

УДК 532.529

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ПЕРЕХОДНОМ ТЕЧЕНИИ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ В ТРУБЕ

БАБКИН В. А.

Построена полуэмпирическая модель течения волокнистой суспензии малой и средней концентрации в режимах, которые обычно называются смешанным и неразвитым турбулентным [1–4].

Показано, что, хотя течение волокнистой суспензии в этих режимах имеет сходные черты с турбулентным течением ньютоновской жидкости, например логарифмический профиль скоростей, характерные особенности течения в обоих режимах лучше объясняются не турбулентностью потока, а ориентацией волокон в нем и пластическим течением континуума волокон. По этой причине для смешанного и неразвитого турбулентного режимов здесь предложено общее название – переходное течение, чтобы отличать эти режимы от истинно турбулентного.

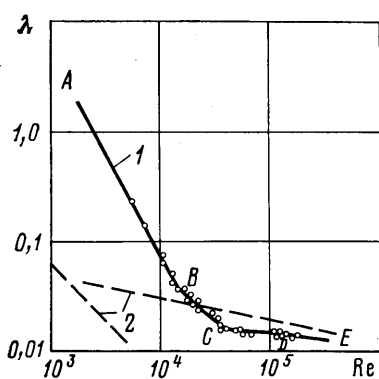
Полученные формулы качественно и количественно согласуются с экспериментальными результатами Ли и Даффи [2], Сандерса и Мейера [3], Миха и Паркера [4].

1. Если концентрация волокнистой суспензии превышает концентрацию седиментации, так что в покоящейся суспензии волокна могут образовывать упругую сеть, то при движении суспензии в трубе различают три режима: стержневое (ламинарное), смешанное и турбулентное течения [1–5].

На фигуре приведен взятый из работы [5] график зависимости коэффициента сопротивления круглой трубы λ от числа Рейнольдса $Re = 2vR/\nu$ (в логарифмических координатах) для суспензии, в которой волокна – крафт-целлюлоза Long Lac 17, несущая жидкость – вода, концентрация 0,25% (кривая 1). Для сравнения дан также график λ – Re для воды (кривая 2). Здесь и далее v – средняя скорость суспензии, R – радиус трубы, ν – кинематическая вязкость несущей жидкости.

При течении в трубе любой волокнистой суспензии концентрации большей концентрации седиментации график зависимости λ – Re совершенно аналогичен графику на фигуре [1, 2], и поэтому далее этот график будет рассматриваться как типичный при течении суспензии в трубе. Каждому режиму течения на кривой $ABCDE$ соответствует свой участок [1, 2]: AB – стержневое течение; BC – смешанное течение; CDE – турбулентное течение. Конкретный вид кривой определяется сортом волокон, концентрацией суспензии, шероховатостью трубы.

Модель стержневого течения волокнистой суспензии построена в работах [6, 7]. В настоящей работе рассматриваются течения суспензии в гладких трубах в режимах, соответствующих участкам BC и CD кривой 1, которые, как будет показано далее, можно исследовать одновременно.



Перечислим основные экспериментальные факты, которые следует учесть при построении модели течения.

Режим *BC* (смешанное течение). В точке *B* начинается отделение волокон от стержня, который до этого двигался как твердое тело. Количество отделившихся волокон растет с ростом скорости. Отделившиеся волокна ориентированы по потоку, причем у стенки волокна располагаются прямо вдоль линий тока [1].

Профиль скоростей в концентрическом слое между стенкой и стержнем радиуса $r_0 < R$ имеет вид [2–4]

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right) + \delta, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.1)$$

где r — расстояние от оси трубы, τ_w — модуль напряжения на стенке трубы, ρ — плотность несущей жидкости, v_* — динамическая скорость, K и δ — эмпирические параметры, которые зависят от сорта волокон, концентрации суспензии и средней скорости.

В области $0 \leq r \leq r_0$ скорости точек по сечению постоянны, и суспензия движется как твердый стержень [1, 2, 4].

По измерениям [8], при стержневом течении возмущения скорости в пристеночном слое чистой жидкости вплоть до точки *B* только низкочастотные: длина волны возмущений меньше толщины пристеночного слоя не более чем в 2 раза. Начиная с точки *B*, в жидкой фазе суспензии появляются возмущения скорости более высокой частоты, однако и в этом случае подавляющая часть энергии возмущений обнаружена все еще при низких частотах порядка v/R , тогда как течение чистой жидкости при этих же числах Рейнольдса явно турбулентное (кривая 2).

Коэффициент сопротивления λ убывает с ростом скорости и при некоторой скорости становится меньше коэффициента сопротивления для чистой несущей жидкости, причем увеличение концентрации суспензии дает большее падение сопротивления [2, 4].

Режим *CD* (неразвитое турбулентное течение). Переход от режима *BC* к режиму *CD* осуществляется плавно, без явно выраженной точки перехода [4]. В точке перехода стержень в центре потока еще не совсем разрушен, его радиус $r_0 \approx 0,2R$ [2]. Информация о поведении стержня при дальнейшем увеличении скорости неоднозначна: по сведениям [4], даже при самых больших скоростях в центре трубы имеется уплощение профиля скоростей, которое указывает на присутствие стержня, тогда как, согласно опытам [2], при некоторой скорости между точками *C* и *D* стержень можно считать полностью разрушенным.

Профиль скорости по-прежнему имеет вид (1.1). Величина K уменьшается с увеличением концентрации и увеличивается с ростом средней скорости. Однако, начиная с некоторой скорости между точками *C* и *D*, величины K и δ можно считать не зависящими от средней скорости [2, 4].

Коэффициент сопротивления λ при течении суспензии меньше коэффициента сопротивления для чистой несущей жидкости. Он слабо меняется или даже постоянен во всем режиме *CD*, причем течение с λ , слабо зависящим от средней скорости v , осуществляется при скоростях меньших, чем течение чистой несущей жидкости [1, 2, 4]. Согласно [8], как и ранее, практически всю энергию несут возмущения с частотами порядка v/R .

Приведенные факты дают несколько необычную по сравнению с чистой жидкостью картину течения волокнистой суспензии. Логарифмический профиль скоростей, слабая зависимость λ от средней скорости в режиме *CD* указывают на развитое турбулентное течение с турбулизацией потока большей, чем в чистой жидкости. Однако низкие частоты возмущений, уменьшение сопротивления по сравнению с чистой жидкостью противоречат этому утверждению. Ниже будет показано, что все факты получают

естественное объяснение, если принять, что в режимах *BC* и *CD* не турбулентность потока, а ориентация волокон в суспензии и их взаимодействие являются главными факторами, определяющими течение суспензии. По этой причине режимы движения суспензии на участках *BC* и *CD* удобнее называть переходным течением в отличие от истинного турбулентного течения, которое наступает в точке *D*.

2. При построении модели в качестве основного примем течение в режиме *BC*, рассматривая течение в режиме *CD* как его предельный случай, когда радиус стержня стремится к нулю. Пусть волокнистая суспензия находится в установившемся смешанном течении (режим *BC*) в прямой круглой трубе радиуса *R*. Область течения $0 \leq r \leq R$ состоит из двух частей: при $0 \leq r \leq r_0$ волокна, переплетаясь, образуют стержень радиуса r_0 и суспензия движется поступательно, как твердое тело; при $r_0 < r \leq R$ суспензия представляет собой смесь слабо связанных волокон, образовавшихся при разрушении стержня, и несущей их жидкости.

В пристеночной области $r_0 < r \leq R$ будем рассматривать суспензию как совокупность континуума, образованного жидкой фазой, и континуума, образованного волокнами. Жидкость, составляющая жидкую фазу суспензии, считается несжимаемой. Уравнения одномерного движения жидкой и твердой фаз в цилиндрических координатах r, φ, x (ось x — по оси трубы в направлении течения) соответственно имеют вид [9]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{xr}) + F = m \frac{dp}{dx} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_{xr}) - F = (1 - m) \frac{dp}{dx} \quad (2.2)$$

где p — давление, τ_{xr} и σ_{xr} — эффективные касательные напряжения соответственно в жидкой и твердой фазах, m — пористость, F — отнесенная к единице объема сила, с которой волокна действуют на жидкую фазу.

Если уравнения (2.1) и (2.2) сложить и затем проинтегрировать при условии, что на оси трубы напряжения конечны, то получим

$$\tau_{xr} + \sigma_{xr} = -r \tau_w / R, \quad \tau_w = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dx} \quad (2.3)$$

Чтобы найти профиль скоростей, примем некоторые допущения относительно τ_{xr} и σ_{xr} . В конечном счете обоснованность этих допущений оправдывается хорошим согласием расчетных и экспериментальных результатов.

Вязкие напряжения в жидком континууме определим формулой

$$\tau_{xr} = M du/dr \quad (2.4)$$

где $u = u(r)$ — скорость точек и M — эффективная вязкость жидкого континуума. Вязкие свойства жидкого континуума определяются вязкостью образующей его жидкости, концентрацией волокон в суспензии и их ориентацией. Считая воздействие ориентации волокон на течение жидкости аналогичным влиянию ориентации молекул на течение жидких кристаллов нематического типа, коэффициент M зададим простейшей формулой, вытекающей из общей зависимости для измеряемой вязкости нематика, полученной Эриксоном [10]

$$M = \rho \kappa^2 (R - r)^2 \left| \frac{du}{dr} \right| \quad (2.5)$$

где ρ — плотность несущей жидкости, κ — безразмерная постоянная, определяемая вязкостью жидкости, сортом и концентрацией волокон.

Континуум ориентированных по потоку волокон в области $r_0 < r \leq R$ будем считать жесткопластическим телом с пределом текучести σ_0 , так что $|\sigma_{xr}| = \sigma_0$.

Уточним знак напряжений σ_{xr} в уравнении (2.2). Ограничимся суспензиями малой и средней концентрации, $c \leq 3\%$, экспериментально исследованными наиболее детально (см. [1-5]). В этом случае пористость m суспензии близка к единице (например, для суспензии белой сульфитной целлюлозы [3] $m > 0,93$ при $c \leq 3\%$), поэтому $(1-m) \ll m$. Если пренебречь правой частью уравнения (2.2) и учесть, что напряжение σ_{xr} постоянно, то из уравнения (2.2) следует

$$\sigma_{xr} = rF \quad (2.6)$$

Примем, что в области $r_0 < r < R$ волокна движутся быстрее, чем жидкая фаза («эффект скольжения»). Тогда, очевидно, $F > 0$; по формуле (2.6) $\sigma_{xr} > 0$, и следовательно

$$\sigma_{xr} = \sigma_0 \quad (2.7)$$

Если, как и в полуэмпирической теории Прандтля турбулентного течения в трубе, положить, что полные напряжения ($\tau_w + \sigma_{xr}$) в области $r_0 < r \leq R$ равны ($-\tau_w$), то с учетом формул (2.4), (2.5), (2.7) и неравенства $du/dr < 0$ уравнение (2.3) принимает вид

$$\rho \kappa^2 (R-r)^2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = \tau_w + \sigma_0 \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) дает профиль скоростей при $r_0 < r < R$

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right) + \delta \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{\tau_w}} \quad (2.10)$$

В работе [11] показано, что с точностью, допускаемой экспериментами, профили скоростей всех волокнистых суспензий в рассматриваемом режиме течения проходят через точку с координатами $u/v_* = 14$, $v_*(R-r)/v = 30$. Это условие позволяет найти постоянную δ и профиль скоростей при $r_0 < r < R$

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{v_*(R-r)}{30v} + 14 \quad (2.11)$$

Условие прилипания жидкой фазы на поверхности волокнистого стержня $r=r_0$ дает, что при $0 \leq r \leq r_0$

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{v_*(R-r_0)}{30v} + 14 \quad (2.12)$$

Поскольку по сечению стержня $0 \leq r \leq r_0$ скорости фаз равны и постоянны, то полные касательные напряжения в стержне равны касательным напряжениям в его сети волокон. Таким образом, из условия жесткопластической деформации континуума волокон следует, что на поверхности стержня $r=r_0$ полные касательные напряжения по модулю равны пределу текучести σ_0 и поэтому

$$r_0 = \sigma_0 R / \tau_w \quad (2.13)$$

Интегрирование выражений (2.11) и (2.12) по сечению трубы с учетом формулы (2.13) и переход к коэффициенту сопротивления $\lambda = 8v_*^2/v^2$ дают формулу для коэффициента сопротивления при смешанном течении

суспензии (режим *BC* на фиг. 1)

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{1+\xi}}{\kappa} \left(\ln \frac{v_* R (1-\xi)}{30\nu} + \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{3}{2} \right) + 14 \quad (2.14)$$

где $\xi = r_0/R = \sigma_0/\tau_w < 1$.

При увеличении средней скорости напряжение τ_w растет, радиус стержня уменьшается и с точностью до членов порядка ξ^2 формулу (2.14) можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2+\xi}{2\kappa} \left(\ln \frac{v_* R}{30\nu} - \frac{3}{2} \right) + 14 \quad (2.15)$$

Введем обозначение

$$A = \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \left(\ln \frac{v_* R}{30\nu} - \frac{3}{2} \right) \quad (2.16)$$

С ростом скорости течения ξ убывает, а v_* растет, и, как будет показано в следующем пункте, возможно существование такого диапазона скоростей (режим *CD* на фигуре), в котором величина A изменяется слабо, так что с достаточной степенью точности можно принять $A = \text{const}$. Тогда коэффициент сопротивления λ также постоянен и определяется формулой

$$\frac{\lambda}{8} = \left(\frac{A}{\kappa} + 14 \right)^{-2} \quad (2.17)$$

которая аналогична известным, по существу эмпирическим формулам работ [2, 3]

3. В соответствии с описанными в п. 1 результатами экспериментов из формулы (2.10) следует, что с ростом средней скорости, когда τ_w также растет, параметр K возрастает, приближаясь к постоянному значению κ , причем при больших скоростях рост K замедляется. При увеличении концентрации суспензии предел текучести σ_0 , характеризующий прочность континуума волокон, растет и тогда K убывает.

Таблица 1

$c, \%$	$v, \text{ м/с}$	K	K_0	λ	A
0,42	2,36	0,283	0,28	0,0114	4,544
0,42	3,09	0,306	0,30	0,0113	4,458
0,42	3,68	0,317	0,32	0,0112	4,477
0,42	4,89	0,329	0,33	0,0109	4,579
0,79	3,91	0,247	0,24	0,0098	5,616
0,79	4,28	0,253	0,25	0,0094	5,528
0,79	5,50	0,275	0,28	0,0092	5,271
0,79	6,10	0,284	0,29	0,0092	5,216
0,79	6,71	0,290	0,29	0,0092	5,190
0,79	7,32	0,296	0,295	0,0091	5,182
0,79	7,95	0,300	0,30	0,0091	5,187
0,79	8,41	0,303	0,30	0,0091	5,196
0,79	9,17	0,307	0,30	0,0090	5,218

В табл. 1 приведены результаты расчета K , λ и A соответственно по формулам (2.10), (2.14) и (2.16) и экспериментальные значения K (обозначено K_0) для суспензий сосновой крафт-целлюлозы с концентрациями $c=0,42; 0,79\%$, результаты тщательного экспериментального исследования которых имеются в работах [2, 11]. В расчетах приняты данные этих работ: скорости течения; радиус трубы $R=50$ мм. Так как о вязкости жидкой фазы информации нет, то здесь для определенности принято $\nu=0,91 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Значения κ и σ_0 найдены с помощью формулы (2.10) по известным из опытов [2, 11] значениям K_0 при двух скоростях течения: $\kappa=0,35$, $\sigma_0=4,2$ Па при $c=0,42\%$; $\kappa=0,33$, $\sigma_0=15$ Па при $c=0,79\%$.

Вычисленные значения K достаточно близки к экспериментальным значениям K_0 . Величина A и коэффициент сопротивления λ в диапазоне скоростей 2,36–4,89 м/с при $c=0,42\%$ и 5,50–9,17 м/с при $c=0,79\%$ изменяются слабо и могут рассматриваться как постоянные. Если в указанных диапазонах скоростей взять $A=4,51$ при $c=0,42\%$, $A=5,21$ при $c=0,79\%$, то по формуле (2.17) получаются соответственно значения $\lambda=0,0111$ и $0,0090$, близкие как к вычисленным по формуле (2.14), так и к экспериментальным значениям [2, 11] соответственно $\lambda=0,0112$ и $0,0088$.

Таблица 2

$c, \%$	$v, \text{ м/с}$	κ	$\sigma_0, \text{ Па}$	K	K_0
0,119	3,30	0,33	1,52	0,318	0,317
0,122	1,45	0,34	1,53	0,295	0,300
0,183	2,50	0,33	2,74	0,298	0,300
0,184	3,08	0,33	2,74	0,307	0,312

В табл. 2 приведены вычисленные и экспериментальные [3] значения K (обозначено K и K_0) для суспензий белой сульфитной целлюлозы разной концентрации c . Используемые в расчетах значения κ и σ_0 указаны в таблице. Для суспензии каждой концентрации они получены по экспериментальным значениям K_0 при двух скоростях течения, причем значения K при этих скоростях не включены в таблицу, так что приведенные значения K являются контрольными. Совпадение расчетных и экспериментальных значений K и в этом случае хорошее.

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Николаевскому и А. Н. Голубятникову за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев О. А. Гидродинамика волокнистых суспензий в целлюлозно-бумажном производстве. М.: Лесн. пром-сть, 1980. 248 с.
2. Lee P. F. W., Duffy G. G. An analysis of the drag reducing regime of pulp suspension flow.— Tappi, 1976, v. 59, No 8, p. 119–122.
3. Sanders H. T., Jr., Meyer H. Consistency distributions in turbulent tube flow of fiber suspensions.— Tappi, 1971, v. 54, No 5, p. 722–730.
4. Mih W., Parker J. Velocity profile measurements and a phenomenological description of turbulent fiber suspension pipe flow.— Tappi, 1967, v. 50, No 5, p. 237–246.
5. Daily J. W., Bugliarello G. Basic data for dilute fiber suspensions in uniform flow with shear.— Tappi, 1961, v. 44, No 7, p. 497–512.
6. Бабкин В. А. Сопротивление при стержневом течении волокнистой суспензии в трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1, с. 88–93.
7. Бабкин В. А. Сдвиг волокнистой суспензии между коаксиальными цилиндрами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 80–85.
8. Raij U., Wahren D. An experimental investigation of paper pulp stock flow in a straight pipe.— Svensk Papperstidning, 1964, v. 67, No 5, p. 186–195.
9. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
10. Ericksen J. L. A boundary-layer effect in viscometry of liquid crystals.— Trans. Soc. of Rheology, 1969, v. 13, No 1, p. 9–15. (Рус. перев.: Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977, с. 28–34).
11. Lee P. F. W., Duffy G. G. Velocity profiles in the drag reducing regime of pulp suspension flow.— Appita, 1976, v. 30, № 3, p. 219–226.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
15.II.1983