/2, \lambda)$ ; модуль  $\lambda$  находится из соотношения  $Q/2T = K/K'$ , в котором  $K' = F(\pi/2, \lambda')$ ,  $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ . Площадь  $S$  определяется по формуле

$$S = -\frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{Q}{2K} \sum b_n J_n, \quad J_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{1-\lambda^2 \cos^2 x}} dx \quad (3.2)$$

Используя монотонность функции  $S(Q)$ , нетрудно доказать, что  $S$ - и  $Q$ -оптимальные каналы и в этом случае совпадают. Учитывая (3.2), легко показать, что оптимальный канал определяется коэффициентами  $b_n = [1 - (-1)^n] Q J_n / 4K\pi n$ .

Тогда из (3.1) при  $\xi=0$  определим  $H$ , а при  $\xi=-1$  после ряда преобразований —  $l=Q/2$ ; площадь  $S$  вычислим по (3.2).

На фиг. 3 сплошной линией показан график зависимости  $\mu(\lambda)$ , а штриховой —  $a(\lambda) = H/l$  для оптимального канала. Используя эти графики, нетрудно найти нижнюю грань фильтрационных расходов из земляных каналов по заданному значению  $S$ , а также отношение  $H/l$  для оптимального канала.

**4. Фильтрация в напорный водоносный горизонт.** Пусть теперь на глубине  $T$  залегает сильнопроницаемый слой с напорными водами, причем напор на этом слое равен  $T-p_0$ , где  $p_0$  — приведенное, т. е. отнесенное к удельному весу жидкости, давление на дренарующем слое (фиг. 4).

Если в предыдущих параграфах предполагалась заданной эпюра расходов (1.1) по ширине канала, то ниже удобнее задавать эпюру  $\psi = \psi(y)$  в виде обратной функции

$$y = y(\psi), \quad -Q/2 \leq \psi \leq Q/2 \quad (4.1)$$

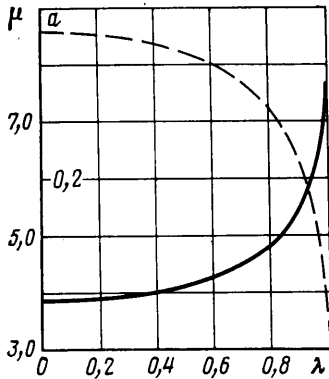
причем  $y(\pm Q/2) = 0$ . Функция (4.1) предполагается удовлетворяющей условию Гельдера. Область  $G_w$  является в этом случае прямоугольником,

а функция, отображающая  $\text{Im } \zeta > 0$  на  $G_w$ , имеет вид  $w(\zeta) = -QF(\arcsin \zeta, \lambda)/2K$ .

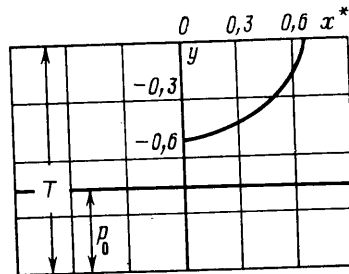
Решив в полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  задачу Дирихле для функции Жуковского, получим

$$z^* = \frac{n}{\pi} \ln \frac{1-\lambda\zeta}{1+\lambda\bar{\zeta}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{y(\tau)}{\tau-\tau} d\tau \quad (4.2)$$

Осуществив в (4.2) предельный переход при  $\zeta \rightarrow \xi \in [-1, 1]$ , определим параметрические уравнения контура канала, которые после представления интегралов типа Коши в виде рядов [11] можно записать следующим



Фиг. 3



Фиг. 4

образом:

$$y = - \sum b_n U_n(\xi), \quad x = - \frac{Q}{2K} F(\arcsin \xi, \lambda) + \frac{p_0}{\pi} \ln \frac{1-\lambda\xi}{1+\lambda\xi} + \sum b_n T_n(\xi) \quad (4.3)$$

Для площади  $S$  получим

$$S = - \frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{Q}{2K} \sum J_{2n-1} b_{2n-1} + \frac{2p_0\lambda}{\pi} \sum P_{2n-1} b_{2n-1}, \quad (4.4)$$

$$P_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{1-\lambda^2 \cos^2 x} dx$$

Следя описанной выше схеме, нетрудно убедиться, что оптимальный канал определяется коэффициентами

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n} \left[ \frac{QJ_n}{2\pi K} + \frac{2p_0\lambda P_n}{\pi^2} \right]$$

С учетом формулы  $\sum P_{2n-1}/(2n-1) = (\pi/4\lambda) \ln[(1+\lambda)/(1-\lambda)]$  для  $l$  и  $H$  из (4.3),  $S$  из (4.4) получим

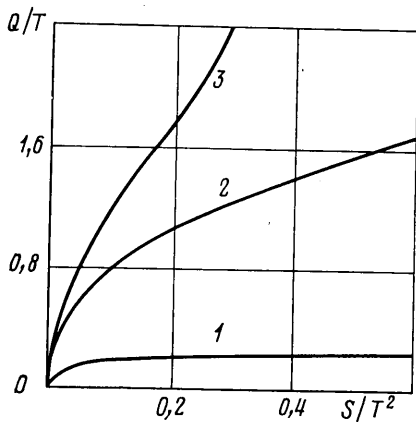
$$l = \frac{Q}{2} + \frac{p_0}{\pi} \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

$$H = - \frac{Q}{8\pi K} \int_0^{\pi} \ln \text{ctg}^2 \left( \frac{x+\pi}{4} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-\lambda^2 \cos^2 x}} + \frac{\lambda p_0}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \ln \text{ctg}^2 \left( \frac{x+\pi}{4} \right) \frac{\sin x dx}{1-\lambda^2 \cos^2 x}$$

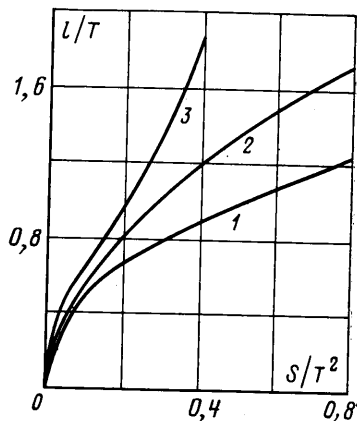
$$S = \frac{Q^2}{8\pi^2 K^2} \sum \frac{J_{2n-1}^2}{2n-1} + \frac{2p_0^2 \lambda^2}{\pi^3} \sum \frac{P_{2n-1}^2}{2n-1} + \frac{2p_0 \lambda Q}{\pi^2 K} \sum \frac{J_{2n-1} P_{2n-1}}{2n-1}$$

Очевидно, при  $p_0=0$  получим упомянутые в п. 3 формулы для  $l$ ,  $H$  и  $S$ .  
 В качестве примера на фиг. 4 показана правая (симметричная левой) половина оптимального канала площади  $S \approx 0,54$ , построенного для  $T=3$ ,  $p_0=1,5$ . Канал имеет следующие характеристики:  $Q \approx 1,996$ ;  $\mu \approx 2,709$ .

На фиг. 5 и 6 цифрами 1, 2 и 3 отмечены графики зависимостей  $Q/T$  и  $l/T$  от  $S/T^2$ , построенные для трех значений параметра  $p_0/T$ : 0,9; 0,5; 0,1. Используя эти графики, по заданным значениям  $p_0$ ,  $T$  и  $S$  можно найти  $Q$ , т. е. нижнюю границу фильтрационного расхода из земляного канала, и ширину  $l$  оптимального канала. В частности, из анализа этих графиков следует, что напор в подстилающем горизонте сильно влияет на фильтрационный расход оптимального канала. Так, например,



Фиг. 5



Фиг. 6

для канала единичной площади увеличение  $p_0$  от 0,5 до 4,5 при  $T=5$  приведет к уменьшению  $Q$  от 3,748 до 0,44, т. е. почти в 9 раз.

Заметим, что при вычислении на ЭВМ интегралы  $J_n$  и  $P_n$  представлялись в виде рядов согласно [13]. Эти же разложения использовались для оценок  $J_n$  и  $P_n$  при доказательстве равномерной сходимости рядов (3.1) и (4.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
2. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.—Л.: Гостройиздат, 1939. 248 с.
3. Шарашкин В. Н. О потерях воды при эксплуатации каналов мелкой ирригационной сети.—Тр. Средне-Азиат. НИИ ирригации, 1938, вып. 44, 48 с.
4. Способы борьбы с потерями на фильтрацию из прудов, водоемов и оросительных каналов. М.: Сельхозгиз, 1956. 428 с.
5. Morel-Seytoux H. J. Domain variations in channel seepage flow.—J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1964, Pt 1, v. 90, № 2, p. 55–79.
6. Рудченко П. А. О фильтрации из каналов и русел произвольного поперечного сечения.—В кн.: Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. думка, 1978, с. 107–122.
7. Preissmann A. A propos de la filtration au-dessous des canaux.—Nouvelle Blanche, 1957, v. 12, № 2, p. 181–188.
8. Цицкишвили А. Р. Об одном случае фильтрации из криволинейных каналов при наличии подпора.—Сообщ. АН ГССР, 1960, т. 25, № 3, с. 263–266.
9. Ильинский Н. Б., Хайруллин З. Э. Некоторые обратные задачи фильтрации из канала.—Тр. Семинара по краев. задачам. Казан. ун-та, 1976, вып. 13, с. 112–119.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977, 664 с.
11. Пытгеев Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши.—ПММ, 1959, т. 23, № 6, с. 1074–1082.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.

Казань

Поступила в редакцию  
17.VI.1983