

УДК 532.54.011

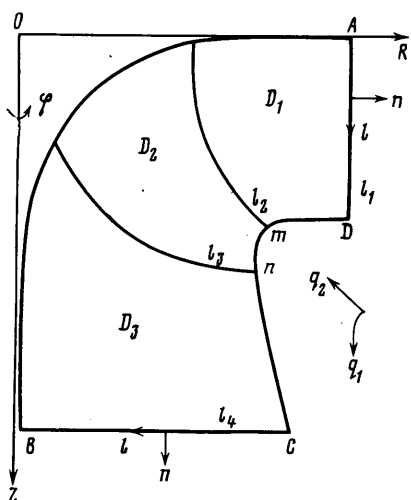
ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПРОТОЧНОМ ТРАКТЕ ГИДРОТУРБИНЫ

КЛИМОВИЧ В. И., ФЕДОРОВ А. В.

В работах [1-4] в рамках одномерного приближения осесимметричной модели движения рассмотрен ряд задач оптимизации течений жидкости в гидротурбинах. Применение одномерных моделей предполагает либо задание углов и кривизн меридиональных линий тока в расчетных сечениях, либо рассмотрение этих величин в качестве управляющих факторов. В общем случае, однако, невозможно гарантировать, что то или иное задание параметров потока в расчетных сечениях не противоречит уравнениям двумерного осесимметричного течения жидкости в проточной части. Более общий подход к задачам оптимального проектирования лопастных систем гидротурбин, основанный на использовании двумерной осесимметричной схемы течения, рассматривался, в частности, в [3-5].

В настоящей работе рассматривается задача максимизации мощности, снимаемой с вала рабочего колеса гидротурбины при фиксированном располагаемом перепаде энергий в рамках двумерной осесимметричной модели течения. Выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядка и на их основе составлен алгоритм численного решения задачи. Приведены результаты расчетов; произведено сравнение оптимальных решений, получаемых при использовании двумерной и одномерной моделей осесимметричного течения.

В настоящей работе рассматривается задача максимизации мощности, снимаемой с вала рабочего колеса гидротурбины при фиксированном располагаемом перепаде энергий в рамках двумерной осесимметричной модели течения. Выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядка и на их основе составлен алгоритм численного решения задачи. Приведены результаты расчетов; произведено сравнение оптимальных решений, получаемых при использовании двумерной и одномерной моделей осесимметричного течения.



Фиг. 1

са, D_1 , D_3 — области свободного вихревого потока. Уравнения осесимметричного течения жидкости в турбомашине подробно исследовались в [6]. С учетом диссипативной силы $\mathbf{f} = -(\mathbf{w}/w^2) dh/dt$ указанные уравнения в области D_2 в случае несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости имеют вид [7]

$$L \equiv \text{div} \frac{\nabla \psi}{\tau R^2} - F = 0 \quad (1.1)$$

$$J(\psi, \Phi) - \frac{\tau H_1 H_2}{R} (Rc_u - \omega R^2) = 0 \quad (1.2)$$

$$F = \tau \frac{dh}{d\psi} + \frac{J(\Phi, Rc_u)}{H_1 H_2 R} + \frac{1}{H_2 Rc_1} \frac{\partial h}{\partial q_2} \Big|_{q_1} - \frac{w \nabla h}{Rc_1 w^2} \left(c_2 + \frac{Rc_u - \omega R^2}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} d\psi &= \tau R (H_1 c_2 dq_1 - H_2 c_1 dq_2), \quad \mathbf{w} = \mathbf{c} - \omega R \mathbf{i}_\varphi \\ H(\psi) &= E_1 - \omega R c_{u1}, \quad F = R^{-1} \Omega_u, \quad \Omega_u = \mathbf{i}_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{c} \end{aligned}$$

$$J(f_1, f_2) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(q_1, q_2)}$$

Здесь $\psi(q_1, q_2)$ — функция тока; $H_1, H_2, H_3 = R$ — коэффициенты Ламе, соответствующие криволинейным координатам $q_1, q_2, q_3 = \varphi$ (фиг. 1); $c_1, c_2, c_3 = c_u$ — компоненты абсолютной скорости \mathbf{c} ; ω — угловая скорость вращения рабочего колеса; $\tau(q_1, q_2)$ — коэффициент стеснения; $\varphi = \Phi(q_1, q_2)$ — уравнение среднеканальной поверхности тока, отождествляемой с поверхностью лопатки; $h(\psi, q_1, q_2)$ — величина потерь энергии на поверхности $\psi = \text{const}$ от входа в D_2 до точки q_1, q_2 ; $E_i(\psi)$ и $Rc_{ui}(\psi)$ — распределения энергии в абсолютном движении и закрутки потока в сечении l_i .

В областях D_1, D_3 течение описывается уравнением (1.1), в котором следует полагать

$$F_i = \frac{dE_i}{d\psi} - \frac{1}{2R^2} \frac{d}{d\psi} (Rc_{ui})^2, \quad i=1, 3 \quad (1.4)$$

$$F_i = F|_{D_i}, \quad E_i = E|_{D_i}, \quad Rc_{ui} = Rc_u|_{D_i}, \quad i=1, 3$$

$$E_3(\psi) = H - h(\psi)|_{D_3} + \omega Rc_{u3}(\psi), \quad \tau = 1$$

Предполагается, что величина h в D_3 есть функция только ψ , определяемая как $h(\psi)|_{D_3} = h(\psi, q_1, q_2)|_{l_3}$. Координаты q_1, q_2 фиксированы в меридиональной плоскости; при этом координатные линии q_1 и q_2 направлены соответственно вдоль и поперек проточного тракта. Для постановки оптимальной задачи предварительно рассмотрим обратную задачу теории гидротурбин, основанную на задании в области D_2 поля окружной компоненты вихря скорости Ω_u [8]. Представим функцию F в $D_1 - D_3$ в виде

$$F = F_1 + (F_3 - F_1) T(\psi, q_1, q_2) \quad (1.5)$$

Здесь F_1 и F_3 определены в соответствии с (1.4). Функция $T(\psi, q_1, q_2)$ определяет закон изменения Ω_u в D_2 ; считается, что $T=0$ в D_1 и $T=1$ в D_3 . При заданных $T, E_i, h, Rc_{ui}, i=1, 3$, расчет течения жидкости в $D_1 - D_3$ может быть выполнен в соответствии с [8]. Будем рассматривать течения с безударным входом потока в рабочее колесо ($[Rc_u]_{-}^{+}|_{l_2} = 0$, символ $[f]_{-}^{+}|_{l_i}$ означает скачок величины f на l_i). В этом случае граничные условия для системы (1.1) — (1.5) формулируются следующим образом:

$$\psi|_{AB} = 0, \quad \psi|_{CD} = \psi^*, \quad \operatorname{tg} \gamma_i(l) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial l} \right)^{-1} \right]_{l_i}, \quad i=1, 4 \quad (1.6)$$

$$Rc_u|_{mn} = Rc_{u1}(\psi^*) + [Rc_{u3}(\psi^*) - Rc_{u1}(\psi^*)] g(l), \quad \Phi|_{l_3} = \text{const} \quad (1.7)$$

$$[\psi]_{-}^{+} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{-}^{+} = 0, \quad R, Z \in (l_2, l_3) \quad (1.8)$$

Здесь $2\pi\psi^*$ — расход, γ_1 и γ_4 — углы наклона линий $\psi = \text{const}$ на l_1 и l_4 , \mathbf{n} и \mathbf{l} — единичные векторы касательной и нормали (фиг. 1), $g(l)$ — заданная функция длины дуги l вдоль mn , определяющая закон изменения Rc_u на mn . Предполагается, что

$$g|_m = 0, \quad g|_n = 1, \quad T|_{l_3} = 1, \quad [\tau]_{-}^{+} = 0$$

$$R, Z \in (l_2, l_3); \quad \left. \frac{\partial h}{\partial q_1} \right|_{\psi, q_2} = \left. \frac{\partial h}{\partial q_2} \right|_{\psi, q_1} = 0, \quad R, Z \in (l_3)$$

Равенство $T|_{l_3} = 1$ совместно с условием $\Phi|_{l_3} = \text{const}$ обеспечивает непрерывность скорости \mathbf{c} на выходной кромке l_3 . Соотношения (1.8) представляют собой частный случай (при $[rc_u]_{-}^{+} = 0, [\tau]_{-}^{+} = 0$) условий для разры-

вов параметров осесимметричного течения на кромках лопастных систем турбомашин (см., например, [9–10]). При известных $T(\psi, q_1, q_2)$, $E_i(\psi)$, $h(\psi, q_1, q_2)$, $Rc_{ui}(\psi)$, $i=1, 3$, для расчета течения в D_1-D_3 первоначально решается эллиптическое уравнение (1.1) для $\psi(q_1, q_2)$ при граничных условиях (1.6), (1.8). При найденной ψ функции Φ и Rc_u в D_2 определяются из системы гиперболических уравнений (1.2), (1.3) с учетом граничных условий (1.7) (см. [8]). В общем случае непрерывность Rc_u на l_2 , использованная в (1.8), может быть обеспечена, например, путем надлежащего выбора положения входной кромки рабочего колеса l_2 без изменения при этом решении краевой задачи (1.1), (1.4)–(1.6), (1.8) (см. [4]). Для дальнейшего важно, что определение функции $\psi(q_1, q_2)$ осуществляется независимо от решения системы (1.2), (1.3) для Φ и Rc_u .

Ставится следующая оптимальная задача. Определить распределение закрутки потока $Rc_{u3}(\psi)$ за рабочим колесом с целью максимизировать мощность N , снимаемую с вала гидротурбины

$$N = 2\pi r \omega \int_0^{\psi^*} (Rc_{u1} - Rc_{u3}) d\psi$$

при связях (1.1), (1.4)–(1.6), (1.8) и ограничении на безотрывность меридионального течения $\partial\psi/\partial q_2 \leq 0$ в D_1-D_3 . При этом считаются заданными величины ω , ψ^* , E_1 , Rc_{u1} , T , τ , $h|_{D_3}$, γ_1 , γ_4 , а также имеющийся перепад энергий

$$G = \psi^{*-1} \int_0^{\psi^*} \left(E_1 - \frac{p}{\rho} \Big|_{l_1} \right) d\psi, \quad \frac{p}{\rho} \Big|_{l_4} = \left(E_3 - \frac{1}{2} c^2 \right) \Big|_{l_4}$$

Здесь p — давление. Определение функций Φ и Rc_u в D_2 осуществляется после решения оптимальной задачи на основании соотношений (1.2), (1.3), (1.7).

2. Необходимые условия оптимальности. С помощью множителей Лагранжа $v(q_1, q_2)$, $\alpha = \text{const}$ составим расширенный функционал

$$I = N(2\pi r \psi^*)^{-1} + \alpha G + \psi^{*-1} \iint v L H_1 H_2 R dq_1 dq_2$$

Для промежуточного режима управления ($\partial\psi/\partial q_2 < 0$) условия, выражающие обращение в нуль первой вариации функционала I , записываются следующим образом. Функция $v(q_1, q_2)$ в областях D_1-D_3 определяется в результате решения краевой задачи

$$\text{div} \frac{\nabla v}{\tau R^2} - W = 0 \quad (2.1)$$

$$W_i = W|_{D_i} = v \left[\frac{d^2 E_i}{d\psi^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{d^2}{d\psi^2} (Rc_{ui})^2 \right], \quad i=1, 3$$

$$W|_{D_2} = (1-T)W_1 + TW_3 + v(F_3 - F_1) \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

$$AB, CD: v=0; \quad l_1: \frac{\partial v}{\partial n} + R \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v \text{tg } \gamma_1}{R} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$l_2, l_3: [v]_{-}^{+} = \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_{-}^{+} = 0 \quad (2.3)$$

$$l_4: \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v \text{tg } \gamma_4}{R} \right) - \frac{\alpha}{2} \left[3 \frac{\partial c_s^2}{\partial l} + (Rc_{u3})^2 \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{R^2} \right] = 0 \quad (2.4)$$

Здесь $c_s = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$ — меридиональная проекция вектора скорости c . Замыкающее соотношение, выражающее обращение в нуль коэффициента при вариации $\delta Rc_{u3}(\psi)$ в δI , записывается в форме

$$A = -\omega(1-\alpha) + \alpha \frac{Rc_{u3}}{R^2} \Big|_{i_1} - Rc_{u3} \frac{d}{d\psi} \int_{s_2}^{s_4} \frac{\nu T ds}{\tau R^2 c_s} + \\ + \omega \frac{d}{d\psi} \int_{s_2}^{s_4} \frac{\nu T ds}{\tau c_s} = 0 \quad (2.5)$$

Здесь ds — элемент длины дуги вдоль линии $\psi = \text{const}$; $s_i = s|_{i_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Необходимые условия стационарности I в случае возникновения в оптимальном решении граничного режима $\partial\psi/\partial q_2 = 0$ в некоторой части расчетной области приведены в [4].

Необходимое условие оптимальности второго порядка получается путем рассмотрения выражения для приращения функционала I , составленного с учетом квадратичных по вариациям зависимых переменных слагаемых. Эти слагаемые могут быть вычислены в результате расчета возмущенного течения, порожденного слабой локальной вариацией $\delta Rc_{u3}(\psi)$ функции Rc_{u3} в предположении $|d\delta Rc_{u3}/d\psi| < \infty$ (см. [4]). В окончательной форме упомянутое выше условие имеет вид неравенства

$$\alpha \left(\frac{3}{2} \frac{B^2}{c_s^2} + \frac{1}{2R^2} + \frac{BRc_{u3}}{R^2 c_s^2} \right) \Big|_{i_1} - \frac{d}{d\psi} \int_{s_2}^{s_4} \frac{\nu T ds}{2\tau R^2 c_s} + \\ + \int_{s_2}^{s_4} \frac{\nu BT}{\tau^2 R^2 c_s^3} \frac{dRc_{u3}}{d\psi} ds - \int_{s_2}^{s_4} \frac{\nu B^2}{\tau^2 c_s^3} \frac{\partial \ln T}{\partial \psi} \Big|_{q_1, q_2} ds \leq 0 \quad (2.6) \\ B = \frac{T}{R^2} (\omega R^2 - Rc_{u3})$$

3. Результаты расчетов. Численное решение оптимальной задачи осуществлялось с помощью метода проекции градиента (см., например, [11]). Итерационный переход от $Rc_{u3}^k(\psi)$ к $Rc_{u3}^{k+1}(\psi)$, приводящий к последовательному увеличению функционала N , производился с помощью соотношения (см. (2.5))

$$Rc_{u3}^{k+1} = Rc_{u3}^k + \beta A(q_1, q_2, \nu^k, \psi^k, Rc_{u3}^k, \alpha^k)$$

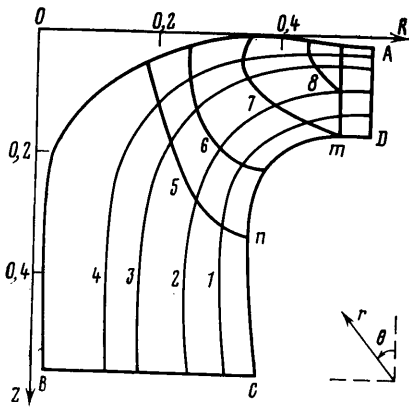
где k — номер итерации, а $\beta > 0$ — параметр, определяющий скорость движения по градиенту. При этом функции $\psi^k(q_1, q_2)$, $\nu^k(q_1, q_2)$ и изопериметрическая константа α^k определялись с помощью (1.1), (1.4) — (1.6), (1.8), (2.1) — (2.4) и равенства $\delta G = 0$, отвечающего заданию располагаемого перепада энергий G . Итерационный процесс заканчивался при достижении заданной точности расчета $\epsilon (\max_{\psi} |AR^2| / \max_{\psi} |Rc_{u3}| \leq \epsilon)$.

Для найденного таким образом стационарного решения проверялось необходимое условие оптимальности второго порядка (2.6). При известном оптимальном распределении $Rc_{u3}(\psi)$ функции Φ и Rc_u в D_2 вычислялись на основании (1.2), (1.3), (1.7) с использованием сеточно-характеристического метода (см., например, [8]).

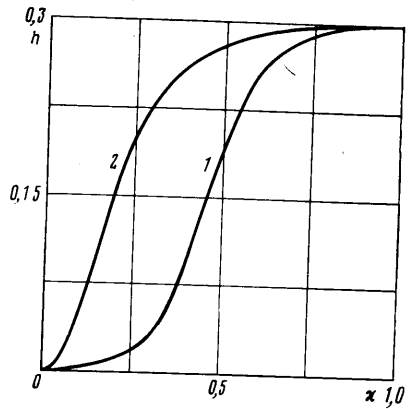
На фиг. 2–5 приведены результаты вычислений, выполненных с помощью изложенного выше метода применительно к условиям проектирования радиально-осевой гидротурбины, форма проточной части которой изображена на фиг. 2. Полагались (см. фиг. 2)

$$q_1 = \theta; \quad q_2 = r \left(\text{tg } \theta = \frac{Z - Z_0}{R - R_0}, \quad r = [(R - R_0)^2 + (Z - Z_0)^2]^{1/2} \right); \quad R_0 = 0,7$$

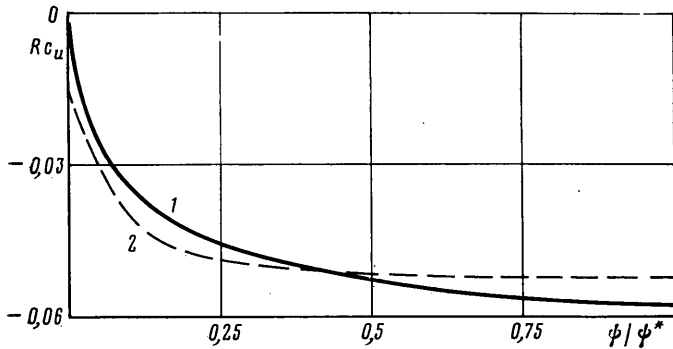
$$Z_0 = 0,562; \quad \omega = 8,9; \quad \psi^* = 0,0748; \quad G = 10,258; \quad E_1 = 9,81; \quad Rc_{u1} = 1$$



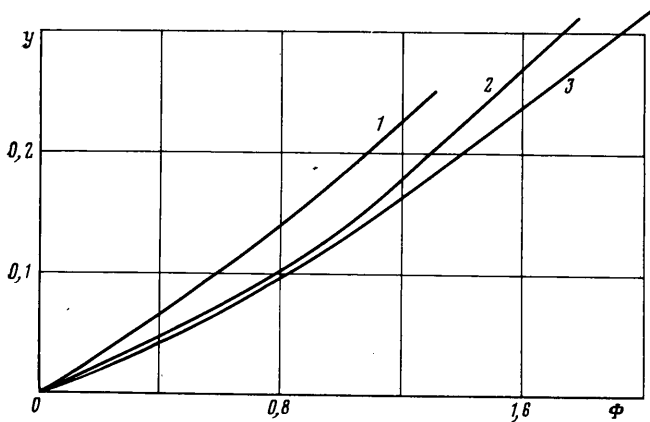
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = 0; \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = 0,329(R - 0,02); \quad g = 1 - (1-x)^3; \quad x = \frac{s-s_2}{s_3-s_2}$$

$$T = \frac{(\xi_3 - \xi_2)^2}{(\xi_3 - \xi_2)^2} + \frac{\psi^* - \psi}{2\psi^*} \frac{(\xi_2 - \xi)(\xi_3 - \xi)}{(\xi_3 - \xi_2)^2}; \quad \xi_2 = 0,0833; \quad \xi_3 = 0,4583$$

Здесь $\xi = \xi(r, \theta)$, $\eta = \eta(r, \theta)$ — координаты, в которых расчетная область $D_1 - D_3$ изображается в виде единичного квадрата, а линии l_2, l_3 — в виде прямых $\xi|_{l_2} = \xi_2$, $\xi|_{l_3} = \xi_3$ (см. [8]). Функция $h(\psi, q_1, q_2)$ в D_2 задавалась с учетом расчетного исследования профильных потерь энергии на поверхностях тока $\psi = \text{const}$, произведенного по методу [12]. Это исследование показало, в частности, что величина суммарных потерь $h(\psi)|_{D_2}$ не сильно отличается от константы для радиально-осевых гидротур-

бин, приведенные параметры которых близки к рассматриваемым в настоящем примере. Распределение $h(\psi, q_1, q_2)$ в области D_2 задавалось с помощью формулы

$$h(\psi, \kappa) = h(0, \kappa) + \frac{\psi}{\psi^*} [h(\psi^*, \kappa) - h(0, \kappa)], \quad \kappa = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2}$$

Зависимости $h(0, \kappa)$ и $h(\psi^*, \kappa)$ показаны на фиг. 3 (кривые 1 и 2 соответственно). Эти зависимости были составлены с учетом данных о суммарной величине $h(\psi)|_{D_2}$, а также с учетом влияния степени нагруженности профилей решеток на поверхностях $\psi = \text{const}$ на характер распределения $h(\psi, q_1, q_2)$ (периферийные сечения лопасти в настоящем расчете вблизи входной кромки оказываются более нагруженными по сравнению с втулочными сечениями).

На фиг. 4 показано оптимальное распределение $Rc_{uz}(\psi)$, полученное с помощью описанного выше итерационного процесса (кривая 1). Линии $\psi = \text{const}$ в областях $D_1 - D_3$ и $\Phi = \text{const}$ в области D_2 , отвечающие оптимальному решению, изображены на фиг. 2 (значения ψ на линиях 1, 2, 3, 4 равны соответственно 0,0561; 0,0374; 0,0187; 0,0093; значения Φ на линиях 5, 6, 7, 8 равны соответственно 0; 0,659; 1,318; 1,823). На фиг. 5 в координатах Φ, y ($y = s|_{l_4 - s}$, s — длина дуги вдоль линии $\psi = \text{const}$) показаны бесконечно тонкие профили лопасти на трех поверхностях тока $\psi = \psi^*$, $\psi = \psi^*/2$, $\psi = 0$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Необходимое условие оптимальности второго порядка (2.6) в произведенном расчете было выполнено. Отметим, что циркуляция скорости на поверхности тока ($\psi = \text{const}$) $\Gamma(\psi) = (Rc_{u1} - Rc_{u3})2\pi$ для найденного оптимального решения близка к постоянной, за исключением небольшой окрестности точки $\psi = 0$. Выигрыш по функционалу N составил 2,36% по сравнению с решением, отвечающим линейному закону изменения меридиональной скорости $c_s = aR$ на l_4 (константа a определялась по заданному расходу $2\pi\psi^*$). На фиг. 4 для рассматриваемого примера показано также распределение $Rc_{uz}(\psi)$ (кривая 2), полученное в результате решения одномерной оптимальной задачи при использовании в качестве связей обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих параметры потока в сечении l_4 (подробнее см. об этом [2-4]). Кривизна меридиональных линий тока, входящая в указанные выше уравнения, полагалась равной нулю.

Результаты решения оптимальной задачи в рамках одномерного и двумерного подходов качественно совпадают, как это следует из фиг. 4. Расчеты производились на ЭВМ ЕС1052. При решении двумерной оптимальной задачи затраты машинного времени для расчетной сетки 20×25 и точности $\epsilon = 0,02$ составили 4 ч, а при решении одномерной оптимальной задачи — 4,5 мин.

Опыт произведенных расчетов для радиально-осевых гидротурбин показывает, что в оптимальных решениях энергия частиц жидкости за рабочим колесом $E_3(\psi)$ оказывается близкой к постоянной величине, за исключением, как правило, небольшой окрестности оси симметрии. Закрутка потока $Rc_{uz}(\psi)$ за рабочим колесом в оптимальных решениях практически равна нулю при $\psi = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Топаж Г. И.* Условия проектирования РК гидротурбины с наименьшими индуктивными потерями. — Энергомашиностроение, 1976, № 4, с. 1-3.
2. *Федоров А. В.* Минимизация выходных потерь энергии в гидротурбинах. — Журн. техн. физ., 1981, т. 51, № 5, с. 1032-1034.
3. *Климович В. И., Федоров А. В.* Проектирование лопаток турбин как задача оптимального управления. — В кн.: Аннот. докл. V Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике, Алма-Ата, 1981. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 190-191.
4. *Климович В. И., Федоров А. В.* Задачи оптимизации течений жидкости в гидротурбинах. Препринт физ.-техн. ин-та АН СССР № 753, 1982.
5. *Федоров А. В.* Об оптимальном профилировании лопастей гидротурбин. — Журн. техн. физ., 1981, т. 51, № 10, с. 2131-2133.
6. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
7. *Сироткин Я. А.* Аэродинамический расчет лопаток осевых турбомашин. М.: Машиностроение, 1972. 448 с.
8. *Жуковский М. И., Головачев Ю. П.* Профилирование лопастей РО гидротурбин в вихревом потоке. — Энергомашиностроение, 1976, № 9, с. 9-12.
9. *Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю.* Установившееся осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в многоступенчатых турбомашинах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 6, с. 3-15.
10. *Lurie K. A., Fedorov A. V., Klimovich V. I.* Conditions along the boundaries of blade zones within the flow tracts of turbines. — Int. J. Numer. Methods in Fluids, 1982, v. 2, № 3, p. 299-311.
11. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.
12. *Эгинберг И. Э., Раухман Б. С.* Гидродинамика гидравлических турбин. Л.: Машиностроение, 1978. 279 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.III.1983