

УДК 532.529

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОН НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ В ДИСПЕРСНЫХ ПОТОКАХ

ОСИПЦОВ А. Н.

При моделировании движения дисперсных смесей типа газ – частицы широко используется приближение взаимопроникающих континуумов [1]. Во многих приложениях малость объемной концентрации частиц позволяет моделировать среду частиц континуумом, лишенным собственных напряжений, а для определения межфазного силового и энергетического взаимодействия использовать выражения, справедливые для одиночной частицы в неограниченной жидкости [2]. При решении ряда задач обтекания тел дисперсной смесью [3–5] и исследовании вращающихся потоков запыленного газа [6] в рамках модели [2] было обнаружено возникновение в потоке линий или поверхностей, при приближении к которым числовая концентрация частиц неограниченно возрастает. В ряде случаев (как отмечалось ранее в [7–8]) наличие особенности концентрации связано с пересечением траекторий частиц.

В связи с ростом концентрации частиц вблизи особенностей встает вопрос о границах применимости модели невзаимодействующих частиц и ее возможном усложнении введением разрывов типа «пелена» [8]. Ниже рассмотрен ряд примеров движения дисперсной смеси с возникновением зон неограниченного роста концентрации частиц. Выявлена возможность существования интегрируемых и неинтегрируемых особенностей концентрации. С использованием функции распределения расстояния между частицами [9] определены условия отсутствия взаимодействия частиц. Показано, что в случае интегрируемых особенностей концентрации модель невзаимодействующих частиц применима в широком диапазоне определяющих параметров, так как, несмотря на бесконечное значение концентрации, расстояние между частицами остается много больше размера частицы.

1. Движения с интегрируемыми особенностями концентрации частиц.

Примем обычные предположения модели запыленного газа [2]: среда частиц состоит из одинаковых сфер радиуса σ , объемная концентрация частиц пренебрежимо мала, сопротивление пробной частицы подчиняется закону Стокса, броуновское движение и взаимодействие частиц отсутствуют. Учет влияния частиц на движение несущей фазы является не принципиальным усложнением для последующего изложения, поэтому для простоты будем считать поле скоростей несущей фазы заданным.

Уравнения стационарного движения среды частиц в безразмерном виде таковы [4]

$$(\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s = \beta (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \quad \text{div } n_s \mathbf{V}_s = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{V} – скорость несущей фазы, параметры частиц отмечены индексом s . В качестве масштабов при обезразмеривании приняты: характерный линейный размер задачи L , характерная скорость несущей фазы v_0' и концентрация частиц n_{s0}' (здесь и далее штрихом отмечены размерные масштабы величин), $\beta = 6\mu_0 L / m v_0'$, m – масса частицы, μ – вязкость несущей фазы.

Пусть решение (1.1) для $n_s(\mathbf{x})$ имеет особенность в точке \mathbf{x}_0 ($n_s \rightarrow \infty$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$). Обозначим $S(\mathbf{x}_0, r)$ – шар радиуса r с центром в \mathbf{x}_0 . Пусть при $r \rightarrow 0$ имеет место соотношение

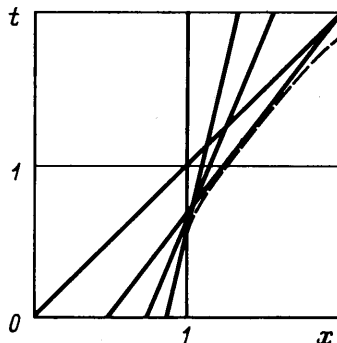
$$N(\mathbf{x}_0, r) = \int_S n_s d\mathbf{x} = k r^\nu + o(r^\nu) \quad (1.2)$$

Здесь все переменные обезразмерены, как в (1.1), k и γ — положительные константы.

Назовем порядком особенности концентрации частиц показатель степени γ . Такое определение применимо для интегрируемых особенностей концентрации частиц, для неинтегрируемых особенностей интеграл в (1.2) не существует. Ниже приведены три примера движений, являющихся типичными элементами пространственных движений запыленного газа с возникновением интегрируемых особенностей концентрации частиц.

А. Рассмотрим одномерное нестационарное движение среды частиц. Для простоты предположим, что на рассматриваемом масштабе времени сопротивлением несущей фазы можно пренебречь, т. е. частицы достаточно инертны. Пусть при $t=0$ частицы занимают область $0 \leq x_0 \leq 1$, имеют постоянную концентрацию и распределение скоростей

$$u_s(x_0, 0) = 1 - x_0^2$$



Все переменные безразмерны. В качестве масштабов выбраны: длина области, занятой частицами в начальный момент L , максимальная скорость частиц в начальный момент v_{s0}' , начальная концентрация n_{s0}' , масштаб времени L/v_{s0}' . В лагранжевых координатах закон движения среды частиц и уравнение неразрывности имеют вид

$$x = x_0 + (1 - x_0^2)t, \quad n_s = 1/|1 - 2x_0t| \quad (1.3)$$

Диаграмма движения частиц в плоскости x, t представлена на фигуре. При $t=1/2$ в среде частиц образуется «складка», возникает неоднозначность поля скоростей. (Отметим, что решения такого типа рассматривались ранее в [7].) Из (1.3) следует, что концентрация обращается в бесконечность на огибающей траекторий частиц, уравнение которой имеет вид

$$x = 1/4t + t, \quad t \geq 1/2$$

В эйлеровых координатах в области, занятой частицами, при $x < 1$ и выше прямой $t=x$ имеем

$$n_{s1} = 1/(1 - 4xt + 4t^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

В оставшейся области, занятой частицами, имеем $n_s = 2n_{s1}$. Считаем, что частицы, движущиеся по направлению к огибающей траекторий и от нее, принадлежат к различным не взаимодействующим сплошным средам, что верно только для очень разреженных систем. Определим порядок особенности концентрации частиц на огибающей. Из (1.4) получаем

$$n_s \sim 1/t^{1/2} x_1^{-1/2}, \quad x_1 = 1/4t + t - x$$

Функция $N(r)$ из (1.2) в точках бесконечной концентрации при малых r примет вид

$$N(r) \sim 8\pi r^{5/2}/5t^{1/2}, \quad t \geq 1/2$$

Отметим, что решения для концентрации частиц, аналогичные рассмотренному выше, могут реализоваться при прохождении по запыленному газу затухающих ударных волн. Например, в работе [10] отмечена тенденция к образованию «складок» в среде частиц при сильном взрыве в запыленном газе.

Аналогичный тип особенности концентрации возникает на огибающей траекторий частиц, отраженных от поверхности обтекаемого запыленным газом затупленного тела [5, 9].

Б. Рассмотрим задачу о движении частиц в окрестности критической точки потенциального потока. В ряде работ указывалось на наличие особенностей концентрации частиц в критической точке обтекаемого газозавесью затупленного тела в режиме отсутствия инерционного осаждения частиц. Впервые неограниченный рост концентрации частиц в критической точке был установлен, по-видимому, в [11], аналогичный результат был получен в [3, 5]. Ниже определим порядок особенности концентрации твердой фазы в окрестности критической точки. Пусть в области размерных координат $y' \leq L, x' \leq L$ поле скоростей несущей фазы имеет вид $u' = \delta x', v' = -2^j \delta y'$ (в случае плоской симметрии $j=0$, осевой — $j=1$). При $y'=L$ заданы постоянные скорости частиц $v_s'(x', L) = -v_0', u_s'(x', L) = 0$ и концентрация n_{s0}' . Для простоты выкладок ограничимся случаем $v_c' = L\delta$. В качестве масштабов при обезразмеривании координат примем L , компонент скорости — v_0' , концентрации — n_{s0}' . Уравнения движения частиц (1.1) в виде соотношений вдоль характеристик и граничные условия в безразмерном виде примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \beta(\dot{x} - x) &= 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{y} + \beta(\dot{y} + 2^j y) &= 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1 \end{aligned}$$

Здесь координаты частиц x, y являются функциями безразмерного времени движения частицы вдоль траектории $t = t' v_0' / L$. При $\beta > 2^{j/4}$ частицы не достигают поверхности обтекаемого тела за конечное время, решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 [b \exp(at) + a \exp(-bt)] / (a+b) \\ y &= [(d-1) \exp(-ct) + (1-c) \exp(-dt)] / (d-c) \\ a &= \beta(-1 + \sqrt{1+4/\beta})/2, \quad b = \beta(1 + \sqrt{1+4/\beta})/2 \\ c &= \beta(1 - \sqrt{1-2^{j/4}/\beta})/2, \quad d = \beta(1 + \sqrt{1-2^{j/4}/\beta})/2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнение неразрывности среды частиц удобно записать в лагранжевых координатах x_0, y_0 [12] (здесь x_0, y_0 — начальные координаты индивидуализируемой точки среды частиц), из которого при $y_0 = 1$ получаем соотношение для определения концентрации частиц вдоль траектории

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^j n_s(x_0, t) \frac{\partial y(x_0, t)}{\partial t} \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} + 1 = 0 \quad (1.6)$$

Производные $\partial y / \partial t$ и $\partial x / \partial x_0$ находятся из (1.5). Видно, что концентрация частиц в области течения зависит только от y . Определим поведение n_s при малых y . Из (1.5) следует, что $t \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$, причем $y \sim (d-1) \exp(-ct) / (d-c)$. Из (1.6) получаем при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n_s(t)} \sim \frac{c(d-1)}{d-c} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{1+j} \exp[t(2^j a - c)]$$

Исключая t , получаем при малых y соотношение

$$\frac{1}{n_s(y)} \sim c \left(\frac{b}{a+b}\right)^{1+j} \left(\frac{d-1}{d-c}\right)^{j a/c} y^p, \quad p = 1 - 2^j a/c$$

Так как $\beta > 2^{j/4}$, то из (1.5) имеем в случае плоской симметрии $0 \leq p < < 2 - \sqrt{2}$, в случае осевой симметрии — $0 \leq p < 3 - \sqrt{6}$. Следовательно, особенность концентрации частиц на поверхности обтекаемого тела — интегрируемая, причем с увеличением β особенность ослабляется, т. е. p уменьшается. Для определения порядка особенности в точках плоскости $y=0$ находим функцию $N(r)$, введенную в (1.2)

$$N(r) \sim k r^\gamma, \quad \gamma = 2 + 2^j a/c$$

$$k = \frac{2\pi}{2^j a (2 + 2^j a/c)} \left(\frac{a+b}{b}\right)^{1+j} \left(\frac{d-c}{d-1}\right)^{2 a/c}$$

В случае плоской симметрии имеем неравенство $1+\sqrt{2}<\gamma<3$; в случае осевой симметрии $\sqrt{6}<\gamma<3$.

В. Рассмотрим особенность концентрации, возникающую на оси вращения при движении частиц в поле скоростей вязкой несущей фазы, заданном решением Бюргера [13], которое в безразмерном виде в цилиндрической системе координат имеет вид

$$u=-\rho, v=\Gamma_{\infty}[1-\exp(-\rho^2/2)], w=2z \quad (1.7)$$

Здесь u, v, w — соответственно ρ, φ, z -компоненты скорости несущей фазы, Γ_{∞} — константа, пропорциональная безразмерной циркуляции скорости. В качестве характерных масштабов при обезразмеривании выбраны: для координат $L=(\nu/A)^{1/2}$, для компонент скорости AL (здесь ν — кинематическая вязкость, $A=du'/d\rho'$ ($\rho'=0$), штрихом отмечены размерные величины). Решение Бюргера всегда можно представить в виде (1.7), выбрав при обезразмеривании указанные выше масштабы величин. В работе [6] изучено автомодельное решение уравнений движения частиц (1.1) вида (масштаб компонент скорости AL)

$$u_s=f_s(\rho^2)/\rho, v_s=\Gamma_s(\rho^2)/\rho, w_s=zg_s(\rho^2) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в уравнения (1.1), записанные в цилиндрических координатах, при значениях параметров $\Gamma_s(\infty)=\Gamma_{\infty}$, $\beta>\Gamma_{\infty}^2/4$ можно получить [6] решение в окрестности оси z , которое в наших обозначениях примет вид

$$u_s=-a\rho, v_s=b\rho, b=[(\beta/2)(4-\beta+((4-\beta)^2+4\Gamma_{\infty}^2)^{1/2})]^{1/2}/2 \\ a=\beta(1-\Gamma_{\infty}/2b)/2, g_s(0)=\beta[-1+(1+8/\beta)^{1/2}]/2 \quad (1.9)$$

Концентрация частиц с приближением к оси z неограниченно возрастает [6]. Определим порядок особенности концентрации частиц на оси z . Из уравнения неразрывности среды частиц в цилиндрических координатах при $\rho \rightarrow 0$ получаем уравнение для главного члена разложения $n_s(\rho)$

$$\rho \frac{d}{d\rho}[\ln(\rho n_s)] = \frac{c}{a} - 1, \quad c=g_s(0)$$

Отсюда имеем

$$\ln(\rho n_s) = (c/a - 1) \ln \rho + B \quad (1.10)$$

Здесь B — константа, значение которой следует находить из решения задачи во всей области движения.

Из (1.10) при $\rho \rightarrow 0$ получаем

$$n_s \sim B/\rho^p, \quad p=2-c/a$$

При $\beta>\Gamma_{\infty}^2/4$ из (1.9) имеем $a/c>0$, т. е. особенность концентрации на оси вращения интегрируема. В случае пренебрежимо малой закрутки потока ($\Gamma_{\infty}=0$) соотношения (1.9) значительно упрощаются и принимают вид

$$b=0, \quad a=[1-(1-4/\beta)^{1/2}]\beta/2$$

В этом случае линейное решение вида $u_s=-a\rho$ существует при $\beta>4$. Подсчитав интеграл от n_s по сфере радиуса r с центром на оси вращения потока, получаем

$$N(r) \sim \frac{B\pi^{3/2}\Gamma(1-p/2)}{(3-p)\Gamma(3/2-p/2)} r^{\gamma}, \quad \gamma=1+c/a$$

Здесь Γ — гамма-функция.

Для случая отсутствия вращения ($\Gamma_{\infty}=0$) при $\beta>4$ имеем неравенство для γ

$$\sqrt{3}<\gamma<3$$

С увеличением β особенность ослабляется, т. е. $\gamma \rightarrow 3$. Движения запыленных газов, аналогичные рассмотренному выше, могут иметь место в сепараторных устройствах, циклонных аппаратах, а также при крупномасштабных вихревых явлениях в атмосфере (торнадо, смерчи).

2. Пример неинтегрируемой особенности концентрации частиц. Характер особенности определяется предысторией движения частиц к точкам бесконечной концентрации. При некоторых условиях возможно возникновение неинтегрируемых особенностей.

Рассмотрим распределение концентрации частиц вблизи твердой поверхности в двухфазном пограничном слое на плоской пластине [4]. Пусть при $x \geq 0, y \geq 0$ поле скоростей несущей фазы в безразмерной форме имеет вид $u(x, y) = y, v = 0$. При $x = 0$ частицы имеют постоянную концентрацию $n_s = 1$ и скорость $u_s = 1, v_s = 0$. Масштаб длины L при безразмеривании выберем из условия $\beta = 1$, тогда уравнения (1.1) примут вид

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} = y - u_s, \quad \frac{\partial n_s u_s}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Решение (2.1) имеет вид

$$x = 1 - u_s - y (\ln |y - u_s| - \ln |y - 1|), \quad n_s = 1/u_s.$$

Для значений $x > 1$, при $y \rightarrow 0$ имеем $y \ln |y - u_s| \rightarrow -c$, где c — положительная константа. Следовательно, при $x > 1, y \rightarrow 0$ имеем $u_s \sim y, n_s \sim 1/y$, т. е. особенность концентрации на поверхности пластины не интегрируема.

3. Вычисление расстояния между частицами в точках бесконечной концентрации. Неограниченный рост концентрации частиц в рассматриваемых выше примерах свидетельствует об уменьшении расстояния между частицами вблизи особенностей. В случае неинтегрируемых особенностей в любом конечном объеме, содержащем точки бесконечной концентрации, находится бесконечное число частиц, что приводит к неограниченному уменьшению расстояния между ними. Предположение об отсутствии взаимодействия частиц, положенное в основу модели (1.1), не может быть выполнено в этом случае. Модель следует дополнить учетом взаимодействия частиц или введением поверхности разрыва типа «пелена».

В случае интегрируемых особенностей концентрации расстояние между частицами уменьшается не до нуля. Координаты частиц точно не известны, расстояние между частицами является случайной величиной, и для его определения необходимо применять методы теории вероятностей.

Пусть в объеме V происходит движение дисперсной смеси. В момент времени t_0 из уравнения неразрывности среды частиц имеем распределение концентрации $n_s'(x)$. Здесь и далее штрихом отмечены размерные величины. Следуя работе [9], определим расстояние между частицами следующим образом. Пусть в точку x_0 попала пробная частица. Случайную величину l' , равную расстоянию от пробной частицы до ближайшей к ней, назовем расстоянием между частицами в точке x_0 . Построим функцию распределения $F_l(r')$ случайной величины l' . Будем обозначать $P\{A\}$ вероятность события A . По определению [14] имеем

$$F_l(r') = P\{l' \leq r'\} = 1 - P\{l' > r'\}$$

Здесь $P\{l' > r'\}$ — вероятность того, что в сфере $S(x_0, r')$ нет ни одной частицы, кроме пробной. При введении сплошной среды невзаимодействующих частиц предполагалась их независимость (т. е. координаты частиц — независимые случайные величины). В силу этого для случайной величины η , равной числу частиц (кроме пробной) в $S(x_0, r')$, имеет место биномиальное распределение [14], пуассоновское приближение которого при большом общем числе частиц в объеме V имеет вид

$$P\{\eta = k\} = \frac{N^k}{k!} \exp(-N), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$N(r') = \int_S n_s' dx'$$

Отсюда получаем при $k=0$

$$P\{l > r'\} = P\{\eta=0\} = \exp[-N(r')]$$

Функция распределения расстояния между частицами примет вид

$$F_l(r') = 1 - \exp[-N(r')] \quad (3.1)$$

Функцию распределения (3.1) удобно использовать для определения границ применимости модели не взаимодействующих частиц в точках интегрируемых особенностей концентрации. Если считать, что частицы взаимодействуют только при столкновениях, то условием отсутствия взаимодействия в точке x_0 будет

$$P\{l \leq 2\sigma\} = 1 - \exp[-N(2\sigma)] \ll 1$$

Что эквивалентно условию

$$N(2\sigma) \ll 1 \quad (3.2)$$

Вводя безразмерные переменные и используя условие $\sigma/L \ll 1$, запишем (3.2) в виде

$$kn_{s0}'L^3(2\sigma/L)^{\gamma} \ll 1 \quad (3.3)$$

Здесь n_{s0}' — характерное значение числовой концентрации частиц далеко от точек особенностей концентрации, k и γ определены в (1.2). Удобно ввести в рассмотрение характерное значение объемной концентрации частиц $\alpha_{s0} = n_{s0}'4\pi\sigma^3/3$; тогда (3.3) примет вид

$$C\alpha_{s0}(L/\sigma)^{3-\gamma} \ll 1, \quad C = 2^{1/3}k/4\pi \quad (3.4)$$

Покажем, что условие (3.4) выполнено в рассмотренных в п. 1 примерах интегрируемых особенностей концентрации в широком диапазоне определяющих параметров. В примере А для всех $t \geq 1/2$ величина k ограничена $k < 8\pi^{1/2}/5$. В примере В соответственно при $j=0$ и 1 заведомо выполнены неравенства

$$k < 2\sqrt{2}\pi/(1+\sqrt{2}), \quad k < \pi/3$$

Поэтому в этих примерах величину C из (3.4) можно считать величиной порядка единицы практически во всем диапазоне $t \geq 1/2$ (А), $\beta > 2^{1/4}$ (В). Для газовзвесей типичен случай $\alpha_{s0} \approx 10^{-4}$, поэтому в примерах А и В при $L/\sigma \approx 10^4$ (например, $L = 100$ см, $\sigma = 10^{-2}$ см) выражение в левой части (3.4) $\approx 10^{-2}$. В примере В при $\Gamma_{\infty} = 0$ может реализоваться более сильный тип особенности ($\sqrt{3} < \gamma < 1 + \sqrt{2}$), поэтому модель не взаимодействующих частиц остается применимой в более узком диапазоне параметров.

Представляет интерес выразить среднее значение $M(l')$ и дисперсию $D(l')$ расстояния между частицами в точках особенностей концентрации через характеристики особенности k и γ . По определению [14] имеем

$$M(l') = \int_0^{\infty} r' \frac{dF_l}{dr'} dr' = \int_0^{\infty} \exp[-N(r')] dr' \quad (3.5)$$

$$D(l') = \int_0^{\infty} r'^2 \frac{dF_l}{dr'} dr' - M^2(l') = 2 \int_0^{\infty} r' \exp[-N(r')] dr' - M^2(l')$$

При таком определении предполагается, что с увеличением r' число частиц в сфере $S(x_0, r')$ растет так быстро, чтобы существовали интегралы в (3.5). Если ввести в (3.5) безразмерные переменные $r = r'/L$, $n_s = n_s'/n_{s0}'$, то показатели экспонент в (3.5) примут вид $[-N(r)/\epsilon]$, где $\epsilon = 1/n_{s0}'L^3$ — параметр, который мал для большинства задач, связанных с движением газовзвесей. Если при малых r $N(r) \sim kr^{\gamma}$, то при $\epsilon \rightarrow 0$ главные члены интегралов из (3.5) можно найти методом Лапласа [15] и получить выражения (с точностью до малых более высокого порядка по ϵ)

$$\frac{M(l')}{L} = \frac{\Gamma(1/\gamma)}{\gamma k^{1/\gamma}} \epsilon^{1/\gamma}, \quad \frac{D(l')}{L^2} = \left(\frac{M(l')}{L}\right)^2 \left[\frac{2\gamma\Gamma(2/\gamma)}{\Gamma^2(1/\gamma)} - 1 \right] \quad (3.6)$$

Здесь Γ — гамма-функция, k и γ определены в (1.2). Удобно выразить $\sigma/M(l')$ и $\sqrt{D(l')}/M(l')$ через α_{so} , σ/L , γ , k . Из (3.6) получаем

$$\frac{\sigma}{M(l')} = \frac{\gamma}{\Gamma(1/\gamma)} \left[\frac{3k}{4\pi} \alpha_{so} \left(\frac{L}{\sigma} \right)^{3-\gamma} \right]^{1/\gamma}, \quad \frac{\sqrt{D(l')}}{M(l')} = \left[\frac{2\gamma\Gamma(2/\gamma)}{\Gamma^2(1/\gamma)} - 1 \right]^{1/2}$$

В области значений параметров, при которых $M(l')$ в точках особенностей концентрации частиц становится порядка радиуса взаимодействия частиц, следует усложнять модель среды частиц учетом их взаимодействия или введением поверхности разрыва типа «пелена» [8]. Если неограниченный рост концентрации частиц связан с пересечением их траекторий и возникновением неоднозначности поля скоростей (пример А), вопрос о столкновениях частиц, движущихся по пересекающимся траекториям, должен быть рассмотрен отдельно.

Отметим также, что условие типа (3.4) в зонах неограниченного роста концентрации является по крайней мере достаточным условием устойчивости образований повышенной концентрации частиц, так как с уменьшением l' столкновения и взаимодействия частиц могут привести к возникновению нестационарных явлений в области течения.

В заключение автор благодарит В. П. Стулова и С. И. Чернышенко за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978, 336 с.
2. Марбл Ф. Динамика запыленных газов. — В кн.: Механика, Период. сб. перев. ин. статей., 1971, № 6, с. 48–89.
3. Васильков А. П. Окрестность критической точки затупленного тела в гиперзвуковом двухфазном потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 121–129.
4. Осипцов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 48–54.
5. Осипцов А. Н. Обтекание тел дисперсной смесью. М.; 1980, 60 с. (Ин-т мех. МГУ. Отчет № 2376).
6. Желева И. М., Стулов В. П. О винтовом движении запыленного газа. — В кн.: Газодинамика неравновесных процессов. Новосибирск, Ин-т теорет. и прикл. матем., 1981, с. 96–105.
7. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Среда из взаимодействующих частиц. М.: Наука, 1973, с. 352.
8. Крайко А. Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления. — ПММ, 1979, т. 43, № 3, с. 500–510.
9. Чернышенко С. И. О среднем расстоянии между частицами в запыленном газе при наличии особенностей «размазанной» плотности среды частиц. — Вестн. МГУ, Сер. матем. и механ., 1984, № 1, с. 69–70.
10. Меньшов И. С. Распространение сильных взрывных волн в дисперсной смеси. — Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 4, с. 808–811.
11. Волощук В. М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеиздат, 1971, 208 с.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963, с. 583.
13. Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. — In: Advances in Applied Mechanics. V. 1. N. Y. a. o.: Acad. Press., 1948, p. 197–199.
14. Розанов Ю. А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971, 286 с.
15. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977, 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VI.1983