МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1984

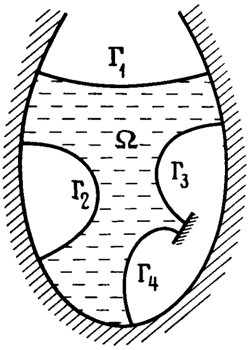
УДК 532.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ С НЕСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ЗАКРЫТЫХ СИСТЕМАХ

СЛОБОЖАНИН Л. А.

Рассматривается равновесие капиллярной жидкости, частично заполняющей сосуд и соприкасающейся с несколькими изолированными газовыми полостями. Условия его устойчивости получены с учетом изменения внутренней энергии газа при возмущениях свободной поверхности. Анализ этих условий сопровождается решением примеров.

В [1] исследовалась устойчивость состояния равновесия, когда жидкость, обладающая поверхностным натяжением, частично заполняет сосуд и ее свободная поверхность Г состоит из $m>1$ компонент связности Γ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$. При этом предполагалось, что рассматриваемая система является открытой, т. е. что области, занятые газом и соприкасающиеся с жидкостью, сообщаются все между собой или каждая с безграничным пространством. В настоящей работе методы исследования, развитые в [1], распространяются на закрытые системы.



Фиг. 1

Систему с несвязной свободной поверхностью будем называть закрытой, если в ней имеется $l>1$ изолированных друг от друга газовых полостей, соприкасающихся с жидкостью, причем объем хотя бы одной из них ограничен (фиг. 1). Область Ω, занятую жидкостью, считаем связной. Каждая из изолированных газовых полостей может соприкасаться с одной или с несколькими поверхностями Γ_i (как на фиг. 1, где одна из полостей соприкасается с Γ_3 и Γ_4). Число поверхностей Γ_i, соприкасающихся с j-той полостью, обозначим через q_j. При этом

$$j=1, 2, \ldots, l; \quad 1<l\leqslant m, \quad \sum_{j=1}^{l} q_j=m$$

При возмущении свободной поверхности вариация δW потенциальной энергии системы слагается из вариации δU потенциальной энергии массовых сил и сил поверхностного натяжения и вариации δV внутренней энергии газа $\delta W=\delta U+\delta V$. Если процесс изменения объема газовой полости является адиабатическим, то

$$\delta V=-\sum_{j=1}^{l} p_j\,\delta v_j=\sum_{j=1}^{l} p_j\left(\sum_{k=1}^{q_j}\int_{\Gamma_k} N_k\,d\Gamma\right)=\sum_{i=1}^{m} p_i\int_{\Gamma_i} N_i\,d\Gamma \qquad (1)$$

$$N_k=(\mathbf{n}_k\cdot\delta\mathbf{x})$$

Здесь p_j, v_j — давление газа в j-той полости и ее объем; N_k — нормальная составляющая возмущения $\delta\mathbf{x}$ поверхности Γ_k; $\mathbf{n}_k$ — единичный вектор нормали к Γ_k, внешний по отношению к области Ω; индекс k относится к поверхностям, соприкасающимся с j-той полостью; p_i — давление в полости, с которой соприкасается Γ_i.

Выражение для δU известно [2]

$$\delta U=\sum_{i=1}\left\{\int_{\Gamma_i}(-2H_i\sigma_i+\rho\Pi)N_i\,d\Gamma+\sigma_i\int_{\gamma_i}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_i-\cos\alpha_i)\frac{N_i}{\sin\alpha_i}\,d\gamma\right\} \qquad (2)$$

Здесь ρ — плотность жидкости; σ_i — коэффициент поверхностного натяжения на Γ_i; $\rho\Pi(\mathbf{x})$ — объемная плотность потенциала массовых сил; $H_i(\mathbf{x})$ — средняя кривизна Γ_i; α_i — угол смачивания на линии γ_i пересечения Γ_i со стенкой сосуда; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к стенке сосуда, направленный внутрь Ω.

Допустимые возмущения свободной поверхности должны удовлетворять условию сохранения объема жидкости

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_i}N_i\,d\Gamma=0 \qquad (3)$$

Поэтому с использованием правила неопределенных множителей Лагранжа, примененного по отношению к (3), из принципа стационарности потенциальной энергии получим, что в состоянии равновесия

$$\delta W+c\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_i}N_i\,d\Gamma=0$$

где c — неизвестная постоянная. Отсюда с учетом (1), (2) следуют известные условия равновесия

$$2H_i\sigma_i=\rho\Pi+p_i+c \quad (\mathbf{x}\in\Gamma_i,\quad i=1,2,\ldots,m) \qquad (4)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_i=\cos\alpha_i \quad (\mathbf{x}\in\gamma_i) \qquad (5)$$

$$\int_{\Omega}d\Omega=v \qquad (6)$$

Таким образом, поверхности Γ_i должны удовлетворять капиллярному уравнению Лапласа, на линиях γ_i должно выполняться краевое условие смачивания, а объем, ограниченный свободной поверхностью Γ и стенками сосуда, должен равняться объему жидкости v (условие (6) эквивалентно (3)). Следует отметить, что одно и то же равновесное состояние, удовлетворяющее перечисленным условиям равновесия, может реализоваться как в открытой, так и в закрытой системе.

Вопрос об устойчивости равновесия решается по знаку минимального значения второй вариации потенциальной энергии W в окрестности этого состояния равновесия [2]: если минимум δ^2W положителен, имеет место устойчивость, если отрицателен — неустойчивость. Учтем соотношения (4), (5) и равенства

$$\sum_{i=1}^{m}\delta\left(\int_{\Gamma_i}N_i\,d\Gamma\right)=0$$

$$\delta p_i=-\tau_j\,\delta v_j=\tau_j\sum_{k=1}^{q_j}\int_{\Gamma_k}N_k\,d\Gamma \qquad \left(\tau_j=\frac{p_j\eta_j}{v_j}\right)$$

Первое из них — следствие условия сохранения объема жидкости, а второе вытекает из соотношения

$$p_j v_j^{\eta_j} = \text{const}$$

справедливого при адиабатическом процессе (η_j — показатель адиабаты идеального газа, находящегося в j-той полости, с которой соприкасается Γ_i; $p_i \equiv p_j$).

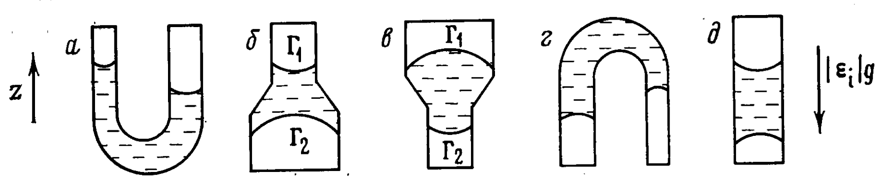
Тогда по аналогии с [2] получим

$$\delta^2 W = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \left\{ \int_{\Gamma_i} (-\Delta N_i + a_i N_i) N_i \, d\Gamma + \int_{\gamma_i} \left(\chi_i N_i + \frac{\partial N_i}{\partial e_i} \right) N_i \, d\gamma \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \tau_j \left(\sum_{k=1}^{q_j} \int_{\Gamma_k} N_k \, d\Gamma \right)^2 \tag{7}$$

$$a_i = \frac{\rho}{\sigma_i} \frac{\partial \Pi}{\partial n_i} - k_{1i}^2 - k_{2i}^2, \qquad \chi_i = \frac{k_i \cos \alpha_i - k_i^\circ}{\sin \alpha_i}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа — Бельтрами; k_{1i}, k_{2i} — кривизны главных нормальных сечений поверхности Γ_i; $\mathbf{e}_i$ — вектор нормали к γ_i, расположенный в касательной к Γ_i плоскости и направленный из Γ_i; k_i, k_i° — кривизны нормальных к γ_i сечений поверхности Γ_i и стенки сосуда.



Фиг. 2

Равенство (7) можно переписать в виде

$$\delta^2 W = \delta^2 U + \sum_{j=1}^{l} \tau_j \left(\sum_{k=1}^{q_j} \int_{\Gamma_k} N_k \, d\Gamma \right)^2 \tag{8}$$

Если некоторая из полостей сообщается с безграничным пространством, то ее объем равен бесконечности и соответствующее слагаемое под знаком первой суммы в (8) исчезает. Если для каждой газовой полости $v_j = \infty$, т. е. имеем открытую систему, то $\delta^2 W = \delta^2 U$. То же самое будет для открытой системы, у которой все газовые полости сообщаются друг с другом, так как тогда $l=1$, $q_j = m$ и сумма, стоящая в круглых скобках, в силу (3) обращается в нуль. В общем случае $\delta^2 W \geqslant \delta^2 U$, так что из устойчивости равновесия в открытой системе следует устойчивость соответствующего состояния равновесия в закрытой системе.

Рассмотрим в качестве иллюстрации равновесие жидкости в сосуде, который вблизи каждой линии смачивания γ_i имеет форму цилиндра произвольного поперечного сечения (фиг. 2). Пусть образующие этих цилиндров параллельны вертикальной оси z, а поверхности Γ_i представимы в виде $z = z_i(x, y)$. Задача об устойчивости такого равновесия в открытой системе была изучена в [1]. Выражение для $\delta^2 U$ там было приведено относительно δz_i — вертикальных составляющих возмущения поверхностей Γ_i. После представления этих составляющих в виде $\delta z_i = c_i + \delta z_i^\circ$, где $c_i = \text{const}$ — возмущения сдвига, а δz_i° — возмущения нулевого объема, для которых

$$\int_{\Gamma_i'} \delta z_i^\circ \, d\Gamma_i' = 0$$

получено, что вторая вариация U выражается в виде суммы вторых вариаций для каждого вида возмущений

$$\delta^2 U[z_i, \delta z_i] = \rho g \sum_{i=1}^{m}{}' \varepsilon_i c_i^2 |\Gamma_i'| + \delta^2 U[z_i, \delta z_i^\circ]$$

Здесь Γ_i' — проекция Γ_i на плоскость (x, y); $|\Gamma_i'|$ — площадь Γ_i'; g — ускорение свободного падения; ε_i — коэффициент перегрузки, положительный, если жидкость находится ниже поверхности Γ_i, и отрицательный — в противном случае (модули ε_i одинаковы для всех i).

Ясно, что дополнительное слагаемое, отличающее $\delta^2 W$ от $\delta^2 U$ в выражении (8), на возмущениях нулевого объема обращается в нуль. Поэтому отличие в условиях устойчивости для открытой и закрытой систем проявится лишь на возмущениях сдвига. Полагая, например, $m=2$ и учитывая соотношение

$$\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i c_i |\Gamma_i'| = 0$$

которое следует из условия сохранения объема жидкости, получим

$$\delta^2 W[z_i, c_i] = \rho g c_1^2 |\Gamma_1'| \varepsilon_1 \{1 + \varepsilon_1 |\Gamma_1'| / (\varepsilon_2 |\Gamma_2'|)\} + (\tau_1 + \tau_2) c_1^2 |\Gamma_1'|^2$$

Равновесие в открытой системе устойчиво относительно возмущений сдвига, когда [1] $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$, либо $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$, $|\Gamma_1'| < |\Gamma_2'|$. Из условия $\delta^2 W[z_i, c_i] > 0$ получим, что равновесие в закрытой системе устойчиво относительно этих возмущений не только в указанных двух случаях (фиг. 2, *а*, *б*), но и при следующих условиях:

1) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$, $|\Gamma_1'| > |\Gamma_2'|$ (фиг. 2, *в*), $\tau_1 + \tau_2 > \rho g \varepsilon_1 (|\Gamma_1'| - |\Gamma_2'|) / (|\Gamma_1'||\Gamma_2'|)$

2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0$ (фиг. 2, *г*), $\tau_1 + \tau_2 > -\rho g \varepsilon_1 (|\Gamma_1'| + |\Gamma_2'|) / (|\Gamma_1'||\Gamma_2'|)$

3) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 > 0$, $|\Gamma_1'| = |\Gamma_2'|$ (фиг. 2, *д*); 4) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

На возмущениях, удовлетворяющих (3) и нормированных условием

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} N_i^2 \, d\Gamma = 1$$

минимум функционала (7) совпадает с наименьшим собственным значением $\lambda = \lambda_*$ задачи

$$-\Delta N_i + a_i N_i + \xi_i + \mu = \lambda N_i \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_i, \ i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\partial N_i / \partial e_i + \chi_i N_i = 0 \quad (\mathbf{x} \in \gamma_i)$$

$$\xi_i = \frac{\tau_j}{\sigma_j} \sum_{k=1}^{q_j} \int_{\Gamma_k} N_k \, d\Gamma$$

к которой необходимо присоединить условие (3). Здесь при подсчете ξ_i следует выбирать параметры j-той полости, с которой соприкасается Γ_i; μ — общая для всех i постоянная, определенная из условия (3).

При наличии осевой симметрии у каждой из поверхностей Γ_i различие открытых и закрытых систем проявится в устойчивости лишь по отношению к осесимметричным возмущениям, так как гармоники с $n \geqslant 1$ при разложении N_i в ряд Фурье

$$N_i(s_i, \theta_i) = \varphi_i(s_i) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{in}(s_i) \cos n\theta_i + \psi_{in}(s_i) \sin n\theta_i]$$

(s_i — длина дуги осевого сечения поверхности Γ_i; θ_i — соответствующий полярный угол) дают нулевой вклад в выражение, стоящее под знаком суммы в функционале (8). На осесимметричных возмущениях $N_i=\varphi_i(s_i)$ выписанная выше задача примет вид

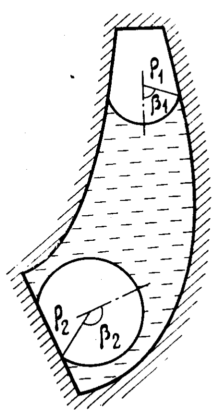
$$-\varphi_i''-\frac{r_i'}{r_i}\varphi_i'+a_i(s_i)\varphi_i+\xi_i+\mu=\lambda\varphi_i \qquad (s_{i0}\leqslant s_i\leqslant s_{i1}) \tag{9}$$

$$-\varphi_i'(s_{i0})+\chi_i(s_{i0})\varphi_i(s_{i0})=0, \quad \varphi_i'(s_{i1})+\chi_i(s_{i1})\varphi_i(s_{i1})=0 \tag{10}$$

$$\xi_i=2\pi\frac{\tau_j}{\sigma_j}\sum_{k=1}^{q_j}\int_{s_{k0}}^{s_{k1}} r_k\varphi_k\,ds_k \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{s_{i0}}^{s_{i1}} r_i\varphi_i\,ds_i=0 \tag{12}$$

Здесь s_{i0}, s_{i1} — начальная и конечная точки осевого профиля поверхности Γ_i; $r_i(s_i)$ — расстояние от точки на профиле до оси симметрии. Условия (10) приведены для двусвязной (не пересекающей ось симметрии) поверхности Γ_i. Если Γ_i односвязна, то краевое условие в начальной точке $s_{i0}=0$, принадлежащей оси симметрии, заменяется требованием ограниченности решения.



Фиг. 3

При решении этой задачи можно воспользоваться методикой, развитой в [1] для открытых систем. В частности, полагая, что Γ состоит из двух односвязных поверхностей ($m=2$, $l=2$, $q_j=1$), представим решения уравнений (9) при $\lambda=0$ в виде

$$\varphi_i(s_i)=c_iu_i(s_i)+(\mu+\xi_i)w_i(s_i) \quad (i=1,\,2)$$

Здесь $u_i(s_i)$, $w_i(s_i)$ — ограниченные при $s_i=0$ решения уравнений

$$-u_i''=\frac{r_i'}{r_i}u_i'+a_iu_i0, \qquad -w_i''-\frac{r_i'}{r_i}w_i'+a_iw_i+1=0$$

Для определения постоянных c_1, c_2, ξ_1, ξ_2, μ имеем два условия (10), два условия (11) и условие (12). Из них получим, что $\lambda=0$ является собственным значением задачи (9)—(12), когда $\chi_1(s_{11})=\chi_1^*$ и $\chi_2(s_{21})=\chi_2^*$, где χ_1^*, χ_2^* удовлетворяют уравнению

$$d_1\chi_1^*\chi_2^*+e_1\chi_1^*+f_1\chi_2^*+h_1=0 \tag{13}$$

$$d_1=u_1(s_{11})D_2(s_{21})+u_2(s_{21})D_1(s_{11})-\omega D_1(s_{11})D_2(s_{21})$$

$$e_1=u_1(s_{11})D_2'(s_{21})+u_2'(s_{21})D_1(s_{11})-\omega D_1(s_{11})D_2'(s_{21})$$

$$f_1=u_2(s_{21})D_1'(s_{11})+u_1'(s_{11})D_2(s_{21})-\omega D_1'(s_{11})D_2(s_{21})$$

$$h_1=u_1'(s_{11})D_2'(s_{21})+u_2'(s_{21})D_1'(s_{11})-\omega D_1'(s_{11})D_2'(s_{21})$$

$$D_i(s_i)=u_i(s_i)\int_0^{s_i} r_i(s_i)\,w_i(s_i)\,ds_i-w_i(s_i)\int_0^{s_i} r_i(s_i)\,u_i(s_i)\,ds_i$$

$$\omega=\omega_1+\omega_2, \quad \omega_i=2\pi\tau_i/\sigma_i$$

Если некоторую внутреннюю точку s_i ($0<s_i<s_{i1}$) профиля поверхности Γ_i рассматривать как конечную точку профиля другой осесимметричной односвязной поверхности, которая является частью Γ_i, то величину d_1 можно определить как функцию s_1, s_2. По аналогии с [1] несложно показать, что исследуемая поверхность Γ устойчива по отношению к осесимметричным возмущениям, если выполняются два условия: 1) в прямо-

угольнике $0<s_i\leqslant s_{i1}$ $(i=1,2)$ функция $d_1(s_1, s_2)$ принимает значения одного знака и не обращается в нуль; 2) параметры $\chi_1(s_{11})$, $\chi_2(s_{21})$ таковы, что отображающая их в плоскости (χ_1, χ_2) точка содержится внутри области, ограниченной снизу и слева правой ветвью гиперболы (13). Эти условия являются необходимыми и достаточными, если отвлечься от рассмотрения критических ситуаций, когда равновесные состояния находятся на границе области устойчивости. Заметим, что в случае $\chi_1(s_{11})=\chi_2(s_{21})=\infty$ условие устойчивости совпадает с условием 1.

Пусть, например, равновесие реализуется в замкнутой системе при полной невесомости, когда поверхность Г состоит (фиг. 3) из двух сферических сегментов радиусов ρ_1, ρ_2 с углами полурастворов β_1, β_2 (аналогичная задача для открытой системы исследовалась в [1]). Тогда $u_i(s_i)=\cos(s_i/\rho_i)$, $w_i(s_i)=\rho_i^2/2$ и поэтому получим следующие выражения для коэффициентов гиперболы (13):

$$d_1=-\frac{1}{4}\left(F_1\cos\beta_2+F_2\cos\beta_1+\frac{1}{4}\omega F_1F_2\right)$$

$$e_1=-\frac{1}{4\rho_2b_2}\sin\beta_2\left(2F_2\cos\beta_1-F_1b_2+\frac{1}{2}\omega F_1F_2\right)$$

$$f_1=-\frac{1}{4\rho_1b_1}\sin\beta_1\left(2F_1\cos\beta_2-F_2b_1+\frac{1}{2}\omega F_1F_2\right)$$

$$h_1=-\frac{1}{4\rho_1\rho_2b_1b_2}\sin\beta_1\sin\beta_2[-2(F_1b_2+F_2b_1)+\omega F_1F_2]$$

$$b_i=1-\cos\beta_i,\quad F_i=\rho_i^4b_i^2\quad(i=1,2)$$

В случае, когда $\chi_1(s_{11})=\chi_2(s_{21})=\infty$ (обе линии смачивания находятся на кромках твердого тела либо $\alpha_1=\alpha_2=0$), условие устойчивости имеет вид $d_1<0$ или

$$\rho_1^{-4}b_1^{-2}\cos\beta_1+\rho_2^{-4}b_2^{-2}\cos\beta_2>-\frac{1}{4}\omega$$

Оно выполняется в более широкой области, чем аналогичное условие для открытой системы, у которой $\omega=0$.

Проведенные рассмотрения несложно распространить на равновесие в закрытой системе, когда область Ω является несвязной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слобожанин Л. А.* Об устойчивости равновесного состояния капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 2, с. 10–19.
2. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.

Харьков

Поступила в редакцию 10.III.1983